LIVIU SOLOMON

ELASTICITATE LINIARĂ

LIVIU SOLOMON

ELASTICITATE LINIARĂ

introducere matematică în statica solidului elastic

TABLA DE MATERII

PREFAȚĂ

Apărută la începutul secolului trecut, teoria elasticității a atras repede asupră-i atenția a numeroase personalități de prim rang ale științei.

În urmă cu 100 sau 50 de ani, tratate ca cele ale lui Lamé, Clebsch și Saint-Venant sau Love puteau cuprinde încă ansamblul cunoștințelor de teorie a elasticității. Dar în ultimele decenii mecanica solidului deformabil a cunoscut o nouă perioadă de intensă dezvoltare. În aceste condiții, încercarea de a realiza o carte care să cuprindă, măcar în linii mari, rezultatele și metodele teoriei elasticității în faza sa actuală pare dinainte sortită la eșec.

În volumul de față am căutat de aceea numai să selecționăm ceea ce e fundamental pentru înțelegerea cercului de idei și posibilități ale teoriei elasticității. În această alegere am căutat să reținem numai ceea ce e strict necesar pentru orientarea independentă în vasta literatură de specialitate.

În anul 1862, A. Clebsch scria în prefața cărții sale Theorie der Elastizität fester Körper *următoarele: „În studiul științei de care ne ocupăm, dacă ținem seama de interesul fizic, cunoașterea teoriilor matematice relative la ea nu e nici absolut necesară, nici deosebit de utilă. Voi da astfel ca exemplu fie și teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, care nu poate fi cu ușurință utilizată în aplicații". Și Clebsch nu era inginer, ci matematician! Dimpotrivă, examinarea stării de lucru actuale ne arată că cercetarea contemporană în teoria elasticității este încă ades frînată chiar de redusa eficacitate a aparatului matematic de care ea trebuie să facă uz. Tocmai eforturile pentru ameliorarea acestui aparat fac ca teoria elasticității, cu tot trecutul ei mai mult decît secular, să fie azi în continuă și ades furtunoasă dezvoltare.*

Teoria elasticității poate fi privită ca studiu al unor probleme la limită pentru un anumit sistem de ecuații cu derivate parțiale. Partea pur „fizică" a teoriei poate fi redusă la stabilirea relațiilor de bază, la alegerea acelor mărimi și raporturi între ele care trebuie să caracterizeze noțiunea de „corp elastic". În definitiv s-ar putea construi o expunere a ei în stilul „Mecanicii Analitice", despre care Lagrange declara cu satisfacție că nu conține nici o singură figură.

Dar teoria elasticității nu e o teorie matematică, ci o ramură a mecanicii. Iar mecanica însăși este una dintre științele fundamentale ale naturii, al cărei studiu nu coincide cu studiul matematic al ecuațiilor sale.

Mecanica — și în particular teoria elasticității — nu are o structură axiomatică și expunerea ei nu constă din înlănțuirea unui șir de teoreme. Nu orice corpuri geometrice și nu orice condiții la limită sînt interesante în studiul sistemului de ecuații pomenit mai sus. Aceasta ferește teoria de abstractizări inutile; face să se simtă mai mult grija pentru rezultatele utile practicii; duce la adoptarea metodelor matematice nu după gradul lor de extremă generalitate, ci adesea după simplitate și eficacitate.

Aparatul matematic folosit în această carte se limitează în mare la capitole clasice ale teoriei ecuațiilor fizicii matematice și ale teoriei funcțiilor de o variabilă complexă.

Am căutat să ușurăm munca cititorului printr-o expunere detaliată a raționamentelor, precum și prin citarea amănunțită a surselor. La dispoziția cititorului calificat sînt puse indicații asupra lucrărilor care dezvoltă puncte de vedere mai noi sau mai generale, ce depășesc limitele expunerii de față, limite cu grijă subliniate de fiecare dată.

Dintre tratatele clasice indicăm aici lucrările lui G. Lamé [1], A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1] și A. Love [1]. Fiecare dintre ele a făcut epocă, iar cea din urmă prezintă încă interes și în prezent.

Starea de lucruri de pînă la 1900 — 1910 este analizată în articolele de sinteză ale lui Th. von Kármán [1], [2]; C. Müller și A. Timpe [1]; O. Tedone [2]; O. Tedone și A. Timpe [1]. Rezultatele obținute înainte de 1925 sînt pe scurt expuse în Handbuch der Physik *de către E. Trefftz [3] și J. Geckeller [1], articole interesante și astăzi. În ediția postbelică a aceluiași* Handbuch, *elasticitatea clasică este examinată numai în articolul lui I. Sneddon și D. Berry [1], cu dimensiuni mai restrînse. Un loc important e rezervat problemelor generale ale bazelor teoriei în variantele sale cele mai moderne, în articolele — veritabile monografii — lui C. Truesdell [1], și mai ales C. Truesdell și R. Toupin [1] și C. Truesdell și W. Noll [1]. Mai indicăm două cărți recente asupra mecanicii mediilor continue, mai accesibile, dar nu mai puțin utile : P. Germain [1] și W. Prager [2]. Un punct de vedere critic și bogate indicații bibliografice sînt oferite de articolele de sinteză ale lui E. Sternberg [4] și J. Goodier [3], [4]. În afara presei periodice de specialitate, subliniem încă importanța urmăririi seriilor „Advances in applied mechanics", „Progress in solid mechanics" și „Symposia in applied mathematics", cu contribuții la problemele cele mai moderne.*

Literatura de specialitate se îmbogățește în fiecare an cu mai bine de 10 000 de titluri, dintre care cel puțin 20% în domeniul teoriei clasice a elasticității. Se poate încerca urmărirea informativă a acestei avalanșe de lucrări cu ajutorul unor reviste ca „Applied Mechanics Reviews", „Mathematical Reviews" și „Referativnîi Jurnal Mehanika" (cea mai completă).

Pentru materialul inclus în volumul de față, tabla de materii este edificatoare. Prezentarea, sub o formă sau alta, a chestiunilor ce conduc la stabilirea sistemului complet de ecuații ale teoriei elasticității, este obligatorie. Alcătuirea restului lucrării, așadar a celei mai mari părți a ei, corespunde convingerii autorului că anumite metode sau soluții sînt de interes deosebit și reprezintă un bun definitiv cîștigat al teoriei. Printre acestea intră metoda teoriei funcțiilor de o variabilă complexă în problemele antiplană și plană și metoda potențialilor armonici de deplasare în problemele tridimensionale.

Ca principale surse de informare recomandăm: pentru problema antiplană — L. Milne-Thomson [3] și N. Mushelișvili [5], capitolul 7; pentru problema plană — N. Mushelișvili [5], L. Milne-Thomson [2], A. Green și W. Zerna [1], capitolele 6—8; pentru problema tridimensională — A. Lurie [4].

Deosebit de valoroase sînt, după părerea noastră, cărțile lui Chi Teh Wang [1], *S. Timoshenko și J. Goodier* [1] *(ambele cu numeroase aplicații), L. Landau și E. Lifșiț* [1] *(foarte compactă și interesantă prin considerațiile de principiu) și I. Sokolnikoff* [2] *(cel mai modern și mai bine echilibrat din punctul de vedere al materialului cuprins printre tratatele de elastostatică liniară).*

O lucrare utilă, deși acoperind numai o arie mai restrînsă de probleme, este cea a lui V. Novojilov [3]. *Recomandăm de asemenea cărțile lui R. Southwell* [3] *și A. Sommerfeld* [1], *nu îndestul de sistematice, dar conținînd mult material interesant, și mai ales pe cea a lui P. Papkovici* [4], *foarte utilă și azi, la 30 de ani după apariție. Pentru anumite aspecte elementare se pot utiliza și manualele lui M. Filonenko-Borodici* [1] *și L. Leibenzon* [1].

Există numeroase cărți de rezistență a materialelor și de dinamică tehnică utile a fi consultate: Gh. Buzdugan [1], *A. Iliușin și V. Lenski* [1], *R. L'Hermite* [1], *Iu. Rabotnov* [2], *precum și tratatele mai vechi ale lui N. Beliaev* [2], *C. Biezeno și R. Grammel* [1], *M. Filonenko-Borodici et al.* [1].

Literatura cu caracter istoric în acest domeniu nu e prea bogată. Indicăm capitolul introductiv la volumul lui A. Love [1]; *lucrările lui S. Timoshenko* [2]; *I. Todhunter și K. Pearson* [1]; *articolele lui G. Bouligand* [1], *C. Truesdell* [3], [7].

Textul de față e strict limitat la cadrul elastostaticii liniare a corpurilor omogene și izotrope. *De aceea nu dăm detalii asupra teoriei neliniare, nici asupra teoriei corpurilor anizotrope (pentru unele indicații vezi finele § 4.1).*

Nu vom considera problemele dinamice nu datorită unor dificultăți speciale, cît pentru că tematica matematică a elastodinamicii e cu totul diferită de cea a elastostaticii (vezi § 4.12). Nu ne vom ocupa de teoria plăcilor plane și curbe, care formează azi o disciplină aparte (vezi, de pildă, A. Goldenveizer [1], *S. Timoshenko și S. Woinowski-Krieger* [1], *V. Visarion* [1], [2]). *În fine, nu vom considera studiul metodelor aproximative, a căror prezentare corectă pretinde un aparat de analiză funcțională relativ dezvoltat (vezi, de exemplu, S. Mihlin* [2]—[4]).

Acestea sînt limitele pe care o carte de elastostatică clasică trebuie să le respecte și pe care vrem să le subliniem dinainte. Cu toate acestea, aria acoperită de expunerea de față rămîne suficient de largă pentru a cuprinde nenumărate aplicații practice. În particular, cartea este scrisă și în speranța că ea ar putea fi utilă și inginerilor preocupați de probleme apropiate teoriei elasticității și convinși de însăși tehnica modernă că metodele clasice ale rezistenței materialelor sînt deja în multe direcții depășite.

Mulțumim aici tuturor acelora care au avut bunăvoința de a citi lucrarea în manuscris și de a ne comunica observațiile lor.

Mulțumim colegilor noștri E. Nicolau (care a efectuat măsurătorile cerute de unele exemple din § 5.16 și a pregătit bună parte din § 6.13) și I. Zamfirescu (care a efectuat calculele necesare pentru tabelele din § 10.6, § 10.10 și pentru trasarea curbelor din § A.6 și § A.7).

Doresc să exprim profunda mea recunoștință față de toți cei care m-au îndrumat în studiul mecanicii; față de acad. prof. Caius Iacob (de la Universitatea din București) și prof. Paul Germain (de la Universitatea din Paris), fără sfatul și încurajarea cărora această lucrare n-ar fi văzut lumina tiparului; și față de soția mea pentru sprijinul moral de nepreţuit din anii în care această carte a fost scrisă și în anii în care, apoi, și-a așteptat apariția.

AUTORUL

INSTRUCȚIUNI PENTRU LECTURĂ

Capitolele *sînt numerotate de la 1 la 10*; introducerea *are nr. 0* (*zero*); anexa *este indicată cu litera A. Numerotarea* paragrafelor *începe de la 1 în interiorul fiecărui capitol; cea a* formulelor *începe de la 1 în interiorul fiecărui paragraf. În interiorul unui paragraf dat nu se repetă numărul paragrafului; în interiorul unui capitol nu se repetă numărul capitolului. Astfel, de pildă, § 7.3 înseamnă § 3 al cap. 7 (în referirile bibliografice, aceeași convenție). Dar în interiorul cap. 7, el va fi citat numai ca § 3. Formula (7.3.19) este formula 19 din § 3 din cap. 7; dar ea va fi citată ca formula (19) în interiorul § 7.3 și ca formula (3.19) în interiorul cap. 7. Numărul paragrafelor e imprimat pe prima linie a fiecărei pagini.*

Numerotarea figurilor *este similară: figura 5.15.8 este figura 8 din § 15 din capitolul 5.*

Indicațiile bibliografice *sînt date peste tot în ordine alfabetică, exceptînd cazurile în care dorim să subliniem prioritatea unui autor (în dată sau în importanța lucrării). Numele rusești sînt transcrise fonetic; în bibliografie ele apar în transcriere internațională — așadar uneori sub o formă ușor diferită.*

Explicarea simbolurilor *e dată pe parcurs. În figuri se folosesc aceleași simboluri, cu excepția vectorilor, care apar prevăzuți cu săgeți.*

Aspectul — uneori ciudat — al unor formule e dictat de rațiuni de ordin tipografic: dorința de a cîștiga spațiu a impus utilizarea unui număr mai mare de paranteze, exponenți negativi și fracționari.

Alegerea semnelor pentru unele mărimi nu a stat în întregime la dispoziția autorului; atragem atenția mai cu seamă asupra scrierii unor cantități complexe sistematic folosite în capitolele 5 și 6 și în Anexă (ca de ex. **I, M, R, S, T, U, X**), *tipărite cu caractere oblice seminegre, acolo unde caractere oblice negre ar fi fost de preferat.*

INTRODUCERE

§ 1. GENERALITĂȚI

Practica stă la originile teoriei elasticității.

Toporașele epocii paleolitice, coloanele palatului din Cnossos, podul din Gard — toate sînt semnul utilizării proprietăților corpului solid capabil să suporte și să transmită anumite sarcini. Totodată, legende ca cea a turnului Babel sau a Mînăstirii Argeșului ne furnizează, sub o formă fantastică, informații despre mari catastrofe în domeniul construcțiilor, semn al insuficientei cunoașteri a proprietăților corpului solid.

Studiul proprietăților materiei a dus de la acumularea de fapte la elaborarea unor puncte de vedere științifice, care tindeau la explicarea fenomenelor, la prevederea și producerea lor în condiții dorite. Una din primele discipline științifice formate a fost *mecanica*. În cele peste două milenii scurse de la originile ei, mecanica s-a dezvoltat considerabil. Mecanica punctului material, mecanica sistemelor de puncte, mecanica solidului rigid, mecanica mediilor continui deformabile — iată principalele sale subdiviziuni.

Teoria elasticității este una din cele mai importante ramuri ale mecanicii mediilor continui deformabile. În domeniul ei intră studiul tuturor corpurilor solide ce ne înconjoară, din punctul de vedere al echilibrului și al mișcării lor (abstracție făcînd de o componentă de primă aproximație, corespunzătoare descrierii lor ca solide rigide).

Orice știință a naturii începe prin delimitarea obiectului său, ceea ce echivalează cu stabilirea unui *model* al materiei. Pentru înțelegerea fenomenelor, e necesară o operă de abstractizare : ea are ca țintă eliminarea a tot ce — din punctul de vedere al științei respective — e secundar, și formularea precisă, cantitativă, a ceea ce este esențial. Rezultatul constă în elaborarea unui model al materiei, model istoricește format și aflîndu-se în permanentă schimbare și precizare pentru orice disciplină științifică în dezvoltare.

Vom începe prin definirea *modelului corpului elastic*. Acest model odată stabilit, studiul se va concentra asupra consecințelor logice ale modelului.

Certitudinea corectitudinii modelului, precum și aprecierea limitelor sale de valabilitate, se pot obține pe două căi. Astfel, se poate stabili un model al corpului elastic pe cale deductivă, pornind de la datele furnizate de fizică asupra structurii corpurilor solide. Pe de altă parte, se pot stabili pe cale inductivă proprietățile prin care înțelegem să caracterizăm corpul elastic, lăsînd practicii verificarea justeței concluziilor la care ele ne conduc. Această din urmă cale s-a dovedit mai simplă și mai utilă pentru teoria elasticității.

§ 2. EXPERIENȚELE DE ÎNTINDERE-COMPRESIUNE

a) *Descrierea experienței*

Sub acțiunea forțelor exterioare aplicate unui corp, în el apar forțe interioare, al căror efect este modificarea formei sale. Trebuie să considerăm deci aspecte de *geometrie* și aspecte de *statică* ale problemei. Ele nu depind explicit de proprietățile materialului din care e alcătuit corpul : studiul acestora din urmă constituie aspectul *fizic* al chestiunii.

O înțelegere sugestivă a comportării unui corp sub acțiunea sarcinii se obține prin efectuarea unor experiențe simple (vezi de ex. A. Nadai [1], cap. 3, 8 și 21).

Să considerăm în acest scop un cilindru (de oțel, fontă, lemn etc.) de lungime l mare față de dimensiunile secțiunii sale transversale $\mathscr{D}$, a



Fig. 0.2.1

cărei arie o vom nota cu D. Acest cilindru supus la întindere, la compresiune, la torsiune etc., într-o mașină de încercări, se numește *epruvetă*. Să fixăm una din bazele sale și să încărcăm cealaltă bază cu un sistem de forțe static echivalent cu o forță unică $X(t)$ funcție de timp, aplicată în centrul de greutate al bazei și dirijată în lungul axei cilindrului.

Dacă X crește de la 0 la valoarea sa finală suficient de încet pentru ca forțele inerțiale să fie neglijabile, procesul se numește *pseudo-static*.

Dacă, mai mult, fiecare din stările intermediare poate fi privită ca o stare de echilibru și procesul poate fi descompus într-o succesiune de astfel de stări, arbitrar de apropiate unele de altele, el se numește *cvasistatic*. (Vezi mai jos pag. 26.)

Sub acțiunea sarcinii, în epruvetă apar forțe interioare care îi modifică forma : ea se alungește sau se scurtează (după semnul lui X), iar secțiunea sa transversală se micșorează sau se mărește. Vom spune că epruveta *se deformează*.

Toți parametrii considerați *după* deformație se vor nota cu un asterisc.

Pentru a examina legătura dintre forțele ce iau naștere în epruvetă și modificarea formei sale, să ne fixăm atenția asupra sarcinii unitare (forța X raportată la aria D) și a alungirii relative a cilindrului.

Alungirea relativă este o mărime nul-dimensională ; ea se numește (provizoriu) *deformație* și se notează

$$\varepsilon = (l^* - l)/l. \qquad (1)$$

Sarcina unitară se măsoară în kgf/cm^2 și se numește (provizoriu) *tensiune*. Mai exact, se consideră *tensiunea convențională* (pe scurt *tensiune*)

$$\sigma = X/D, \tag{2}$$

precum și *tensiunea reală*

$$\sigma^* = X/D^*. \tag{3}$$

Făcînd să crească X — și deci și σ — de la zero la valori pozitive tot mai mari, și măsurînd deformațiile corespunzătoare, putem trasa într-un sistem de axe (t, ε, σ) o curbă numită (provizoriu) *curbă caracteristică* a materialului. Această curbă nu depinde sensibil nici de dimensiunile cilindrului (dacă acesta e destul de zvelt), nici de modul concret în care se realizează sistemul de sarcini static echivalent cu X; ea depinde însă de temperatura T, de viteza procesului etc. Dacă T = constant — ceea ce este realizabil într-un proces pseudostatic, în care (în absența surselor de căldură) există timp suficient pentru schimb de căldură cu exteriorul, așa fel încît temperatura să nu varieze — putem trasa o familie de curbe caracteristice, funcție de T ca parametru.

b) Curbe caracteristice

Studiul curbei caracteristice în spațiul (t, ε, σ) pentru diferite funcții $X(t)$ pune în evidență o mare varietate de proprietăți ale materialului. Să ne mărginim la studiul materialelor pentru care — într-un proces pseudo-static — dependența explicită față de timp a mărimilor ε și σ este neglijabilă. În acest caz, vom avea de-a face cu o curbă plană, într-un plan (ε, σ). *Această* curbă (vezi fig. 0.2.2) va purta pe viitor numele de *curbă caracteristică*.

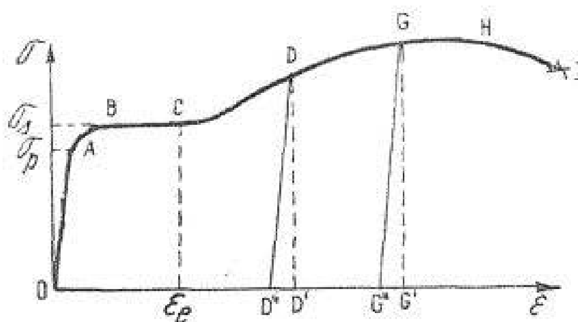


Fig. 0.2.2

Derivata

$$E = d\sigma/d\varepsilon \tag{4}$$

definește panta curbei, așadar comportarea epruvetei pentru o *anumită* stare prin care ea trece.

Să presupunem — pentru a fixa ideile — că epruveta e executată din oțel moale. În acest caz, porțiunea apropiată de origine a curbei $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ are o pantă constantă, independentă de ε. Pe această porțiune avem

$$E = \sigma/\varepsilon, \tag{5}$$

şi dependenţa dintre σ şi ε este deci *liniară* şi *omogenă*. Pentru oţel la temperatura normală avem $E \cong 2\,100\,000$ kgf/cm².

Pentru o valoare $\sigma = \sigma_p$, porţiunea rectilinie a diagramei ia sfîrşit; această valoare (în cazul nostru $\sigma_p \cong 2\,000$ kgf/cm²) se numeşte *limită de proporţionalitate* (uneori : de *elasticitate*). După o nouă creştere (în general mică) a tensiunii, diagrama ia forma unei platforme orizontale : materialul se deformează sub tensiune constantă. Această porţiune a curbei se numeşte *palier de fluaj* şi valoarea $\sigma = \sigma_s$ corespunzătoare apariţiei acestui fenomen este *limita de plasticitate*.

De la punctul C mai departe (vezi fig. 0.2.2.), panta (4) redevine pozitivă, dar ea depinde de ε şi valoarea sa e mai mică decît (5). Această reapariţie a rezistenţei la sarcină se numeşte *ecruisaj*, iar valoarea lui ε dincolo de care începe fenomenul se notează ε_e.

Curba caracteristică este o diagramă a tensiunii convenţionale; întrucît pentru $X > 0$ avem $D^* < D$, e limpede că diagrama tensiunii reale e situată *deasupra* ei.

Dacă X creşte în continuare, constatăm apariţia unei gîtuituri, aşadar a unei secţiuni defavorizate. Tensiunea reală *pe această secţiune* continuă să crească — cu toate că porţiunea finală HI a curbei caracteristice are alură descendentă. Punctul H marchează apariţia gîtuiturii, aşadar momentul în care starea cilindrului încetează de a fi omogenă pe lungime, şi în care capacitatea sa de a rezista sarcinii e caracterizată de această secţiune defavorizată. Tensiunea corespunzătoare punctului H se numeşte *limită de rezistenţă*. (În cazul considerat, valoarea ei este de cca. 4 000 kgf/cm².) Punctul I corespunde momentului în care cilindrul se rupe în zona gîtuiturii; tensiunea corespunzătoare se numeşte *limită de rupere*.

Curba astfel trasată se numeşte *curbă caracteristică de încărcare la întindere*. Pentru forţe $X < 0$ obţinem $\sigma < 0$, $\varepsilon < 0$ (*compresiune*). Dacă cilindrul este lung, epruveta îşi *pierde stabilitatea*, trecînd brusc la o formă curbilinie de echilibru. Acest fenomen se numeşte *flambaj*, şi el apare adesea cu mult înainte de atingerea limitei de proporţionalitate. Pentru a putea continua încărcarea cu tensiuni negative, se folosesc epruvete scurte (de pildă, decupate din cea iniţială). În acest caz, curba repetă (aproximativ simetric) aspectul din figura 0.2.2, ruperea fiind înlocuită cu apariţia de crăpături pe suprafaţa laterală a cilindrului, urmată de sfărîmarea lui. Limita de elasticitate, de plasticitate, de rezistenţă, sînt în general *mai mari*. Pentru anumite materiale (fontă, beton), diferenţele sînt importante.

Să considerăm acum atins un punct oarecare de pe curba caracteristică şi să începem să micşorăm sarcina (*descărcare*). Comparînd cele două diagrame (de încărcare şi descărcare) constatăm că, dacă punctul (ε, σ) se găseşte pe porţiunea ce precede limita de plasticitate, descărcarea se face în lungul curbei trasate pentru încărcare; deformaţia se anulează deci odată cu tensiunea ce a cauzat-o. Dimpotrivă, dacă limita de plasticitate a fost depăşită, descărcarea se efectuează în lungul unei *paralele* la porţiunea rectilinie iniţială.

Deformația corespunzătoare unui punct D se descompune deci în suma OD′ = OD″ + D″D′, unde OD″ este deformația *remanentă* (pentru că nu dispare odată cu anularea tensiunii), iar D″D′ este deformația *elastică*. Deformația totală OD′ se numește *deformație elasto-plastică*. Dacă punctul D este situat înainte de B, deformația este pur elastică. Apariția deformației remanente arată că, odată cu depășirea limitei de plasticitate, în material au avut loc anumite schimbări *ireversibile*. Dimpotrivă, deformația elastică este *reversibilă*.

Pornind din nou de la D″ spre D (*reîncărcare*), un nou palier de fluaj nu mai apare : punctul (ε, σ) urmează segmentul D″D, după care trece pe porțiunea DGHI a diagramei inițiale (trasate pentru o epruvetă similară). Orice nouă descărcare începînd din D se efectuează tot după D″D. Porțiunea rectilinie este deci mai lungă decît OA, și limita de proporționalitate — măsurată din D″ — e mai mare.

Oricîte operații de anulare a tensiunii am efectua, descărcarea se va face întotdeauna după paralele la OA, iar încărcarea va avea loc fie după astfel de paralele, fie — acolo unde ele o ating — după curba caracteristică de încărcare inițială.

OBSERVAȚIA 1. Experiențe foarte precise arată totuși că, pentru $\sigma \geqslant \sigma_s$, curba de descărcare e situată *sub* cea de încărcare ; se obține astfel un domeniu foarte alungit, care conține paralela considerată la OA. Fenomenul se numește *hysteresis*.

Expresia matematică a acestor fapte e următoarea : atîta timp cît limita de plasticitate σ_s nu a fost atinsă, există o dependență *biunivocă* între mărimile ε și σ; pentru $\sigma \leqslant \sigma_p$, această dependență este liniară și omogenă. Dimpotrivă, pentru $\sigma \geqslant \sigma_s$, dependența încetează de a fi biunivocă : pentru a restabili biunivocitatea, e necesară cunoașterea istoricului procesului de deformare.

c) Tipuri și proprietăți diferite ale materialelor

Curbele caracteristice diferă de la un material la altul. Cele pentru care curba are aspectul din figura 0.2.2 sînt extrem de numeroase (mai ales printre metale). Există însă materiale (chiar metalice : cupru, aluminiu) pentru care porțiunea rectilinie nu apare, sau altele la care curba caracteristică are aspect logaritmic, exponențial etc. Există materiale pentru care deformația remanentă e foarte importantă (cupru, plumb, ceară), și altele la care ea lipsește aproape cu desăvîrșire (sticlă).

Materialele la care ruperea se produce imediat după depășirea limitei de elasticitate se numesc *casante*. Cele care suportă deformații remanente mari se numesc *plastice*.

Chiar pentru un material dat, fenomenul se complică dacă intervin factori ca : viteze mari de încărcare, variații importante de temperatură, presiuni hidrostatice mari, acțiunea alternată a unor sarcini de semne contrare, acțiunea de durată a unor sarcini depășind σ_s, iradierea și altele.

(Vezi de ex. A. Iliuşin şi V. Lenskii [1], cap. 2; vezi şi D. Drucker [2].) Din această cauză, de fiecare dată trebuie să precizăm condiţiile în care are loc solicitarea, dacă ele diferă de condiţiile obişnuite. De aceea e preferabil să nu vorbim despre materiale elastice, plastice, etc., ci despre materiale aflate *în zona* elastică, plastică etc. (Astfel, marmora este un material casant în condiţii normale; supusă la presiuni hidrostatice mari, ea suportă însă deformaţii remanente considerabile.)

OBSERVAŢIA 2. Rezultate analoge celor de mai sus se obţin supunînd epruveta la *torsiune* sub acţiunea unui cuplu de moment dirijat în lungul axei cilindrului.

Cele de mai sus sînt valabile numai pentru procese în care variabila timp nu intervine explicit. În particular, ele fac abstracţie de fenomene ca : creşterea deformaţiei ca funcţie de timp la tensiune constantă (*fluaj*); scăderea tensiunii ca funcţie de timp la deformaţie constantă (*relaxaţie*). Astfel de fenomene apar — mai mult sau mai puţin pronunţat — odată cu atingerea limitei de plasticitate. De aceea, procesele de deformaţie pentru $\sigma \geqslant \sigma_c$ *nu* sînt cvasistatice (deşi pot fi pseudostatice): fixarea *tuturor* parametrilor la valori constante este imposibilă.

Studiul unor astfel de stări implică suprapunerea unor fenomene de deformare *elastică*, *plastică*, şi *de fluaj* (analogă curgerii unui fluid vîscos) şi e legat de probleme de fizică relative la microstructura materialului. (Vezi de ex. E. Kröner [6]; M. Reiner [1].)

Observaţiile precedente sînt valabile numai pentru o categorie particulară de corpuri, în condiţii particulare de solicitare. Totuşi, acestea sînt atît de frecvente, încît au justificat crearea unor discipline ştiinţifice consacrate studiului lor : *teoria elasticităţii* şi *teoria plasticităţii*. Studiul corpurilor şi condiţiilor în care apar suprapuneri de fenomene elastice, plastice şi de fluaj este obiectul *reologiei*.

Fenomenele descrise deschid drumul spre înţelegerea legăturii dintre forţe şi deformaţii într-un corp de configuraţie *oarecare*, supus la sarcini *oarecari*. Împreună cu relaţiile geometrice şi cele statice, ele trebuie să ducă la formulări cantitative asupra tuturor mărimilor ce caracterizează corpul solid deformabil sub sarcină.

§ 3. SOLICITAREA MEDIULUI CONTINUU DEFORMABIL

Din punctul de vedere al mecanicii solidului rigid, orice corp se află în echilibru sau mişcare, după natura sarcinii aplicate şi a legăturilor geometrice. Dar forma lui rămîne neschimbată, distanţa dintre perechile de puncte şi unghiurile dintre perechile de elemente liniare nemodificîndu-se. Sub acţiunea sarcinii exterioare, apar forţe interioare. Acestea nu pot fi determinate şi nu intervin în studiul problemei : oricît ar fi de mari, ele nu pot distruge corpul, nici nu pot modifica configuraţia sa.

Acest punct de vedere corespunde unui anumit *model* al materiei. El constituie *o primă aproximație*, dînd răspuns la întrebarea dacă corpul considerat este, *în ansamblu*, în echilibru sau în mișcare.

Dar în cazul corpurilor realizate din materiale uzuale (metal, lemn etc.) și supuse la sarcinile ce apar de obicei în practica construcțiilor, a construcțiilor de mașini etc., forma corpului se modifică ; iar dacă sarcina depășește anumite limite, construcția considerată poate ieși din uz.

Aceasta se poate petrece în mai multe moduri. Uneori apar fisuri și unele elemente ale construcției cedează, se distrug. Elementele rămase preiau uneori sarcina celor distruse și construcția în ansamblu rezistă. Dar alteori, această supraîncărcare duce și la distrugerea lor și a întregii construcții. Alteori, fără ca vreun element să se distrugă, construcția își modifică forma așa fel, încît interacțiunea părților sale e prejudiciată.

Vom spune că avem de-a face cu problema *rezistenței* și cea a *rigidității* corpului sub sarcină ; ambele depășesc principial cadrul mecanicii solidului rigid. Astfel apare necesară adoptarea unui model al corpului solid, care să îngăduie (și să descrie cantitativ) deplasările reciproce ale punctelor. Legătura dintre aceste deplasări, forțele interioare care le provoacă, și sarcina exterioară, trebuie să permită determinarea formei finale a corpului, precum și a forțelor ce iau naștere în masa lui.

Prin urmare, studiul echilibrului (sau mișcării) unui corp solid se va efectua în două etape. În prima etapă (de care nu ne ocupăm aici) vor fi determinate reacțiunile și poziția de echilibru sau legea de mișcare a corpului *privit ca rigid*. În a doua etapă, vor fi studiate (în termenii din § 2, convenabil precizați) *deplasările*, *deformațiile* și *tensiunile* ce apar pe diferite direcții și diferite elemente de suprafață.

Cadrul mecanicii solidului rigid poate fi depășit fie prin considerarea deformațiilor, fie prin considerarea forțelor interioare. Prima cale duce la o teorie pur *geometrică* a deformației ; cea de a doua, la o teorie *statică* a tensiunii.

Dar e limpede că legătura dintre parametrii geometrici, cei statici și cei ai acțiunii exterioare, trebuie să depindă și de proprietățile materialului, de „modul" în care corpul se opune solicitării. Teoria deformației și teoria tensiunii trebuie să fie independente de proprietățile materialului : ele trebuie să poată fi studiate în mod similar în teoria elasticității și, de exemplu, în mecanica fluidelor vîscoase. Dimpotrivă, teoria legăturii dintre deformații și tensiuni trebuie să aibă o bază fizică, experimentală — și tocmai ea trasează delimitări precise între diferitele discipline relative la mecanica mediilor deformabile. Cu alte cuvinte, obținem un domeniu sau altul, după cum alegem o lege *fizică* (ar fi mai corect de spus : *mecanică*) sau alta, pentru a exprima legătura între parametrii geometrici și cei statici ai problemei — efecte ale aceleiași acțiuni exterioare. Tocmai existența unei astfel de legături permite măsurarea forțelor interioare prin efectele lor, așadar, contrar celor ce se petrec în mecanica solidului rigid, permite determinarea atît a acestor forțe, cît și a deformațiilor.

Problema de rezolvat ar putea fi deci formulată astfel : *dat fiind un corp de configurație cunoscută, realizat din materiale cu proprietăți mecanice cunoscute și supus unei acțiuni exterioare de parametri* (forțe, legături, temperatură, cîmpuri electro-magnetice etc.) *cunoscuți ca funcții de punct și timp — să se determine forțele interioare și deplasările ca funcții de punct și timp.*

Extrema generalitate a unei astfel de formulări face deocamdată imposibilă obținerea unor rezultate suficient de generale și de precise totodată în acest cadru. Concretizînd însă ipotezele asupra comportării materialului sub sarcină ; neglijînd unul sau altul dintre factorii menționați ; alegînd una sau alta din formele posibile de legătură între termenii problemei — putem ajunge la diferite modele ale materiei adecuate studiului matematic al diferitelor categorii de medii deformabile. Această diversitate se reflectă în diversitatea de discipline în care mecanica mediului deformabil se divide : teoria elasticității, teoria plasticității, reologia, mecanica fluidelor, dinamica gazelor etc.

Ne mărginim la a indica aci cîteva titluri din uriașa bibliografie referitoare la domeniul teoriei plasticității, cel mai apropiat de domeniul care ne interesează direct : monografiile lui A. Freudenthal și H. Geiringer [1] (partea II) ; A. Iliușin [1] ; L. Kaccanov [1] ; A. Nadai [1] ; W. Prager și Ph. Hodge [1] ; articolele lui Ph. Hodge [1] ; W. Koiter [1] ; W. Olszak et al. [1] ; W. Prager [1].

Pentru domeniul încă mai vast al reologiei, vezi T. Alfrey [1] ; F. Eirich [1] ; A. Freudenthal și H. Geiringer [1] (partea I) ; M. Reiner [1].

Cu privire la problemele generale ale mecanicii mediilor continue deformabile, vezi P. Germain [1] ; W. Prager [2] ; L. Sedov [1], [2] ; și mai cu seamă C. Truesdell și W. Noll [1] și C. Truesdell și R. Toupin [1].

Pentru diferitele domenii ale mecanicii solidului, apropiate de teoria elasticității, vezi indicațiile din § 4.1. În fine, pentru unele din punctele de vedere permițînd aprecierea rezistenței și rigidității corpurilor solide, vezi finele § 4.3.

§ 4. MODELUL CORPULUI ELASTIC

a) Ipoteze fundamentale

O definiție exhaustivă a unui model al materiei ar permite să se construiască pe baze axiomatice disciplina corespunzătoare. Această problemă pusă pentru mecanică (și cunoscută sub numele de „a șasea problemă a lui Hilbert") e încă departe de a fi rezolvată, fie măcar și pentru unele cazuri particulare. Cu privire la unele încercări recente, vezi A. Eringen [1] și mai ales W. Noll [1]—[4]. Vezi de asemenea C. Truesdell și R. Toupin [1], § 293, unde se expun unele principii generale de respectat în construirea oricărei teorii mecanice : *compatibilitate* cu ecuțiile de conservare (a masei, a momentelor, a energiei etc.) ; *invarianță* în raport cu ale-

gerea coordonatelor; *izotropie* sau *anizotropie* (vezi mai jos); *formulare corectă*, aptă să conducă la teoreme de existență, unicitate și continuitate în raport cu datele; *invarianță dimensională*; *independență materială* (adică comportare a materialului independentă de observator); în fine, *echiprezență* a tuturor mărimilor menite să caracterizeze fenomenul. E vorba aici de o enumerare care nu e completă, îmbrățișînd totodată o categorie de corpuri mult mai largă decît cea care ne interesează. Vezi încă C. Truesdell și W. Noll [1], §§19, 19A, 26 și 43. Pentru aplicarea unor principii variaționale generale ale mecanicii, vezi O. Onicescu [1].

În cele ce urmează ne vom limita la a formula cîteva ipoteze de bază, menite să caracterizeze *modelul corpului elastic*.

a) **Ipoteza spațiului-timp newtonian:** *spațiul este euclidian (tridimensional), timpul este independent de coordonatele spațiale, legile lui Newton sînt valabile.* Această ipoteză situează mecanica mediilor continue deformabile în cadrul mecanicii „clasice".

b) **Ipoteza mediului continuu:** *orice domeniu elementar conține materie.* Acest punct de vedere își găsește justificare în faptul că dimensiunile corpurilor uzuale depășesc cu mult dimensiunile particulelor elementare. El se menține și pentru corpuri compuse din particule cu proprietăți diferite (microcristalele dintr-un aliaj, cimentul și pietrișul din beton) — cu condiția ca dimensiunile corpurilor să fie foarte mari față de cele ale componentelor.

Această ipoteză permite să privim toate mărimile ca *funcții de punct* în domeniul ocupat de corp, și nu ca funcții de poziția particulelor componente. Datorită ei, mecanica mediilor continui deformabile poate utiliza aparatul analizei clasice. Cu cît e mai mare atenția ce trebuie acordată proprietăților fizice propriu zise ale materialului (ca în anumite variante moderne ale teoriei plasticității, sau în anumite chestiuni de reologie), cu atît mai mult această ipoteză trebuie modificată sau chiar eliminată.

c) **Ipoteza rigidizării părților** (sau a **solidificării**): *un corp se află în echilibru dacă și numai dacă forțele ce acționează asupra fiecăreia din părțile sale formează un sistem static echivalent cu zero.* Această ipoteză permite să separăm (imaginar) o parte arbitrară a corpului, înlocuind acțiunea restului prin anumite forțe, și să determinăm aceste forțe astfel ca echilibrul corpului în ansamblu să rămînă intact. Întrucît această parte poate fi arbitrar de mică, sîntem conduși la a formula relațiile de echilibru ca relații *diferențiale*, valabile în orice punct al corpului.

d) **Ipoteza dependenței locale:** *forțele interioare (tensiunile) sînt funcții de poziție, de deformație, de temperatură etc., dar nu depind explicit de gradientul (derivatele spațiale) ale acestor mărimi.* Aceasta stabilește o legătură punctuală, *locală*, între parametrii statici și cei geometrici, excluzînd „acțiunea la distanță" și precizînd natura forțelor interioare ca forțe de coeziune intermoleculară.

Ipotezele a, b, c corespund unui cadru mai general şi abia ipoteza d introduce noţiuni specifice — rămînînd totuşi valabilă pentru *orice* mediu continuu şi deformabil. Pentru a defini corpul *elastic*, le adăugăm :

e) Ipoteza elasticităţii ideale : *există corespondenţă biunivocă între deformaţii şi tensiuni* (definite prin generalizări convenabile ale noţiunilor introduse în § 0.2). Aceasta caracterizează deci o anumită *stare* a materiei, stare în care cunoaşterea deformaţiilor sau cea a tensiunilor dau informaţii *echivalente*.

Această ipoteză implică caracterul *reversibil* al deformaţiei şi concordă cu înţelegerea curentă a noţiunii de corp „elastic" : corp care revine la starea sa iniţială odată cu anularea sarcinii. (Pentru corpuri aflate în zona plastică, ipoteza e trebuie înlocuită cu alte supoziţii.)

Cu aceasta, modelul corpului elastic e precizat. El este suficient de simplu pentru a permite tratarea cu mijloace matematice a problemelor de rezistenţă şi rigiditate pentru o cuprinzătoare categorie de corpuri. Desigur, acesta este numai unul din punctele de vedere posibile : aşa cum se vorbeşte despre „mecanica fizică" sau despre „mecanica tehnică" în oarecare opoziţie cu „mecanica raţională", tot astfel se poate vorbi despre o *teorie matematică a elasticităţii*, în oarecare opoziţie cu o teorie fizică sau tehnică a aceluiaşi subiect.

Din acest punct de vedere, teoria elasticităţii poate fi privită ca o ramură a fizicii matematice (nume destul de impropriu de altfel) : una din cele mai simple din punctul de vedere al modelului adoptat, dar şi din cele mai interesante din punct de vedere teoretic, şi mai utile în aplicaţii.

Trebuie să mai arătăm că, deşi deformaţia elastică reprezintă numai o fracţiune a deformaţiei elasto-plastice posibile, în schimb sarcinile în limita cărora corpurile rămîn în zona elastică sînt de obicei foarte mari. O teorie bazată pe ipoteza e acoperă astfel un vast cîmp de aplicaţii. Pe de altă parte, studiul zonei plastice permite utilizarea unor mari rezerve de rezistenţă (importante mai ales dacă problemele de rigiditate trec pe al doilea plan) şi deschide posibilitatea de a descrie procese în care însuşi scopul este obţinerea de modificări de configuraţie definitive.

Desigur, la fiecare etapă dată de dezvoltare a metodelor matematice şi experimentale, orice complicare a aspectului fizic al unei probleme obligă la simplificări compensatoare ale aspectelor geometrice şi statice : teoria plasticităţii înlocuieşte ipoteza e prin alte presupuneri, uneori mai complicate, asupra mecanismului intern al fenomenului, dar ea trebuie atunci să-şi limiteze analiza la configuraţii geometrice şi sarcini de natură mai simplă.

Teoria elasticităţii şi teoria plasticităţii sînt egal necesare. (Exemplu : organele unui laminor trebuie calculate ţinînd seama de necesitatea imperioasă de a nu se depăşi zona elastică — în timp ce procesul de transformare al semifabricatului în produs finit nici nu poate fi măcar imaginat în afara zonei plastice. A „alege" între cele două teorii e un nonsens : aceasta nu e o problemă de gust sau de modă, ci de exactă adaptare a teoriei la comportarea reală a corpului solid.)

b) Ipoteze simplificatoare

Modelul prezentat conduce în genere la probleme matematice de o extremă dificultate. Adesea însă, se pot adăuga celor cinci ipoteze de mai sus, încă cinci ipoteze care, deşi particularizează mai departe cadrul cercetării, permit totuşi cuprinderea a numeroase probleme importante. Acestea sînt :

f) **Ipoteza hiperelasticităţii** : *lucrul mecanic necesar pentru a deforma corpul depinde numai de starea sa iniţială şi de cea finală.*

g) **Ipoteza liniarităţii geometrice** : *deformaţiile sînt expresii diferenţiale liniare de deplasările reciproce ale particulelor.*

h) **Ipoteza liniarităţii fizice** : *tensiunile sînt funcţii liniare de deformaţii.*

i) **Ipoteza izotropiei** : *proprietăţile mecanice ale materialului nu variază de la o direcţie la alta în jurul oricărui punct.*

j) **Ipoteza omogenităţii** : *proprietăţile mecanice ale materialului nu variază de la un punct la altul în interiorul corpului.*

Caracterul acestor ipoteze este destul de eterogen : ipotezele **f**, **i**, **j** depind de material şi de proces, în timp ce **g**, **h** sînt presupuneri simplificatoare privind mai ales metoda de studiu (vezi finele § 4.1). Mai notăm că ele nu sînt independente : de exemplu, ipoteza **f** este o consecinţă a ipotezelor **a**—**i** (chiar dacă **j** nu e satisfăcută).

Ansamblul ipotezelor **a**—**j** conduce la *teoria elasticităţii liniare a corpurilor izotrope şi omogene.* Problema de mecanică se reduce la studiul unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de primul ordin, liniare şi cu coeficienţi constanţi. Studiul acestora reprezintă o teorie astăzi aproape tot atît de bine pusă la punct ca teoria potenţialului sau teoria ecuaţiei propagării undelor — cu care de altfel se află în strînsă legătură. Acest fapt deschide drumul spre utilizarea mijloacelor teoriei funcţiilor de o variabilă complexă, a teoriei ecuaţiilor integrale, a analizei funcţionale etc.

Renunţînd la una sau alta din ipotezele **g**—**j**, se obţin teoriile elasticităţii neliniare, anizotrope, a corpurilor neomogene etc. Aci rămîn valabile cele spuse mai sus cu privire la raporturile cu teoria plasticităţii : orice cîştig în generalitatea ipotezelor fizice sau matematice este însoţit de o pierdere de generalitate referitoare la configuraţia sau solicitarea corpului ce poate fi studiat. Şi cel mai adesea, tocmai soluţiile teoriei „clasice'' dau sugestii şi metodele necesare pentru abordarea acestor domenii încă foarte dificile.

Astfel, chiar fără a recurge la modele mai perfecționate decît cel al corpului elastic, ne lovim de mari dificultăți ; și chiar și în cadrul teoriei liniare a corpurilor omogene și izotrope chestiunea construirii efective a soluțiilor rămîne adesea deschisă, și sîntem încă departe de a putea da răspuns tuturor întrebărilor pe care tehnica contemporană le pune.

Acestea nu sînt motive de alarmă. Căci, după cum spunea Hilbert : *„Atîta timp cît o ramură a științei oferă surplus de probleme, ea este viabilă ; sărăcia de probleme înseamnă moartea, sau încetarea dezvoltării sale independente"*.

CAPITOLUL 1

STAREA DE DEPLASARE ŞI STAREA DE DEFORMAŢIE A MEDIULUI CONTINUU

§ 1. TEORIA GEOMETRICĂ A MEDIULUI CONTINUU

a) Notaţii

Vom considera corpuri ce ocupă în spaţiul *euclidian* $\mathcal{E}_3$ domenii $\mathcal{V}$, de frontiere $\mathcal{S}$. Orice domeniu va fi raportat la un sistem de coordonate carteziene ortogonale $Ox_1x_2x_3$ (sau $Oxyz$) *fixe*. Versorii axelor se vor nota $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ (sau $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$). Raza vectoare a oricărui punct, *ca şi punctul însuşi*, se vor nota cu acelaşi simbol : $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\xi}$ etc. Orice funcţie de punctul $\boldsymbol{x}$ se va nota $f(\boldsymbol{x})$, sau $f(x_1, x_2, x_3)$ sau încă $f(x, y, z)$ sau în fine $f(x_i)$[1]).

Unele notaţii, proprietăţi şi relaţii referitoare la mulţimile de puncte într-un spaţiu euclidian (cu referire specială la planul $\mathcal{E}_2$ şi la dreapta $\mathcal{E}_1$, dar uşor generalizabile la $\mathcal{E}_3$) sînt date în §§ A.1 şi A.3. Vom sublinia aici numai unele proprietăţi de însemnătate imediată.

Pentru a scurta scrierea formulelor, derivatele parţiale se vor nota

$$\partial F/\partial x_i \equiv F_{,i}. \tag{1}$$

Indicii 1, 2, 3 vor fi utilizaţi chiar dacă variabilele vor fi scrise x,y,z. În coordonate polare vom folosi notaţiile $F_{,R}$; $F_{,\theta}$; $F_{,\varphi}$. Pentru funcţii de două variabile complexe conjugate $\mathfrak{z} = x_1 + \mathrm{i}x_2$, $\bar{\mathfrak{z}} = x_1 - \mathrm{i}x_2$, derivatele se vor scrie sub forma $F_{,\mathfrak{z}}$ şi $F_{,\bar{\mathfrak{z}}}$.

Semnul „sumă" în raport cu indici literali care se repetă (indici muţi) va fi în general omis : vom scrie deci

$$A_1B_1 + \ldots + A_nB_n \equiv A_jB_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Dacă un indice care se repetă *nu este* indice de sumare, aceasta nu riscă să producă confuzii în eventuale egalităţi, dacă el apare ca indice simplu în celălalt membru al egalităţii. Dacă totuşi dubiul e posibil, vom face uz de semnul de avertizare (!). Astfel, x_j^2 va fi suma $\Sigma\, x_j x_j$, în timp ce x_j^2 (!) va fi patratul variabilei x_j. Pentru a evita orice ambiguitate, ne vom servi totuşi uneori şi de semnul Σ.

Parantezele drepte [ ] vor avea utilizări multiple. În primul rînd, ele vor fi folosite, se înţelege, ca paranteze. Vor mai fi folosite pentru a indica intervalele închise $[a, b]$ sau deschise $]a, b[$; dimensiunea unei

[1]) Orice exagerări puriste în astfel de chestiuni duc pînă la urmă la notaţii greoaie

mărimi fizice : $[\sigma]=FL^{-2}$; variaţia unei funcţii între două puncte : $[\varphi]_{x^0}^{x^1} = \varphi(x^1) - \varphi(x^0)$; variaţia unei funcţii pe o curbă închisă : $[\varphi]_{\mathscr{C}}$. Ele vor servi de asemenea pentru scrierea matricelor : $[a_{ij}]$, şi a determinanţilor : Det $[a_{ij}]$. Desigur, nici o confuzie nu e posibilă, ţinînd seama de fiecare dată de context.

Pentru scopurile noastre, e inutil să considerăm domenii oarecari în $\mathscr{E}_3$. Ne vom mărgini la domenii definite de frontierele lor ; mai departe, vom considera numai frontiere ce permit utilizarea formulelor integrale de tip Gauss, Green, Stokes etc. ; mai particular, ne vom limita la frontiere pentru care se pot formula şi rezolva problemele fundamentale ale teoriei potenţialului.

Pentru acest motiv, vom considera numai frontiere $\mathscr{S}$, compuse dintr-un număr finit de părţi *posedînd o arie* (M. Nicolescu et al. [1], vol. 2, cap. 16). Pentru aceasta e suficient ca fiecare astfel de parte să admită o reprezentare parametrică

$$x_i = x_i\,(\alpha, \beta), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

unde punctul (α, β) descrie un domeniu măsurabil Jordan, iar funcţiile (3) posedă derivate parţiale de primul ordin integrabile în acest domeniu (ceea ce e asigurat dinainte dacă ele sînt de clasă C^1).

Dacă $\mathscr{S}$ posedă arie şi nu conţine linii multiple, formulele lui Gauss, Green, Stokes sînt valabile.

Mai departe, să presupunem că $\mathscr{S}$ e alcătuită dintr-un număr finit de *suprafeţe Liapunov* — a căror definiţie rezultă din cea din § A.3, pag. 700, schimbînd cuvintele „curbă" şi „cerc", cu „suprafaţă" şi „sferă". Pentru detalii, vezi N. Günther [1], § 1.1 ; A. Tihonov şi A. Samarskii [1], § 4.5, punctul 7. Orice suprafaţă Liapunov posedă arie. Printr-o schimbare de coordonate, ecuaţia unei suprafeţe Liapunov se poate scrie, în vecinătatea oricărui punct al ei, sub forma

$$x_3 = f\,(x_1, x_2). \tag{4}$$

Dacă $f(x_1, x_2) \in C^2$, condiţiile lui Liapunov sînt verificate ; suprafeţele Liapunov pot fi deci privite ca generalizări ale suprafeţelor cu curbură continuă.

Pentru domenii mărginite de suprafeţe Liapunov, problemele lui Dirichlet, Neumann şi mixtă (pentru ecuaţia lui Laplace) au soluţie ; această soluţie e unică şi stabilă pentru valori la limită suficient de regulate.

Vom considera numai corpuri ce ocupă *domenii* (mulţimi conexe şi deschise de puncte în $\mathscr{E}_3$). Dacă $\mathscr{S}$ este o suprafaţă închisă şi orientabilă, vom nota cu $\mathscr{V}^+$ domeniul *finit* mărginit de $\mathscr{S}$, şi cu $\mathscr{V}^-$, domeniul *infinit* avînd aceeaşi frontieră. Dacă $\mathscr{S}$ e alcătuită din mai multe suprafeţe închise şi orientabile, care definesc un domeniu (de exemplu o suprafaţă $\mathscr{S}_0$ care conţine în interior mai multe suprafeţe $\mathscr{S}_j$ exterioare una celeilalte, şi fără puncte comune), acest domeniu va fi notat $\mathscr{V}^i$ (interior) ; complementarul lui $\mathscr{V}^i + \mathscr{S}$ faţă de $\mathscr{E}_3$ e o mulţime neconexă, care se va nota $\mathscr{V}^e$ (exterior).

Dacă o proprietate e adevărată în $\mathscr{V}$, ea nu e cu necesitate valabilă și pe $\mathscr{S}$. Dacă o anumită proprietate e valabilă atît în $\mathscr{V}$, cît și într-o porțiune $\mathscr{S}'\subseteq\mathscr{S}$, trebuie specificat că ea e valabilă în $\mathscr{V}+\mathscr{S}'$.

b) Continuitatea funcțiilor

Să considerăm o funcție f definită în anumite puncte din $\mathscr{V}$. Dacă punctul $\boldsymbol{x}$ aparține lui $\mathscr{V}$ (ceea ce se scrie $\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}$); dacă $f(\boldsymbol{x})$ are sens; și dacă pentru orice șir de puncte $\boldsymbol{x}_n$ ce tind către $\boldsymbol{x}$ (vezi § A.3, pag 693) și pentru care $f(\boldsymbol{x}_n)$ are sens, avem

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim f(\boldsymbol{x}_n), \tag{5}$$

atunci se spune că f este *continuă* în $\boldsymbol{x}$. (Vezi și § A.1).

Dacă funcția f nu este definită în $\boldsymbol{x}$, dar limita din (5) există și e unică, oricare ar fi șirul $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}$, relația (5) constituie *definiția* funcției f extinse în punctul $\boldsymbol{x}$; spunem că f poate fi *prelungită prin continuitate* în $\boldsymbol{x}$ (pe scurt: f este *prelungibilă* în $\boldsymbol{x}$).

Continuitatea pe $\mathscr{S}$ se definește similar.

Dacă (5) e valabil pentru orice $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n\in\mathscr{V}+\mathscr{S}$, se spune că $f(\boldsymbol{x})$ este continuă în *domeniul închis* $\overline{\mathscr{V}}=\mathscr{V}+\mathscr{S}$.

Pentru o funcție $f(\boldsymbol{x})$ definită în $\mathscr{V}$, se poate întîmpla ca $\lim f(\boldsymbol{x})$ pentru $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{S}$, să existe și să fie unic determinată (oricare ar fi drumul interior pe care $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$). În acest caz, se ia *prin definiție*

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \lim f(\boldsymbol{x}),\quad \text{pentru}\quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{V},\ \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{S}, \tag{6}$$

și se spune că $f(\boldsymbol{x}_0)$ este *valoarea la limită* a lui $f(\boldsymbol{x})$ în $\boldsymbol{x}_0$.

Dacă $f(\boldsymbol{x})$ e definită atît în $\mathscr{V}^+$, cît și în $\mathscr{V}^-$, vom scrie

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f_+(\boldsymbol{x}) & \text{pentru} \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{V}^+, \\ f_-(\boldsymbol{x}) & \text{pentru} \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{V}^-, \end{cases} \tag{7}$$

dacă o astfel de distincție e necesară. (Dacă e cazul, indicii $+$, $-$ trebuie înlocuiți cu i, e.)

Mai departe, vom nota

$$f^+(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{S}} f_+(\boldsymbol{x}), \qquad f^-(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{S}} f_-(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

în punctele în care aceste limite (fiecare din ele unică, da r nu neapăra egale între ele!) există. Dacă astfel de limite există pentru orice $\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{S}'$, se spune că f e prelungibilă pe porțiunea $\mathscr{S}'$ a frontierei (eventual pe întreaga frontieră, dacă $\mathscr{S}'=\mathscr{S}$) *dinspre* $\mathscr{V}^+$, respectiv dinspre $\mathscr{V}^-$.

Uneori, funcția $f(\boldsymbol{x}_0)$ poate fi definită pentru $\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{S}$ printr-un algoritm diferit de cel din (7), (8). Dar prin *valoare la limită* înțelegem întotdeauna valoarea obținută prin prelungirea prin continuitate (vezi și §§ 7.2 și A.11).

c) *Medii continue*

Renunţînd la modelul atomistic al materiei, vom presupune că aceasta e distribuită *continuu* în $\mathscr{V}$, ceea ce revine la a spune că orice punct geometric din $\mathscr{V}$ este un punct material.

Să considerăm un punct $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ şi un domeniu $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$, astfel încît $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}'$. Notînd volumul lui $\mathscr{V}'$ cu $\operatorname{mes}(\mathscr{V}')$, diametrul său (vezi (A.3.3)) cu $d(\mathscr{V}')$, şi cantitatea de materie (masa) conţinută în $\mathscr{V}'$ cu $\mathrm{m}(\mathscr{V}')$, definim *densitatea* în $\boldsymbol{x}$ prin relaţia

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \lim \frac{\mathrm{m}(\mathscr{V}')}{\operatorname{mes}(\mathscr{V}')}, \quad \text{pentru } \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}', \quad d(\mathscr{V}') \to 0, \tag{9}$$

pentru toate domeniile $\mathscr{V}'$ posibile. (Analog se defineşte *greutatea specifică* în $\boldsymbol{x}$.) Ipoteza mediului continuu revine la a spune că $\rho(\boldsymbol{x})$ *există, e pozitivă şi mărginită în* $\mathscr{V}$.

Domeniul $\mathscr{V}$ care conţine materie distribuită în acest mod se numeşte *mediu* sau *corp continuu*. Vom nota cu $\mathscr{V}$ atît domeniul, cît şi corpul însuşi.

Dacă $\rho(\boldsymbol{x}) = \text{const.}$, atunci $\mathscr{V}$ e *omogen* (din punctul de vedere al densităţii).

Definind analog densitatea superficială sau liniară, putem considera corpuri continue bi- sau unidimensionale (suprafeţe sau curbe materializate).

Proprietăţile fizice, chimice etc. ale materiei din $\mathscr{V}$ ne vor fi complet indiferente în capitolul de faţă.

d) *Deplasări şi deformaţii*

Fie dat un corp $\mathscr{V}$ nesupus nici unei acţiuni exterioare. Această stare (irealizabilă practic, şi concepută numai ca stare ideală) se numeşte *stare naturală*. Dacă dorim să subliniem că în starea naturală anumiţi parametri se anulează, o vom numi încă *stare nulă* în raport cu ei.

Să presupunem acum că asupra corpului acţionează un sistem de forţe şi de legături geometrice. Materia din $\mathscr{V}$ trece în altă poziţie din spaţiu, pe care o vom nota cu $\mathscr{V}^*$, de frontieră $\mathscr{S}^*$. (Elementele păstrează notaţiile iniţiale, prevăzute cu un asterisc.)

Pentru ca $\mathscr{V}$ să se afle în echilibru ca corp deformabil, trebuie mai întîi ca sistemul forţelor aplicate (inclusiv reacţiunile produse de legături) să fie static echivalent cu zero. (Dacă $\mathscr{V}$ nu este mărginit, această condiţie nu e necesară.)

În cele ce urmează, ne vom limita la cazul trecerii corpului $\mathscr{V}$ de la o poziţie de echilibru, la o alta. Poziţia fiecărui punct material din $\mathscr{V}$, raportată la coordonatele fixe, suferă deci modificări : acest proces se numeşte *deplasare*.

Distanţele reciproce dintre puncte, ca şi unghiurile dintre elementele liniare, variază de asemenea : acest proces se numeşte *deformaţie*.

În ansamblu, trecerea de la starea $\mathscr{V}$ la $\mathscr{V}^*$ se va numi şi ea *deformaţie* („modificare a formei"). Starea naturală se va numi uneori stare de deformare nulă sau stare de deplasare nulă — după caz.

Vom părăsi deci cadrul mecanicii solidului rigid pe o cale pur geometrică, studiind transformarea domeniului $\mathscr{V}$ în $\mathscr{V}^*$ şi făcînd abstracţie de sarcini, de legături şi de proprietăţile materiei din $\mathscr{V}$.

Pentru o analiză modernă şi detaliată a chestiunii, vezi C. Truesdell şi R. Toupin [1], partea B, I.

§ 2. STAREA DE DEPLASARE

a) Sisteme de coordonate

Pentru a cerceta comportarea unei vecinătăţi a unui punct $\boldsymbol{x}$, trebuie să considerăm un al doilea punct $\boldsymbol{y}$, apropiat de $\boldsymbol{x}$, şi să examinăm poziţiile ocupate de particulele aflate iniţial în $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$.

Toate mărimile se raportează la sistemul de coordonate *fix*. Acest mod de a raţiona, în care se urmăreşte deci comportarea *elementelor materiale* antrenate de deformaţie, în timp ce sistemul de coordonate rămîne fix, este atribuit lui Lagrange — cu toate că în fapt apare încă la Euler.

Punctul de vedere opus, caracterizat prin studierea a ceea ce se petrece în vecinătatea unui *punct geometric* fix, independent de punctul material care coincide la un moment dat cu el, aparţine de asemenea lui Euler. (Vezi P. Germain [1], § 3.1 ; C. Iacob [5], § § 4.1 şi 4.4 ; I. Sokolnikoff [2], § 1.11.) Distincţia între cele două puncte de vedere devine esenţială atunci cînd deplasările sînt mari : în mecanica fluidelor, teoria neliniară a elasticităţii etc. (Vezi de ex. I. Goldenblatt [1]; W. Prager [2]; L. Sedov [2].)

Vom face sistematic uz de punctul de vedere asociat numelui lui Lagrange, raportînd deci elementele *materiale* la coordonatele *iniţiale* (ale corpului nedeformat).

b) Vectorul deplasare

Fie date două puncte $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}$, şi fie cunoscută legea care stabileşte corespondenţa dintre punctele domeniilor $\mathscr{V}$ şi $\mathscr{V}^*$:

$$x_i^* = f_i(\boldsymbol{x}), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Dacă deplasările particulelor sînt mici (vom da mai tîrziu precizări în acest sens), relaţiile (1) se mai pot scrie sub forma

$$x_i^* = x_i + u_i(\boldsymbol{x}), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

unde u_i au valori mici, sau încă

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

(În loc de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^*$ de la noi, se întîlneşte frecvent notaţia $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$).

Vectorul $\boldsymbol{u}$ (de componente u_1, u_2, u_3 sau încă u, v, w) se numeşte *vectorul deplasare*. Dimensiunea sa este cea a unei lungimi: $[\boldsymbol{u}]=\mathrm{L}$. Deplasările se măsoară în centimetri (uneori în milimetri).

Proprietăţile funcţiilor f_i şi u_i depind de *felul* în care presupunem că se realizează trecerea de la $\mathscr{V}$ la $\mathscr{V}^*$. Dacă ea se produce fără apariţie de fisuri sau goluri, rezultă că funcţiile f_i trebuie să fie continue. Dacă această trecere e reversibilă (ipoteza elasticităţii ideale), transformarea (1) trebuie să posede o inversă, de asemenea continuă. Prin urmare, trecerea de la starea $\mathscr{V}$ la starea $\mathscr{V}^*$ se realizează printr-o transformare *biunivocă* şi *bicontinuă*.

Variaţia de volum e caracterizată de jacobianul transformării (1). Pentru ca o porţiune de volum nenul din $\mathscr{V}$ să treacă într-o porţiune de volum nenul în $\mathscr{V}^*$ şi reciproc, e necesar şi suficient ca $f_i \in C^1(\mathscr{V})$ şi jacobianul transformării (1) să fie mărginit şi nenul. Transformarea (1) trebuie să fie deci o transformare *regulată* (vezi de ex. M. Nicolescu et al. [1], § 8.7, pct. 3).

c) Transformarea componentelor vectorilor

Conform notaţiilor de mai sus, punctele $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ trec în $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, respectiv $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})$, iar vectorul $\boldsymbol{\xi}$ ce le uneşte devine $\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi}$. Evident, avem $\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\xi}^*$, şi deci

$$\xi_i^* = \xi_i + u_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}) - u_i(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

sau încă

$$\delta\xi_i = u_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}) - u\,(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

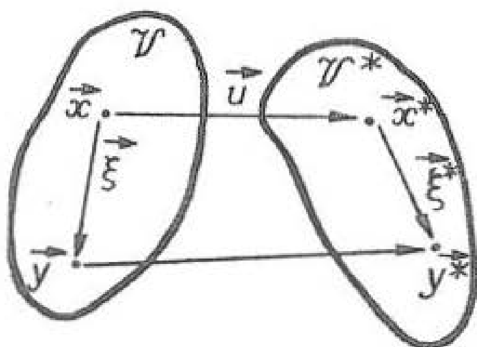


Fig. 1.2.1.

Dacă $u_i \in C^2(\mathscr{V})$, atunci se poate scrie formula lui Taylor cu doi termeni şi rest şi deci (5) devine

$$\delta\xi_i = u_{i,j}\,\xi_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{6}$$

unde derivatele sînt calculate în $\boldsymbol{x}$. (Restul tinde la zero odată cu ξ_i^2 şi deci (6) poate fi privită ca formulă *exactă* într-o vecinătate suficient de mică a punctului $\boldsymbol{x}$.)

Componentele elementului liniar $\boldsymbol{\xi}$ devin după deformaţie

$$\xi_i^* = (\delta_{ij} + u_{i,j})\,\xi_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{7}$$

unde δ_{ij} sînt componentele tensorului lui Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{pentru} \quad i = j, \qquad \delta_{ij} = 0 \quad \text{pentru} \quad i \neq j. \tag{8}$$

În felul acesta, am obținut relații *liniare* între componentele *înainte* de deformație și cele *după* deformație ale elementului liniar $\boldsymbol{\xi}$. Pentru ca ele să fie valabile, trebuie numai ca ξ_i să fie suficient de mici. Sub formă dezvoltată, relațiile (7) se scriu

$$\begin{aligned} \xi_1^* &= (1 + u_{1,1})\xi_1 + u_{1,2}\,\xi_2 + u_{1,3}\,\xi_3, \\ \xi_2^* &= u_{2,1}\,\xi_1 + (1 + u_{2,2})\xi_2 + u_{2,3}\,\xi_3, \\ \xi_3^* &= u_{3,1}\,\xi_1 + u_{3,2}\,\xi_2 + (1 + u_{3,3})\xi_3. \end{aligned} \tag{9}$$

§ 3. DEFORMAȚIA OMOGENĂ

Să alegem pentru (2.1) o formă cît mai simplă: transformarea afină

$$x_i^* = a_{ij}x_j + a_i, \tag{1}$$

(a_{ij}, a_i — constante). Din (2.2) obținem

$$u_i = x_i^* - x_i = (a_{ij} - \delta_{ij})\, x_j + a_i. \tag{2}$$

Componentele u_i sînt deci și ele funcții liniare. Pe de altă parte, dacă

$$u_i = \alpha_{ij} x_j + a_i, \tag{3}$$

(α_{ij}, a_i — constante), atunci

$$x_i^* = x_i + u_i = (\delta_{ij} + \alpha_{ij})\, x_j + a_i, \tag{4}$$

unde, pentru a reveni la (1), e suficient să notăm $\delta_{ij} + \alpha_{ij} = a_{ij}$.

Dacă determinantul $\mathrm{Det}[a_{ij}]$ nu e nul, inversa transformării (1) există și este de asemenea o transformare afină.

Proprietățile cunoscute ale acestor transformări arată că, în urma deformației (1), un plan se transformă într-un plan; o dreaptă (intersecție a două plane) — într-o dreaptă; un segment — într-un segment; un vector — într-un vector.

În particular, componentele unui vector definit de $\xi_i = x_i - x_i^0$ devin după deformație

$$\xi_i^* = (\delta_{ij} + \alpha_{ij})\xi_j. \tag{5}$$

Întrucît aceste formule sînt liniare și omogene, ele conservă egalitatea și paralelismul vectorilor. Coeficienții fiind constanți, două poligoane (sau poliedre) egale și cu laturile (fețele) respectiv paralele, rămîn după deformație egale și cu laturile (fețele) paralele. Două domenii congruente obținute printr-un proces de trecere la limită din două astfel de poligoane sau poliedre rămîn și după deformație congruente. Aceasta înseamnă că

toate părţile corpului se deformează la fel. Din acest motiv, deformaţia definită de (1) sau (3) poartă numele de *deformaţie omogenă*.

Formulele (2.7) sînt de acelaşi tip cu (5), derivatele parţiale $u_{i,j}$ avînd rolul constantelor α_{ij}. Prin urmare, *orice* deformaţie este, în primă aproximaţie, o deformaţie local omogenă, în vecinătatea punctului considerat.

Se ştie că transformările afine formează grup. Pentru a compune două transformări afine

$$x_i^* = (\delta_{ij} + \alpha_{ij})\, x_j + a_i, \quad x_k^* = (\delta_{ki} + \beta_{ki})\, x_i + b_k, \tag{6}$$

introducem pe cea dintîi în cea de a doua şi obţinem

$$x_k^{**} = (\delta_{kj} + \alpha_{kj} + \beta_{kj} + \alpha_{ij}\beta_{ki})\, x_j + a_k + b_k + \beta_{ki} a_i. \tag{7}$$

Acest grup nu este deci comutativ. Dacă însă parametrii α_{ij}, β_{ij}, a_i, b_i sînt *suficient de mici* pentru ca produse de astfel de cantităţi să fie neglijabile faţă de termenii liniari, atunci (7) se reduce la

$$x_k^{**} = (\delta_{kj} + \alpha_{kj} + \beta_{kj})\, x_j + a_k + b_k. \tag{8}$$

Astfel de transformări se numesc *transformări afine infinitezimale*: ele formează un grup comutativ, iar constantele ce caracterizează transformarea-produs (8) se obţin prin adunarea constantelor corespunzătoare transformărilor-factori (6). Procesul caracterizat de o astfel de transformare se numeşte *deformaţie omogenă infinitezimală*; cuvîntul „infinitezimal" va fi peste tot înţeles numai în acest sens.

Aplicarea succesivă a două sau mai multe astfel de deformaţii duce la acelaşi rezultat, independent de ordinea în care ele se produc; aceasta constituie *principiul superpoziţiei* deformaţiilor. (Vezi mai jos § 4.2, pag. 129, pentru chestiunea mai generală a *superpoziţiei efectelor*.)

§ 4. DEFORMAŢIA PURĂ INFINITEZIMALĂ ŞI DEPLASAREA RIGIDĂ INFINITEZIMALĂ

a) Deplasarea rigidă

Din relaţiile (2.6) şi (3.3) rezultă imediat formula

$$\delta \xi_i \equiv \xi_i^* - \xi_i = \alpha_{ij} \xi_j. \tag{1}$$

Variaţia $\delta\boldsymbol{\xi}$ poate fi privită ca alcătuită din două părţi: una datorată unei deplasări rigide a vecinătăţii lui $\boldsymbol{x}$ în ansamblu, şi una datorată variaţiei distanţelor reciproce dintre punctele din această vecinătate. Avem evident

$$\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi}, \quad |\boldsymbol{\xi}^*|^2 = \boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{\xi}^* = |\boldsymbol{\xi}|^2 + 2\boldsymbol{\xi} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} + |\delta\boldsymbol{\xi}|^2,$$

astfel că variaţia lungimii vectorului $\boldsymbol{\xi}$ e caracterizată de mărimea

$$\delta|\boldsymbol{\xi}|^2 = |\boldsymbol{\xi}^*|^2 - |\boldsymbol{\xi}|^2 = 2\boldsymbol{\xi} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} + |\delta\boldsymbol{\xi}|^2. \tag{2}$$

Dacă deformaţia este infinitezimală, termenul patratic din (2) este neglijabil (vezi formulele (1)).

Dacă avem de a face cu o deplasare rigidă infinitezimală, lungimea vectorilor nu variază, şi din (2) obţinem

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\delta\boldsymbol{\xi} = \xi_i\,\delta\xi_i = \alpha_{ij}\xi_i\xi_j = 0, \tag{3}$$

ceea ce echivalează cu condiţia de antisimetrie

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Să notăm componentele părţii antisimetrice ale matricii α_{ij} cu

$$p_1 = \frac{1}{2}(\alpha_{23} - \alpha_{32}), \quad p_2 = \frac{1}{2}(\alpha_{31} - \alpha_{13}), \quad p_3 = \frac{1}{2}(\alpha_{12} - \alpha_{21}). \tag{5}$$

Ţinînd seama de relaţiile (4), formulele (1) devin acum

$$\delta\xi_1 = p_3\xi_2 - p_2\xi_3, \quad \delta\xi_2 = -p_3\xi_1 + p_1\xi_3, \quad \delta\xi_3 = p_2\xi_1 - p_1\xi_2, \tag{6}$$

sau încă, notînd cu $\boldsymbol{p}$ vectorul de componente (p_1, p_2, p_3)[2]:

$$\delta\boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\xi}. \tag{7}$$

Dacă $\boldsymbol{\xi}$ este vectorul ce duce de la $\boldsymbol{x}_0$ la $\boldsymbol{x}$, aşadar $\xi_i = x_i - x_i^0$, urmează evident că $\delta x_i = \delta x_i^0 + \delta\xi_i$; notînd aci $\delta x_i^0 = a_i$, şi $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ obţinem din (7):

$$\delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0). \tag{8}$$

Prin urmare, dacă matricea α_{ij} este antisimetrică, deplasarea punctului $\boldsymbol{x}$ se reduce la o translaţie (caracterizată de $\boldsymbol{a}$) şi o rotaţie (caracterizată de $-\boldsymbol{p}$), aşadar la o *deplasare rigidă infinitezimală a domeniului $\mathscr{V}$ în ansamblul său*, aceeaşi în orice punct, întrucît $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$ sînt vectori constanţi.

b) *Variaţia distanţelor*

Să presupunem acum că transformarea (3.5) e definită de o matrice de componente infinitezimale *oarecare* α_{ij}. Să descompunem această matrice în suma componentei sale simetrice cu cea antisimetrică:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \tag{9}$$

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} - \alpha_{ji}), \tag{10}$$

---

[2]) Pentru ceea ce am notat aci cu p_i, se folosesc frecvent notaţiile $-p_i$, ceea ce conduce la apariţia semnului + în formule ca (7), (8), (5.7), (5.13.1) etc. Preferăm notaţiile alese, dată fiind semnificaţia acestor mărimi aşa cum au fost ele introduse în (5); vezi şi mai departe (9)–(11).

astfel încît

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \tag{11}$$

Întrucît deformaţia este infinitezimală, putem face uz de principiul superpoziţiei şi afirma că matricea ω_{ij} din (10) descrie o roto-translaţie rigidă infinitezimală a domeniului $\mathscr{V}$. Evident, relaţiile (3)—(8) îşi pierd acum valabilitatea.

Introducînd (11) în (1), obţinem

$$\delta\xi_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\xi_j. \tag{12}$$

Dacă deformaţia e infinitezimală, putem neglija termenii patratici şi vom căpăta — în loc de (2), (3) — expresia

$$\delta\,|\,\boldsymbol{\xi}\,|^2 = 2\,\varepsilon_{ij}\,\xi_i\,\xi_j, \tag{13}$$

(unde am ţinut seama că $\omega_{ij}\,\xi_i\,\xi_j = 0$). Din (5) şi (10) deducem acum

$$p_1 = \omega_{23}, \quad p_2 = \omega_{31}, \quad p_3 = \omega_{12}. \tag{14}$$

Prin urmare, cele 6 componente ale părţii simetrice a matricii α_{ij} caracterizează variaţia distanţelor, iar cele 3 componente ale părţii sale antisimetrice, rotaţia rigidă.

c) Matricea deformaţie

Pentru a stabili semnificaţia mărimilor ε_{ij}, să calculăm alungirea relativă a unui vector oarecare $\boldsymbol{\xi}$. Vom nota cu $\boldsymbol{m}$ versorul

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\xi}\,/\,|\,\boldsymbol{\xi}\,|, \tag{15}$$

ale cărui componente m_1, m_2, m_3 sînt cosinuşii directori ai lui $\boldsymbol{\xi}$.

Cantitatea ce ne interesează este deci

$$\varepsilon = \delta\,|\,\boldsymbol{\xi}\,|/|\boldsymbol{\xi}\,| = (\,|\boldsymbol{\xi}^*| - |\boldsymbol{\xi}\,|)/|\,\boldsymbol{\xi}\,|. \tag{16}$$

Ea poate fi pozitivă sau negativă (alungire sau scurtare). Obţinem uşor

$$|\,\boldsymbol{\xi}^*|^2 - |\boldsymbol{\xi}\,|^2 = (\,|\boldsymbol{\xi}^*| - |\,\boldsymbol{\xi}\,|)(\,|\boldsymbol{\xi}^*| + |\boldsymbol{\xi}\,|) = \varepsilon\,|\,\boldsymbol{\xi}\,|\,(\varepsilon\,|\boldsymbol{\xi}\,| + 2\,|\,\boldsymbol{\xi}\,|)$$

sau încă, ţinînd seama de (13) şi (15) :

$$\varepsilon_m\left(1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_m\right) = \varepsilon_{ij}m_i m_j, \tag{17}$$

unde notaţia ε_m arată faptul că alungirea relativă depinde de $\boldsymbol{m}$ şi nu de $|\,\boldsymbol{\xi}\,|$.

Întrucît deformaţia este infinitezimală, termenul în ε_m^2 trebuie neglijat. Dar întrucît formula (17) rămîne valabilă şi într-un caz mai general

(vezi § 10, Nota la pag. 59), o menţinem în această formă. Soluţia ecuaţiei (17) se scrie

$$\varepsilon_m = -1 + \sqrt{1 + 2\,\varepsilon_{ij}\, m_i m_j}, \tag{18}$$

unde semnul pozitiv corespunde faptului că $|\xi^*|/|\xi| > 0$.

Fie date acum două elemente liniare $\xi = |\xi|\boldsymbol{m}$, $\eta = |\eta|\boldsymbol{l}$ de componente ξ_i, respectiv η_j. Ţinînd seama de (12) şi (16), obţinem pentru cosinusul unghiului format de ele după deformaţie:

$$\cos(\widehat{\xi^*, \eta^*}) = \frac{\xi^* \cdot \eta^*}{|\xi^*|\,|\eta^*|} = \frac{(\delta_{ij} + \varepsilon_{ij} + \omega_{ij})(\delta_{ik} + \varepsilon_{ik} + \omega_{ik})\,\xi_j \eta_k}{|\xi|\,|\eta|\,(1 + \varepsilon_m)(1 + \varepsilon_l)}, \tag{19}$$

sau încă, efectuînd calculele şi reţinînd termenii de primul ordin:

$$\cos(\widehat{\xi^*, \eta^*}) = \cos(\widehat{\xi, \eta})\,(1 - \varepsilon_m - \varepsilon_l) + 2\,\varepsilon_{ij} m_i l_j. \tag{20}$$

Întrucît variaţia distanţelor şi a unghiurilor — variaţie independentă de orice deplasare rigidă — constituie însăşi esenţa procesului de deformaţie, se spune că cele 6 cantităţi ε_{ij} *caracterizează* starea de deformaţie în $\mathscr{V}$. Matricea simetrică E[3]) de componente ε_{ij}, poartă numele de *matrice a deformaţiei* (pure şi infinitezimale).

Primul termen din (12) reprezintă deci contribuţia deformaţiei pure, iar cel de al doilea, contribuţia deplasării rigide la variaţia componentelor vectorului ξ.

Caracterul infinitezimal al deformaţiei a fost sistematic folosit (începînd cu (3) şi (13)), şi deci cele de mai sus nu pot fi extinse la alt tip de deformaţie fără un prealabil examen critic.

d) Alungiri şi alunecări

Componentele matricii E au semnificaţii geometrice simple. Să considerăm astfel un element ξ paralel cu una din axe, de pildă Ox_1. Notînd cu ε_{x_i} alungirea relativă a elementelor paralele cu Ox_i, obţinem din (18): $\varepsilon_{x_1} = -1 + \sqrt{1 + 2\,\varepsilon_{11}}$ şi în general[4])

$$\varepsilon_{x_i} = -1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}}, \tag{21}$$

sau încă, ţinînd seama că componentele ε_{ii} sînt suficient de mici:

$$\varepsilon_{x_i} = \varepsilon_{ii}. \tag{22}$$

Componentele diagonale ε_{ii} sînt deci egale cu *alungirile* relative, după direcţii paralele cu axele de coordonate.

---

[3]) A se citi ca „*epsilon* majuscul", şi nu ca „*e* majuscul".

[4]) Fără (!), întrucît indicele *i* apare în ambii membri din (21).

Să considerăm acum un al doilea element $\boldsymbol{\eta}$, paralel cu axa Ox_j $(j \neq i)$. Întrucît avem $(\widehat{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2}\pi$, vom nota $(\widehat{\boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\eta}^*}) = \frac{1}{2}\pi - \varphi_{ij}$, unde φ_{ij} este modificarea, în urma deformaţiei, a unghiului drept dintre axele Ox_i şi Ox_j. Suma din (20) se reduce la un singur termen şi obţinem — întrucît φ_{ij} este o cantitate mică:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\eta}^*}) = \sin \varphi_{ij} \cong \varphi_{ij} = 2\varepsilon_{ij}. \tag{23}$$

Componentele ne-diagonale ε_{ij} ale matricii deformaţiei sînt deci egale cu jumătatea modificărilor unghiurilor drepte dintre axele iniţiale. Aceste componente poartă numele de *deformaţii unghiulare* sau *forfecări* sau încă *alunecări*.

Pentru a justifica această ultimă denumire, să considerăm de pildă vectorii $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, 0, 0)$, şi $\boldsymbol{\eta}(0, \eta_2, 0)$, şi să presupunem că singura componentă nenulă a deformaţiei este ε_{12}. Abstracţie făcînd de o deplasare rigidă, obţinem din (12) vectorii $\boldsymbol{\xi}^*(\xi_1, \varepsilon_{12}\xi_1, 0)$ şi $\boldsymbol{\eta}^*(\varepsilon_{12}\eta_2, \eta_2, 0)$. Avem evident

$$|\boldsymbol{\xi}^* - \boldsymbol{\xi}| = \varepsilon_{12}\xi_1 = \varepsilon_{12}|\boldsymbol{\xi}|, \quad |\boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\eta}| = \varepsilon_{12}\eta_2 = \varepsilon_{12}|\boldsymbol{\eta}|,$$

şi deci

$$\varepsilon_{12} = \operatorname{tg} \widehat{\boldsymbol{\xi}^* O \boldsymbol{\xi}} \cong \widehat{\boldsymbol{\xi}^* O \boldsymbol{\xi}},$$

$$\varepsilon_{12} = \operatorname{tg} \widehat{\boldsymbol{\eta}^* O \boldsymbol{\eta}} \cong \widehat{\boldsymbol{\eta}^* O \boldsymbol{\eta}}.$$

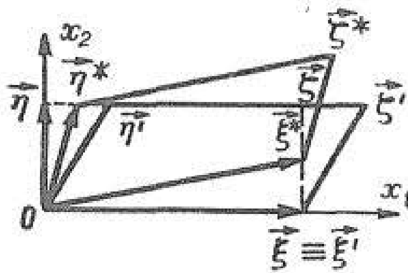


Fig. 1.4.1

Prin urmare, rotind paralelogramul $O\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\eta}^*\boldsymbol{\zeta}^*$ în jurul lui O de un unghi $\widehat{\boldsymbol{\xi}^* O \boldsymbol{\xi}}$ aşa fel încît latura $O\boldsymbol{\xi}^*$ să cadă pe $O\boldsymbol{\xi}$, atunci, abstracţie făcînd de mărimi de ordinul al doilea, punctele $\boldsymbol{\eta}^*$, $\boldsymbol{\zeta}^*$, $\boldsymbol{\xi}^*$ trec respectiv în $\boldsymbol{\eta}'$, $\boldsymbol{\zeta}'$, $\boldsymbol{\xi}' \cong \boldsymbol{\xi}$. Deformarea dreptunghiului $O\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\zeta}$ poate fi obţinută dacă fixăm baza $O\boldsymbol{\xi}$ şi facem să *alunece* paralelele la $O\boldsymbol{\xi}$ cu cantităţi proporţionale cu depărtarea lor la $O\boldsymbol{\xi}$. Acelaşi rezultat se obţine prin rabaterea paralelogramului $O\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\eta}^*\boldsymbol{\zeta}^*$ pe axa $O\boldsymbol{\eta}$: cele două poziţii diferă între ele numai printr-o deplasare rigidă.

Orice stare de deformaţie infinitezimală poate fi deci privită ca rezultat al *suprapunerii* a trei *alungiri* după axele de coordonate şi a trei *deformaţii unghiulare* ale unghiurilor iniţial drepte între aceste axe (sau a trei *alunecări* ale stratelor de material paralele cu planele de coordonate).

§ 5. TEORIA GENERALĂ A DEFORMAŢIEI INFINITEZIMALE. ECUAŢIILE GEOMETRICE

Să revenim acum la cazul unei legi oarecare de transformare

$$x_i^* = f_i(\boldsymbol{x}) = x_i + u_i(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

(vezi (2.1) sau (2.2)), care conduce la relaţiile

$$\delta\xi_i = u_{i,j}\,\xi_j, \quad \xi_i^* = (\delta_{ij} + u_{i,j})\xi_j \tag{2}$$

(vezi (2.6) și (2.7)), unde $u_i \in C^2(\mathscr{V})$. Notînd

$$\alpha_{ij} = u_{i,j} \tag{3}$$

(vezi pag. 40), căpătăm din (4.9) —(4.11) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{4}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \tag{5}$$

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \tag{6}$$

Pentru vectorul de rotație avem din (5) și (4.14) :

$$\boldsymbol{p} = -\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}, \tag{7}$$

astfel că relația (4.7) (valabilă acum numai pentru componentele rotației rigide!) devine

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\xi}. \tag{8}$$

În ce privește deformația pură, componentele ei sînt date de (4). Aceste relații, în număr de șase, alcătuiesc sistemul de *ecuații geometrice*. Acesta e un sistem de ecuații cu derivate parțiale, *liniar*, cu coeficienți constanți, de primul ordin în raport cu componentele deplasării și în care componentele deformației intervin numai sub formă întreagă.

O problemă în care parametrii geometrici sînt legați prin relațiile (4) se zice a fi cu *liniaritate geometrică*.

Relațiile (4) pot fi scrise pe scurt sub forma simbolică

$$\mathbf{E} = \operatorname{def}\boldsymbol{u}, \tag{9}$$

înțelegînd prin aceasta că matricea de componente ε_{ij} este matricea-deformație corespunzătoare unei deplasări $\boldsymbol{u}$. Operatorul def este un operator a cărui expresie rezultă din (4); el e definit pe mulțimea tuturor vectorilor de clasă C^2 (formal, chiar C^1); co-domeniul său este o mulțime de matrici simetrice cu doi indici (vezi mai jos § 9). Acest operator joacă aici un rol analog celui al operatorului grad în teoria ecuației lui Laplace. Dacă extindem definiția operatorului grad asupra vectorilor :

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{u} = [u_{i,j}], \tag{10}$$

(i — indice de coloană ; j — indice de linie), atunci marcînd cu semnul (T) transpunerea matricilor, urmează că

$$\operatorname{def}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}[\operatorname{grad}\boldsymbol{u} + \operatorname{grad}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}]. \tag{11}$$

Această scriere e utilă dacă facem uz de coordonate curbilinii.

Dacă înţelegem derivatele parţiale ce apar în (2)—(8) ca fiind calculate într-un punct dat, recădem peste teoria deformaţiei omogene, *valabile într-o vecinătate a acelui punct.* Coeficienţii α_{ij}, ε_{ij}, ω_{ij}, sînt deci *funcţii de punct.* Toate cele spuse despre deformaţia omogenă rămîn valabile, nu însă în întreg domeniul $\mathscr{V}$, ci *numai pentru fiecare vecinătate, suficient de mică, a fiecărui punct al acestuia.*

Dacă ne-am da parametrii ε_{ij} şi ω_{ij} ca funcţii *arbitrare* de punct, există riscul ca aceste vecinătăţi să nu poată fi „relipite" după deformare în aşa fel încît să asigure continuitatea materiei din $\mathscr{V}$. (Vezi § 9.) Dacă însă ε_{ij}, ω_{ij} sînt *definite* de (4), (5), atunci transformarea lui $\mathscr{V}$ în $\mathscr{V}^*$ respectă continuitatea.

Vectorul $\boldsymbol{\xi}$ din raţionamentele de pînă aci trebuie să fie infinitezimal. Relaţiile (2) dau noile sale componente; relaţiile (4) dau componentele deformaţiei; în fine, din (4.18) şi (4.20) obţinem alungirea relativă şi deformaţia unghiulară — totul numai pentru elemente liniare infinitezimale.

Axele de coordonate nu mai trec după deformaţie în trei axe rectilinii. Într-adevăr, considerînd de pildă o paralelă la Ox_3:

$$x_1 = x_1^0, \ x_2 = x_2^0, \tag{12}$$

rezultă că punctele situate pe această dreaptă trec pe *curba* de ecuaţii

$$\begin{gathered} x_1^* = x_1^0 + u_1(x_1^0, \ x_2^0, \ x_3); \quad x_2^* = x_2^0 + u_2(x_1^0, \ x_2^0, \ x_3); \\ x_3^* = x_3 + u_3(x_1^0, \ x_2^0, \ x_3). \end{gathered} \tag{13}$$

Relaţiile (4.23) vor da unghiurile — în general diferite de $\frac{1}{2}\pi$ — formate de curbele în care trec axele. Reţeaua (materializată) de coordonate carteziene rectangulare e antrenată de deformaţie şi trece într-un sistem de coordonate curbilinii, în general neortogonale. Pentru cunoaşterea acestuia, e necesară cunoaşterea funcţiilor $u_i(\boldsymbol{x})$.

OBSERVAŢIE. Nu există un standard unanim acceptat pentru notarea deformaţiei. Astfel, componentele deformaţiei se notează de către unii autori cu $(e_{xx}, \ldots, \ e_{xy}, \ldots)$; de către alţii cu $(\varepsilon_x, \ldots, \ \gamma_{xy}, \ldots)$ sau încă cu $(x_x, \ldots, x_y, \ldots)$. Termenii nediagonali ai deformaţiei sînt adesea luaţi egali cu $2\varepsilon_{ij}$ — ceea ce complică formulele de transformare tensorială (vezi § 6) şi îngreunează stabilirea paralelismului între teoria deformaţiei şi cea a tensiunii.

Lucrările ce tind spre utilizarea mijloacelor — sau cel puţin a notaţiilor — analizei tensoriale folosesc notaţii apropiate de cele din text. O informare amplă asupra celor mai uzuale notaţii se poate găsi în A. Love [1], anexa A. Vezi şi mai jos § 2.3, pag. 68.

§ 6. TENSORUL DEFORMAŢIE

Prezintă importanţă evidentă posibilitatea de a determina componentele deformaţiei în axe oarecare, dacă ele sînt cunoscute într-un sistem de axe dat. Ne vom limita la cazul unor axe carteziene ortogonale, obţinute printr-o rotaţie din cele iniţiale. (O translaţie nu modifică componentele vectorilor.)

Fie deci că poziţia sistemului $Ox'_1x'_2x'_3$ faţă de sistemul $Ox_1x_2x_3$ e dată de cei 9 cosinuşi directori

$$n_{ij} = \cos(x'_i,\ x_j), \tag{1}$$

sau, mai explicit, de matricea (evident nesimetrică)

	x_1	x_2	x_3
x'_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}
x'_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}
x'_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}.

Mărimile n_{ij} sînt legate prin relaţiile de normare şi ortogonalitate:

$$n_{ki}n_{kj} = n_{ik}n_{jk} = \delta^1_{ij}, \qquad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3. \tag{2}$$

Dacă vectorul ξ are componentele ξ_i în sistemul iniţial $Ox_1x_2x_3$ şi componentele ξ'_i în sistemul $Ox'_1x'_2x'_3$, prin proiecţie pe axele noi deducem uşor $\xi'_i = \cos(x'_i,\ x_j)\xi_j$, adică

$$\xi'_i = n_{ij}\xi_j. \tag{3}$$

Ţinînd seama de (2), deducem şi relaţiile inverse

$$\xi_i = n_{ji}\xi'_j. \tag{4}$$

Întrucît primul membru al relaţiei (4.13) care defineşte componentele ε_{ij} este evident independent de alegerea axelor, deducem

$$\varepsilon_{ij}\xi_i\xi_j = \varepsilon'_{ij}\,\xi'_i\,\xi'_j\,, \tag{5}$$

unde am notat cu ε'_{ij} componentele *aceleiaşi* deformaţii, în noile axe Introducînd acum (4) în (5), obţinem pe rînd

$$\varepsilon'_{ij}\xi'_i\xi'_j = \varepsilon_{ij}\xi_i\xi_j = \varepsilon_{hk}\xi_h\xi_k = \varepsilon_{hk}\,n_{ih}\xi'_i n_{jk}\xi'_j,$$

de unde urmează

$$\varepsilon'_{ij} = n_{ih}\,n_{jk}\,\varepsilon_{hk}\,. \tag{6}$$

Prin urmare componentele ε_{ij} formează un *tensor* (afin ortogonal) simetric de ordinul al doilea: tensorul deformaţie[5]).

Acest fapt esenţial poate conduce la o definiţie invariantă a deformaţiei şi sluji la transcrierea relaţiilor geometrice în coordonate curbilinii oarecare (vezi §4.1, pag. 121). Ca punct de plecare se poate lua de asemenea studiul lungimii elementului liniar într-o metrică oarecare.

Relaţiile (6) rămîn evident valabile pentru coordonate curbilinii ortogonale — numai că atunci n_{ij} sînt funcţii de punct.

---

[5]) Întrucît raţionamentele se desfăşoară într-un spaţiu euclidian, noţiunile de covarianţă şi contravarianţă sînt lipsite de conţinut, iar aşezarea indicilor e indiferentă.

Caracterul tensorial al deformaţiei (şi al tensiunii) a fost pus în evidenţă sub formă geometrică în lucrările lui A. Cauchy cu mult înainte de însăşi introducerea denumirii de *tensor* (de către W. Voigt [2]).

Pentru a uşura utilizarea relaţiilor (6), explicităm aci două din ele:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{11} &= n_{1h} n_{1k}\, \varepsilon_{hk} = n_{11}^2\, \varepsilon_{11} + n_{12}^2\, \varepsilon_{22} + n_{13}^2\, \varepsilon_{33} + \\ &+ 2\, n_{11} n_{12}\, \varepsilon_{12} + 2\, n_{12} n_{13}\, \varepsilon_{23} + 2\, n_{13} n_{11}\, \varepsilon_{31}, \\ \varepsilon'_{12} &= n_{1h} n_{2k}\, \varepsilon_{hk} = n_{11} n_{21}\, \varepsilon_{11} + n_{12} n_{22}\, \varepsilon_{22} + \\ &+ n_{13} n_{23}\, \varepsilon_{33} + (n_{11} n_{22} + n_{12} n_{21})\varepsilon_{12} + \\ &+ (n_{12} n_{23} + n_{13} n_{22})\varepsilon_{23} + (n_{13} n_{21} + n_{11} n_{23})\varepsilon_{31}.\end{aligned} \qquad (7)$$

§ 7. DIRECŢIILE PRINCIPALE ALE DEFORMAŢIEI

Cînd vectorul $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ parcurge tripla infinitate de poziţii posibile în jurul punctului $\boldsymbol{x}$, valorile alungirii relative ε_m (vezi (4.16), (4.18)) variază. Cunoaşterea extremelor lui ε_m ca funcţie de $\boldsymbol{m}$ poate da o imagine globală a stării de deformaţie în vecinătatea lui $\boldsymbol{x}$.

Să luăm originea sistemului de coordonate în $\boldsymbol{x}$, şi să presupunem că am găsit o direcţie în lungul căreia ε_m îşi atinge maximul[6]).

Alegînd această direcţie ca axă x'_1 într-un nou sistem de axe, obţinem din (4.21)

$$\varepsilon_{x'_1} = -1 + \sqrt{1 + 2\,\varepsilon'_{11}}, \qquad (1)$$

astfel că problema de extremum pentru $\varepsilon_{x'_1}$, este echivalentă cu problema de extremum pentru ε'_{11} ca funcţie de parametrii directori (necunoscuţi) ai axei x'_1.

Din (6.7) rezultă că aceşti parametri sînt n_{11}, n_{12}, n_{13}; întrucît ei verifică condiţia (6.2) pentru $i = j = 1$, adică

$$\sum_{k=1}^{3} n_{1k}^2 = 1, \qquad (2)$$

vom introduce multiplicatorul lui Lagrange ε şi vom căuta soluţia problemei de extemum liber pentru funcţia

$$F(n_{11}, n_{12}, n_{13}) \equiv n_{1h}\, n_{1k}\, \varepsilon_{hk} - \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{3} n_{1k}^2 - 1\right). \qquad (3)$$

Egalînd cu zero derivatele în raport cu n_{1i}, obţinem

$$\partial F / \partial n_{1i} \equiv 2\, n_{1k}\, \varepsilon_{ik} - 2\, \varepsilon\, n_{1i} = 0, \qquad (4)$$

---

[6]) Mărimea ε_m este o funcţie continuă de m_i şi deci există cel puţin o direcţie pentru care ε_m îşi atinge marginea superioară.

așadar un sistem de trei ecuații omogene

$$(\varepsilon_{ik} - \varepsilon\,\delta_{ik})\,n_{1k} = 0, \qquad i, k = 1,2,3. \tag{5}$$

Soluția trivială $n_{1k} = 0$ nu e admisibilă, întrucît nu satisface (2) Prin urmare, determinantul principal al sistemului e nul:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Aceasta este o ecuație de grad 3 în ε. Întrucît matricea ε_{ij} este simetrică urmează că toate rădăcinile ecuației (6) sînt reale [7]).

Dacă cunoaștem componentele ε_{ij}, putem deci rezolva ecuația (6) și apoi și sistemul (2), (5), găsind pentru fiecare din valorile ε, cîte un sistem de valori n_{1k}.

Să notăm cu ε' o soluție oarecare a ecuației (6). Relația (6.6) dă

$$\varepsilon'_{1j} = n_{1i}\,n_{jk}\,\varepsilon_{ik}. \tag{7}$$

Dacă n'_{1k} e sistemul de soluții al ecuațiilor (5), corespunzător lui ε', urmează că

$$\varepsilon_{ik}\,n'_{1k} = \varepsilon'\,n'_{1i}. \tag{8}$$

Intervertind în (7) indicii muți i și k, ținînd seama că $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, și introducînd aci (8), obținem

$$\varepsilon'_{1j} = n'_{1i}\,n'_{jk}\,\varepsilon_{ik} = n'_{1k}\,n'_{ji}\,\varepsilon_{ik} = n'_{ji}\,n'_{1i}\,\varepsilon'. \tag{9}$$

Întrucît din (6.2) avem $n'_{ji}\,n'_{1i} = \delta_{j1}$, relația (9) devine

$$\varepsilon'_{1j} = \varepsilon'\,\delta_{j1}, \tag{10}$$

de unde

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon', \tag{11}$$

$$\varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{13} = 0. \tag{12}$$

---

[7]) Pentru orice matrice patrată cu componente reale a_{ij} $(i,j = 1, 2, \ldots, n)$, ecuația

$$\mathrm{Det}\,[a_{ij} - a\,\delta_{ij}] = 0 \tag{a}$$

are n rădăcini, eventual complexe. Rădăcinile sînt cantitățile $a_1, a_2, \ldots a_n$ pentru care sistemul de ecuații liniare omogene

$$(a_{ij} - a\,\delta_{ij})\,x_j = 0 \tag{b}$$

are soluții nenule, deci pentru care avem

$$a_{ij}\,x_j = a\,x_i, \tag{c}$$

unde a este o soluție oarecare a ecuației (a).

Înmulțind relația (c) cu $\overline{x}_i$ și sumînd în raport cu i, obținem

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\,\overline{x}_i\,x_j = a \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2. \tag{d}$$

Dacă matricea a_{ij} este simetrică, cantitățile $a_{ij}\,\overline{x}_i\,x_j + a_{ji}\,\overline{x}_j\,x_i$ sînt reale, deci ambele sume din (d) sînt reale, și orice soluție a ecuației (a) rezultă a fi reală.

După cum se vede, valoarea maximă căutată este egală cu *cea mai mare* dintre rădăcinile ecuaţiei (6), şi ea se determină fără a mai trebui să calculăm în prealabil cantităţile n'_{1i}. Iar dacă axa Ox'_1 corespunde unei rădăcini a ecuaţiei (6), *alunecările în raport cu ea sînt nule.*

Direcţiile corespunzătoare la două rădăcini distincte ale ecuaţiei (6) sînt ortogonale. Într-adevăr, fie că unor soluţii ε', ε'' le corespund parametrii n'_{1k}, respectiv n''_{1k}. Din relaţia (5) obţinem

$$\varepsilon_{ik}\, n'_{1k} = \varepsilon'\, n'_{1i}, \quad \varepsilon_{ik}\, n''_{1k} = \varepsilon''\, n''_{1i}. \tag{13}$$

Înmulţind prima din aceste relaţii cu n''_{1i}, a doua cu n'_{1i}, sumînd în raport cu indicele i, scăzîndu-le termen cu termen şi ţinînd seama că $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, căpătăm

$$(\varepsilon' - \varepsilon'')\, n'_{1i}\, n''_{1i} = 0 \tag{14}$$

de unde, dacă $\varepsilon' \neq \varepsilon''$, urmează relaţia de ortogonalitate

$$n'_{1i}\, n''_{1i} = 0. \tag{15}$$

Direcţia extremală x'_1 odată determinată, direcţiile x'_2, x'_3 trebuie deci căutate în planul normal pe x'_1.

Fiind deci dat sistemul $Ox'_1\, x'_2\, x'_3$, în care deocamdată numai axa x'_1 e determinată, să introducem un nou sistem de axe $Ox''_1\, x''_2\, x''_3$ păstrînd neschimbată axa x'_1. Acest sistem se obţine evident prin rotirea planului $x'_1 = 0$ în jurul axei x'_1 de un anumit unghi ϑ.

Notînd prin analogie cu (6.1)

$$n'_{ij} = \cos\,(x''_i,\, x'_j) \tag{16}$$

(a nu se confunda cu n'_{ij} din (8)!) obţinem matricea

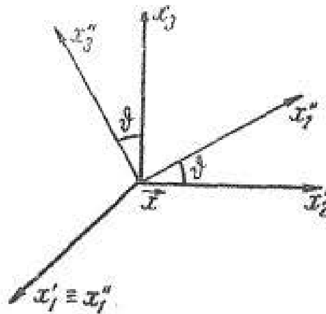


Fig. 1.7.1

	x'_1	x'_2	x'_3
x''_1	1	0	0
x''_2	0	$\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$
x''_3	0	$-\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$.

Din (6.6) deducem şi

$$\varepsilon''_{ij} = n'_{ih}\, n'_{jk}\, \varepsilon'_{hk},$$

şi deci, ţinînd seama de valorile n'_{ij} şi de (12):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon''_{11} = \varepsilon'_{11}, \quad \varepsilon''_{12} = \varepsilon''_{13} = 0,\\
&\varepsilon''_{22} = \varepsilon'_{22}\cos^2\vartheta + 2\,\varepsilon'_{23}\cos\vartheta\,\sin\vartheta + \varepsilon'_{33}\sin^2\vartheta,\\
&\varepsilon''_{33} = \varepsilon'_{22}\sin^2\vartheta - 2\,\varepsilon'_{23}\cos\vartheta\,\sin\vartheta + \varepsilon'_{33}\cos^2\vartheta,\\
&\varepsilon''_{23} = \frac{1}{2}\,(\varepsilon'_{33} - \varepsilon'_{22})\sin 2\vartheta + \varepsilon'_{23}\cos 2\vartheta,
\end{aligned} \tag{17}$$

astfel încît componentele ε'_{1i} rămîn nemodificate.

Să alegem unicul parametru de care mai dispunem, unghiul ϑ, în așa fel încît ε''_{22} să aibă caracter staționar. Anulînd derivata lui ε''_{22} din (17) în raport cu ϑ, obținem pentru ϑ valoarea

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} [2 \varepsilon'_{23}/(\varepsilon'_{22} - \varepsilon'_{33})], \tag{18}$$

ceea ce are întotdeauna sens.

Cu aceasta sistemul de axe e complet determinat.

Ne rămîne să găsim valorile ε''_{33} și ε''_{23}. Or, derivînd în raport cu ϑ expresia lui ε''_{33} din (17) și punînd condiția ca această derivată să fie nulă, obținem din nou (18). Introducînd această valoare în expresia lui ε''_{23} obținem

$$\varepsilon''_{23} = 0. \tag{19}$$

Prin urmare: în sistemul de axe $Ox''_1\, x''_2\, x''_3$, *componentele de alungire iau valori staționare* (printre ele: un maxim și un minim), *în timp ce componentele de alunecare se anulează*. În orice punct există deci un sistem de axe pentru care deformația e caracterizată de numai *trei alungiri*. Aceste axe rămîn (local) triortogonale, ele deplasîndu-se ca un ansamblu rigid.

Deformația oarecare se reduce deci la *suprapunerea a trei alungiri*. Cele trei direcții astfel determinate se numesc *direcții principale* (sau *axe principale*) *ale deformației* infinitezimale în punctul dat. Valorile componentelor ε''_{ii} pe aceste direcții, care coincid cu rădăcinile ecuației (6), se numesc *deformații principale* și se vor nota cu indici simpli: ε_1, ε_2, ε_3.

OBSERVAȚIE. În definitiv, aceasta revine la a găsi axele principale și valorile proprii ale tensorului deformației. Se știe că dacă reducem o matrice oarecare la axele principale, ea ia forma diagonală. Acesta e sensul relațiilor (12) și (19).

Dacă cunoaștem cele șase componente ale deformației într-un sistem de axe oarecare, putem deci găsi deformațiile principale și direcțiile principale. Reciproc, dacă cunoaștem poziția axelor principale (determinată de trei parametri, de pildă, de unghiurile lui Euler) și deformațiile principale, putem calcula componentele deformației în orice sistem de axe. În ambele cazuri trebuie să cunoaștem *șase* parametri, funcții de punct.

§ 8. CUADRICELE DEFORMAȚIEI. INVARIANȚI

a) Cuadricele deformației

Esențialul din raționamentele anterioare rezidă în caracterul tensorial al deformației. Întrucît în $\mathcal{E}_3$ componentele unui tensor simetric de al doilea ordin permit construirea unei cuadrice, e firesc să căutăm analogul (sau imaginea geometrică) a celor de pînă aci (A. Cauchy [2], [4]).

Să reluăm relaţia (4.13) şi să definim cuadricele

$$e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \varepsilon_{ij}\, \xi_i\, \xi_j = \pm c^2, \tag{1}$$

unde c este o constantă arbitrară, dar fixă.

Aceasta permite să transcriem relaţia (4.17) sub forma [8])

$$\varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2}\, \varepsilon_m\right) = \pm c^2/|\boldsymbol{\xi}|^2, \tag{2}$$

care e invariantă la o schimbare de axe ortogonale, întrucît atît lungimea $|\boldsymbol{\xi}|^2$, cît şi forma patratică e sînt invarianţi.

Să considerăm acum un vector de direcţie $\boldsymbol{\xi}$ şi de origină O; pentru simplitate, îl vom nota tot cu $\boldsymbol{\xi}$. Să rotim pe $\boldsymbol{\xi}$ în jurul lui x, şi să calculăm valorile ε_m corespunzătoare, desigur independente de $|\boldsymbol{\xi}|$. Pentru fiecare astfel de poziţie, să alegem acum lungimea $|\boldsymbol{\xi}|$ în aşa fel încît

$$|\boldsymbol{\xi}|^2 = \pm c^2/\varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2}\, \varepsilon_m\right). \tag{3}$$

Locul geometric al extremităţilor vectorilor de origine O şi de lungime (3) este, în virtutea relaţiilor (1), (2), suprafaţa

$$\varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2}\, \varepsilon_m\right) |\boldsymbol{\xi}|^2 \equiv e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \pm c^2, \tag{4}$$

aşadar ansamblul a două cuadrice cu centru: *cuadricele deformaţiei*. Dublul semn arată că avem de a face cu un elipsoid (real) sau cu doi hiperboloizi conjugaţi.

Cuadricele (4) odată construite, alungirea ε_m corespunzătoare unei direcţii oarecare ce trece prin x, se găseşte determinînd punctul în care $\boldsymbol{\xi}$ înţeapă cuadrica. Calculînd lungimea $|\boldsymbol{\xi}|$, deducem din (4) valoarea produsului $\varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2}\, \varepsilon_m\right)$, şi deci şi pe cea a alungirii ε_m, cu semnul său.

Aceasta este imaginea geometrică a rezultatelor din paragrafele anterioare.

Întrucît deformaţiile sînt infinitezimale, relaţiile ce-şi au originea în (4.17) pot fi simplificate prin neglijarea termenului în ε_m^2. Obţinem astfel în loc de (2):

$$\varepsilon_m = \pm c^2/|\boldsymbol{\xi}|^2. \tag{5}$$

Pentru a determina axele principale ale cuadricii (1), sîntem conduşi la a rezolva o ecuaţie care coincide cu (7.6) (vezi G. Vrănceanu [1], § 11.4).

Raportînd cuadrica (1) la axele principale, obţinem ecuaţia

$$\varepsilon_1\, \xi_1^2 + \varepsilon_2\, \xi_2^2 + \varepsilon_3\, \xi_3^2 = \pm c^2. \tag{6}$$

---

[8]) Vezi cele spuse relativ la formula (4.17).

Semi-axele corespunzătoare au lungimile $1/\sqrt{\varepsilon_i}$. Dacă cele trei deformaţii principale sînt de acelaşi semn, obţinem deci un elipsoid; în caz contrar, doi hiperboloizi.

OBSERVAŢIE. Aceste cuadrice nu au nimic comun cu domeniul în care se transformă, de pildă, o bulă cu centrul în punctul considerat. O astfel de bulă elementară trece într-un elipsoid de semiaxe proporţionale cu $(1 + \varepsilon_i)$.

b) *Stări particulare de deformaţie*

Dacă două din deformaţiile principale sînt egale, se obţin cuadrice de revoluţie. Dacă toate deformaţiile principale sînt egale, cuadrica este o sferă şi poziţia axelor este indiferentă.

Dacă una din deformaţiile principale — de exemplu ε_3 — se anulează, (6) se reduce la

$$\varepsilon_1 \xi_1^2 + \varepsilon_2 \xi_2^2 = \pm c^2, \tag{7}$$

ceea ce reprezintă un *cilindru* de generatoare paralele cu Ox_3.

Pentru $\varepsilon_3 \to 0$, lungimea semiaxei corespunzătoare din (6) creşte la infinit. În cazul (7), deformaţia după direcţia Ox_3 este nulă; după direcţii apropiate de Ox_3, ea e foarte mică (vezi (5)). Din această cauză, starea în care una din deformaţiile principale este nulă, poartă numele de *stare de deformaţie plană*, paralelă cu planul celorlalte două axe principale.

Pentru a trece la axe arbitrare, în aşa fel încît să conservăm axa în raport cu care deformaţia principală este nulă, ne rămîne să rotim axele în jurul acesteia. Un calcul similar celui din (7.17) arată că în noile axe căpătăm $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0$. Prin urmare, starea de deformaţie plană în raport cu direcţia Ox_3 este caracterizată de o matrice

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Se numeşte *stare de deformaţie antiplană*, starea descrisă de o matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Starea în care nu există submatrici, linii sau coloane cu elemente identic nule se numeşte *stare de deformaţie spaţială* (sau *tridimensională*)[9].

[9]) Aceste definiţii au caracter punctual. Pentru un corp *în ansamblul său*, nu trebuie să credem că orice stare ar putea fi redusă la o simplă suprapunere de stări antiplane şi de stări plane *în fiecare punct*.

Definiții similare pentru starea de tensiune vor fi date în capitolul 2. Capitolul 5 va fi consacrat studiului unor stări care sînt antiplane în fiecare punct; capitolul 6 — anumitor stări plane; iar capitolele 7—10 — unor stări de deformație spațială.

c) *Invarianți*

Deși exprimă o realitate de natură mecanică, componentele deformației sînt mărimi raportate la un sistem de coordonate. Este firesc să căutăm un mod invariant de a caracteriza starea de deformație. Pentru aceasta, dezvoltînd determinantul din (7.6), obținem [10])

$$\varepsilon^3 - \mathrm{E}_1\,\varepsilon^2 + \mathrm{E}_2\,\varepsilon - \mathrm{E}_3 = 0, \tag{10}$$

unde am notat

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \\ \mathrm{E}_2 &= \varepsilon_{11}\,\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\,\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\,\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2, \\ \mathrm{E}_3 &= \mathrm{Det}\ [\varepsilon_{ij}]. \end{aligned} \tag{11}$$

Cel mai adesea vom nota $\mathrm{E}_1 = \theta$. Se demonstrează cu ușurință (vezi § 10, pag. 60), că θ evaluează *dilatarea de volum.*

Întrucît $1/\sqrt{\varepsilon_i}$ sînt lungimile semiaxelor cuadricei deformației, rezultă că soluțiile ε_i ale ecuației (10) sînt invariante la o schimbare de axe.

Relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (10) conduc la

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_1 &= \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \mathrm{E}_2 &= \varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_2\,\varepsilon_3 + \varepsilon_3\,\varepsilon_1, \\ \mathrm{E}_3 &= \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3, \end{aligned} \tag{12}$$

de unde conchidem că și mărimile E_1, E_2, E_3 sînt invariante. Ele se numesc respectiv *invariantul liniar*, *patratic* și *cubic* al deformației. (Orice alt invariant al deformației se exprimă sub formă rațională prin intermediul acestora.)

În particular, din (11) și (5.4) obținem relația simplă și importantă

$$\theta = u_{j,j} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}. \tag{13}$$

Relațiile (12) pot fi privite drept un caz particular al relațiilor (11). „Cazul particular" este însă echivalent cu cel general: orice relație scrisă sub formă invariantă poate fi ușor transcrisă într-un sistem oarecare de axe. (Vezi de exemplu, § 10, pag. 61.)

Cunoașterea axelor cuadricei este echivalentă cu cunoașterea invarianților, astfel că starea de deformație e deplin determinată dacă cunoaștem poziția axelor principale și cei trei invarianți.

---

[10]) A se citi E ca „epsilon majuscul".

Amintim că toate cantităţile cu care avem de a face în acest paragraf sînt funcţii de x_1, x_2, x_3.

Pentru o mai largă informare asupra teoriei invarianţilor, vezi de pildă I. Goldenblatt [1], sau V. Novojilov [1], [3].

Aceste noţiuni joacă un rol esenţial în teoria neliniară a elasticităţii şi în teoria plasticităţii.

§9. ECUAŢIILE DE COMPATIBILITATE

Pentru a cunoaşte starea corpului deformat, trebuie să dispunem de componentele deformaţiei şi ale rotaţiei rigide locale — aşadar de cele nouă cantităţi $u_{i,j}$. Întrucît mărimile ε_{ij}, ω_{ij} dau numai informaţii cu caracter local, trebuie să cunoaştem chiar componentele u_i ale deplasării.

Pentru ca raporturile dintre deplasări şi deformaţii să fie clarificate, trebuie să putem reconstitui cu ajutorul deformaţiilor, tabloul stării de deplasare. Cu acest prilej, vom putea da răspuns şi la chestiunea pusă în § 5, pag. 46 : problema *compatibilităţii* deformaţiilor şi a deplasărilor rigide elementare, sau încă a *continuităţii* procesului de deformaţie în ansamblul său.

Dacă în ecuaţiile (5.4) cunoaştem componentele lui $\boldsymbol{u}$, putem calcula imediat cele şase componente ale lui E. Dacă însă cunoaştem cele şase componente ale unui tensor simetric de al doilea ordin, fie ele ε_{ij}, cele şase relaţii (5.4) constituie un sistem de ecuaţii supradeterminat (în număr mai mare decît cel al funcţiilor necunoscute), şi el nu poate deci avea soluţie pentru ε_{ij} *arbitrari*. Cu alte cuvinte, nu orice tensor simetric de al doilea ordin poate fi pus sub forma def $\boldsymbol{u}$.

Condiţii *necesare* pentru ca un tensor E să fie de forma def $\boldsymbol{u}$ au fost formulate de către B. de Saint-Venant. Rezolvarea generală a problemei o dă următoarea teoremă a lui G. Kirchoff ([3], § 27.4), pusă la punct de V. Volterra [1] şi E. Cesaro [1] :

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un tensor simetric de al doilea ordin E, *definit într-un domeniu simplu conex* $\mathscr{V}$, *să poată fi pus sub forma*

$$\mathrm{E} = \operatorname{def} \boldsymbol{u}, \tag{1}$$

este ca componentele sale ε_{ij} *să satisfacă condiţiile lui Saint-Venant* (12).

Pentru a demonstra teorema, să punem sistemul (5.4) sub forma

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2\,\varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Fie dat un punct $\boldsymbol{x}^0$ şi fie cunoscute aci valorile deplasării u_i^0 şi ale rotaţiei ω_{ij}^0. Dacă valorile $u_{i,j}$ ar fi cunoscute peste tot în $\mathscr{V}$, deplasările u_i^1 într-un punct oarecare $\boldsymbol{x}^1$ ar fi de forma

$$u_i^1 = u_i^0 + \int_{\widehat{x^0 x^1}} u_{i,j}\, \mathrm{d}x_j, \tag{3}$$

integrala depinzînd numai de capetele drumului de integrare.

Introducînd (5.6) în (3), putem scrie

$$u_i^1 = u_i^0 + \int_{\widehat{x^0 x^1}} \varepsilon_{ij}\, \mathrm{d}x_j + \int_{\widehat{x^0 x^1}} \omega_{ij}\, \mathrm{d}x_j. \tag{4}$$

Întrucît u_i^0 şi ε_{ij} sînt cunoscute, ne rămîne să calculăm

$$I_i = \int_{\widehat{x^0 x^1}} \omega_{ij}\, \mathrm{d}x_j. \tag{5}$$

Înlocuind $\mathrm{d}x_j$ prin $\mathrm{d}(x_j - x_j^1)$, unde x_j^1 sînt valori fixe, avem

$$I_i = -\, \omega_{ij}^0 (x_j^0 - x_j^1) - \int_{\widehat{x^0 x^1}} (x_j - x_j^1)\, \mathrm{d}\omega_{ij}. \tag{6}$$

Dar diferenţialele $\mathrm{d}\omega_{ij}$ depind de $\omega_{ij,k}$ şi găsim uşor

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}. \tag{7}$$

Introducînd (7) în integrala din (6), obţinem deci

$$\int_{\widehat{x^0 x^1}} (x_j^1 - x_j)\, \mathrm{d}\omega_{ij} = \int_{\widehat{x^0 x^1}} (x_j^1 - x_j)\, (\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})\, \mathrm{d}x_k,$$

astfel că (4) conduce la *formula lui Kirchhoff-Cesaro*

$$u_i^1 = u_i^0 + \omega_{ij}^0 (x_j^1 - x_j) + \int_{\widehat{x^0 x^1}} U_{ik}\, \mathrm{d}x_k, \tag{8}$$

unde

$$U_{ik} = \varepsilon_{ik} + (x_j^1 - x_j)\, (\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}). \tag{9}$$

Din considerente mecanice evidente, să admitem că vectorul-deplasare este o funcţie *uniformă* (funcţie de punct) [11]). Aceasta cere ca (8) să nu depindă de drumul de integrare, de unde urmează (condiţie necesară şi suficientă !)

$$U_{ik,h} = U_{ih,k}. \tag{10}$$

Introducînd aci expresia U_{ik} din (9), obţinem

$$(x_j^1 - x_j)\, (\varepsilon_{ik,jh} - \varepsilon_{jk,ih}) = (x_j^1 - x_j)\, (\varepsilon_{ih,jk} - \varepsilon_{jh,ik}), \tag{11}$$

unde trebuie să presupunem $h \neq k$ (pentru $h = k$, (10) se reduce la o identitate) şi $i \neq j$ (pentru $i = j$, parantezele din (11) sînt nule).

Dat fiind că relaţia (11) trebuie să fie valabilă pentru orice valori ale diferenţei $x_j^1 - x_j$, obţinem în definitiv *condiţiile lui Saint-Venant*

$$\varepsilon_{ik,jh} - \varepsilon_{jk,ih} = \varepsilon_{ih,jk} - \varepsilon_{jh,ik}. \tag{12}$$

---

[11]) Există probleme importante în care această presupunere îşi pierde valabilitatea.

Acestea au fost găsite de B. de Saint-Venant (în 1861) ca condiții *necesare*, prin diferențierea ecuațiilor geometrice. Teorema de mai sus dovedește că ele sînt și condiții *suficiente*, dacă $\mathscr{V}$ este simplu conex.

Aparent, există $3^4 = 81$ astfel de relații. Dar întrucît avem $i \neq j$ și $h \neq k$, și întrucît putem interverti indicii i cu h și j cu k, sau perechea i, j cu h, k, fără a obține relații noi, numărul total de relații distincte se reduce la *șase*. Notînd cu (i, j, k) indicii 1, 2, 3 sau o permutare circulară a lor, obținem din (12), luînd $h = i$, trei relații de tipul

$$\varepsilon_{ii,jk} + (\varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{ij,k})_{,i} = 0 \quad (!). \tag{13}$$

Dacă luăm aci $k = j$, căpătăm încă trei relații de tipul

$$\varepsilon_{ii,jj} + \varepsilon_{jj,ii} - 2\varepsilon_{ij,ij} = 0 \quad (!!). \tag{14}$$

Introducînd (5.4) în (13) și (14), acestea rezultă identic verificate.

Relațiile lui Saint-Venant pot fi interpretate cu ajutorul unui *operator liniar* de al doilea ordin ink aplicat componentelor tensorului $\mathbf{E}$:

$$\operatorname{ink} \mathbf{E} = 0. \tag{15}$$

Un vector $\boldsymbol{v}$ este gradientul unui scalar φ, dacă și numai dacă rot $\boldsymbol{v} = 0$. Condițiile lui Saint-Venant au un rol similar în raport cu operatorul def: un tensor simetric de al doilea ordin $\mathbf{E}$ este de forma $\mathbf{E} = \operatorname{def} \boldsymbol{u}$, dacă și numai dacă ink $\mathbf{E} = 0$.

Dacă ink $\mathbf{E} \neq 0$, valorile ce se obțin în primul membru din (15) pot fi privite ca o măsură a *incompatibilității* sistemului geometric. Astfel de stări se numesc *dislocații*.

Luînd $\varepsilon_{ij} \equiv 0$, formulele (8), (9) se reduc la

$$u_i^1 = u_i^0 + \omega_{ij}^0 (x_j^1 - x_j), \tag{16}$$

ceea ce descrie o deplasare rigidă a corpului în ansamblu. În cadrul condițiilor lui Saint-Venant, cunoașterea deformațiilor echivalează deci cu cunoașterea deplasărilor, abstracție făcînd de o deplasare rigidă (16). Cunoașterea valorilor u_1^0 și ω_{ij}^0 într-un punct x^0 determină și această din urmă deplasare.

Dacă $\mathscr{V}$ este multiplu-conex, condițiile lui Saint-Venant rămîn condiții *necesare* de integrabilitate. Formulele (8) rămîn și ele valabile, cu condiția ca drumul de integrare să nu traverseze nici una din tăieturile ce transformă pe $\mathscr{V}$ într-un domeniu simplu conex. Dar, notînd cu $\boldsymbol{u}^+$, respectiv $\boldsymbol{u}^-$, vectorul deplasare pe bordurile unei asemenea tăieturi, trebuie să impunem condiția suplimentară

$$\boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{u}^-, \tag{17}$$

pentru a ne asigura de uniformitatea lui $\boldsymbol{u}$ în domeniul $\mathscr{V}$ inițial. În caz contrar, $\boldsymbol{u}$ va fi determinat numai abstracție făcînd de anumite *perioade*, date de integralele din (8) pe componentele interioare ale frontierei.

Relativ la studiul condițiilor lui Saint-Venant în cazul deformației infinitezimale, vezi A. Lurie [1] și [4], § 1.4. Pentru discutarea cazului

în care aceste condiţii nu sînt satisfăcute, vezi indicaţii în A. Seeger [1], § 2.53. Problema dislocaţiilor e studiată în detaliu în lucrările citate în § 4.1, pag. 125.

În cadrul condiţiilor lui Saint-Venant (eventual completate cu condiţiile (17)), cunoaşterea deplasărilor şi a deformaţiilor devin deci *echivalente*. (Ceea ce explică raţiunea pentru care relaţiile (5.5) nu sînt incluse printre relaţiile geometrice ale problemei.) În definitiv, aceasta provine din faptul că fiecare punct al continuului este privit ca dispunînd de numai 3 grade de libertate. (În teoria dislocaţiilor, acest punct de vedere îşi pierde valabilitatea: vezi E. Kröner [4], finele § 1.5, şi [6]; vezi şi E. şi F. Cosserat [4], cap. 4.)

Pe viitor, ne putem deci mărgini la a căuta fie numai deformaţiile, fie numai deplasările. Acest rezultat nu depinde nici de sarcină, nici de proprietăţile mecanice ale corpului (dacă acesta este elastic).

§ 10. DEFORMAŢII NELINIARE

Raţionamentele din paragrafele precedente pot fi repetate cuvînt cu cuvînt, dar fără a mai neglija termenul $|\delta\boldsymbol{\xi}|^2$ în expresia (4.2) — ceea ce conduce la o teorie *neliniară* a deformaţiei.

Întrucît avem de considerat acum cantităţi în care produse de mărimi α_{ij}, ε_{ij}, ω_{ij} apar alături de termeni liniari, *principiul superpoziţiei îşi pierde valabilitatea.*

Din (4.2) obţinem acum — în loc de (4.13) — relaţia mai generală

$$\delta|\boldsymbol{\xi}|^2 = \sum_{i=1}^{3} [(\delta_{ij} + \alpha_{ij})\,\xi_j]^2 - \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 = 2\tilde{\varepsilon}_{ij}\,\xi_i\,\xi_j. \tag{1}$$

Calculînd aci coeficientul termenului în ξ_i^2, căpătăm

$$\tilde{\varepsilon}_{ii} = \alpha_{ii} + \frac{1}{2}(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2) \quad (!). \tag{2}$$

Pentru coeficientul termenului în $\xi_i\,\xi_j$, $(i \neq j)$, avem

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + \frac{1}{2}(\alpha_{1i}\,\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\,\alpha_{2j} + \alpha_{3i}\,\alpha_{3j}). \tag{3}$$

Evident, (3) se reduce la (2) dacă luăm $i = j$, astfel că în definitiv

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + \frac{1}{2}\alpha_{ki}\,\alpha_{kj}, \qquad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{4}$$

sau încă, ţinînd seama de (4.9) şi (4.11):

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}(\varepsilon_{ki} + \omega_{ki})(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}). \tag{5}$$

Matricea $\widetilde{E}$ de componente $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ este prin definiție simetrică: componentele ei se numesc *componentele deformației finite* (sau *neliniare*).

Pentru a calcula aceste mărimi, sînt necesare cele 9 componente α_{ij}, sau cele 6 componente ε_{ij} *și* cele 3 componente ω_{ij}. Legea *liniară* (3.5) de transformare a domeniului $\mathscr{V}$ în $\mathscr{V}^*$ conduce deci în general la o legătură *neliniară* între componentele deformației și coeficienții transformării. Separarea ce apărea în § 4 între rolurile componentelor ε_{ij} și ω_{ij}, ca și liniaritatea legăturii dintre componentele deformației și coeficienții transformării (consecințe ale neglijării termenului $|\delta \boldsymbol{\xi}|^2$ în expresia $\delta |\boldsymbol{\xi}|^2$) nu se mențin.

Definiția (4.16) a alungirii relative și formula (4.18) își păstrează valabilitatea [12]), dacă înlocuim ε_m, ε_{ij} prin $\widetilde{\varepsilon}_m$, $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$:

$$\widetilde{\varepsilon}_m = -1 + \sqrt{1 + 2\widetilde{\varepsilon}_{ij} m_i m_j}. \tag{6}$$

Formula (4.19) rămîne valabilă. Ținînd seama de relația (5), obținem de aci

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\eta}^*}) = \frac{\delta_{ij} + 2\widetilde{\varepsilon}_{ij}}{(1 + \widetilde{\varepsilon}_m)(1 + \widetilde{\varepsilon}_l)} m_i l_j. \tag{7}$$

Formula (4.21) se înlocuiește cu

$$\widetilde{\varepsilon}_{x_i} = -1 + \sqrt{1 + 2\widetilde{\varepsilon}_{ii}}. \tag{8}$$

Pentru un element $\boldsymbol{\xi}_i$ paralel cu axa Ox_i, și un element $\boldsymbol{\eta}_j$ paralel cu axa Ox_j, suma din (7) se reduce la un singur termen și obținem

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\xi}_i^*, \boldsymbol{\eta}_j^*}) = \sin \varphi_{ij} = \frac{2\widetilde{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{1 + 2\widetilde{\varepsilon}_{ii}}\sqrt{1 + 2\widetilde{\varepsilon}_{jj}}} \quad (!!). \tag{9}$$

Comparînd relațiile (4.22), (4.23) cu (8), (9), se vede că mărimile $\widetilde{\varepsilon}_{ii}$ și $2\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ nu mai sînt *egale*, dar *caracterizează* totuși aceleași modificări ca și ε_{ii} și $2\varepsilon_{ij}$: trei alungiri și trei deformații unghiulare (fără a mai putea însă vorbi despre „alunecări", nici despre *suprapunerea* acestor șase deformații). Cunoașterea mărimilor $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ echivalează cu cunoașterea stării de deformație în jurul punctului considerat.

Întreg cuprinsul §§ 5—7 își păstrează cuvînt cu cuvînt valabilitatea — cantitățile ε_{ij} fiind peste tot înlocuite cu $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$. În particular, ecuațiile (5.4) sînt înlocuite cu

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j}. \tag{10}$$

Acesta e tot un sistem de ecuații cu derivate parțiale, cu coeficienți constanți, întreg în raport cu componentele deformației, și de primul ordin, dar *neliniar*, în raport cu cele ale deplasării.

---

[12]) Acesta a fost motivul pentru care am menținut termenul patratic în (4.17).

Condiţia ca deplasarea să se reducă la o deplasare rigidă conduce la căutarea soluţiilor sistemului neliniar $\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0$, rezultatele simple din (4.8) sau (9.16) pierzîndu-şi sensul. (Nu trebuie uitat că o deplasare rigidă care nu este infinitezimală, *nu se reduce* în general la suprapunerea unei translaţii şi a unei rotaţii).

Relaţiile (10) pot fi scrise sub forma (compară cu (5.9)):

$$\widetilde{\mathrm{E}} = \widetilde{\mathrm{def}}\, \boldsymbol{u}. \tag{11}$$

Axele principale şi deformaţiile principale se definesc în acelaşi mod. Relaţiile (4.22) îşi pierd valabilitatea, dar relaţiile (4.21) rămîn adevărate, ceea ce dă, în axe principale:

$$\tilde{\varepsilon}_{x_i} = -1 + \sqrt{1 + 2\tilde{\varepsilon}_i}. \tag{12}$$

Rezultatele din § 8 se păstrează pentru cuadricele

$$\tilde{e}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \tilde{\varepsilon}_{ij}\, \xi_i\, \xi_j = \pm c^2. \tag{13}$$

Rămîn valabile şi formulele (8.2)—(8.9), exceptînd (8.5). Invarianţii deformaţiei neliniare se notează $\widetilde{\mathrm{E}}_1$, $\widetilde{\mathrm{E}}_2$, $\widetilde{\mathrm{E}}_3$ şi au forma ce decurge imediat din (8.11) sau (8.12). Formula (8.13) îşi pierde însă valabilitatea.

EXEMPLU. Să calculăm dilatarea de volum — cantitate care desigur nu depinde de alegerea axelor. Considerînd transformarea (2.9), notînd cu $\tilde{\theta}$ dilatarea de volum în cazul deformaţiei neliniare şi ţinînd seama că raportul volumelor $1 + \tilde{\theta}$ este egal cu jacobianul transformării, obţinem

$$1 + \tilde{\theta} = \begin{vmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 + u_{3,3} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Cu ajutorul formulelor (10), deducem de aci

$$(1 + \tilde{\theta})^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\tilde{\varepsilon}_{11} & 2\tilde{\varepsilon}_{12} & 2\tilde{\varepsilon}_{13} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{12} & 1 + 2\tilde{\varepsilon}_{22} & 2\tilde{\varepsilon}_{23} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{13} & 2\tilde{\varepsilon}_{23} & 1 + 2\tilde{\varepsilon}_{33} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Ţinînd seama de definiţiile analoge cu (8.11) în cazul deformaţiei neliniare, căpătăm

$$(1 + \tilde{\theta})^2 = 1 + 2\widetilde{\mathrm{E}}_1 + 4\widetilde{\mathrm{E}}_2 + 8\widetilde{\mathrm{E}}_3,$$

de unde rezultă valoarea căutată

$$\tilde{\theta} = \sqrt{1 + 2\widetilde{\mathrm{E}}_1 + 4\widetilde{\mathrm{E}}_2 + 8\widetilde{\mathrm{E}}_3} - 1. \tag{16}$$

Introducînd aci expresiile similare cu (8.12), obţinem încă

$$\tilde{\theta} = \sqrt{(1 + 2\tilde{\varepsilon}_1)(1 + 2\tilde{\varepsilon}_2)(1 + 2\tilde{\varepsilon}_3)} - 1, \tag{17}$$

și în fine, folosind relațiile (12):

$$\widetilde{\theta} = (1 + \widetilde{\varepsilon}_{x_1})(1 + \widetilde{\varepsilon}_{x_2})(1 + \widetilde{\varepsilon}_{x_3}) - 1. \tag{18}$$

Sensul acestei formule e ușor de înțeles: un paralelipiped dreptunghic elementar, cu muchiile paralele cu axele principale, se transformă tot într-un paralelipiped dreptunghic, de muchii alungite în raportul $(1 + \varepsilon_{x_i})/1$. Formula (18) poate fi dedusă și direct, apoi transcrisă cu ajutorul invarianților și astfel obținută și forma (16), valabilă în axe oarecari.

Chestiunea condițiilor de compatibilitate se pune în același fel, dar caracterul neliniar al ecuațiilor (10) complică considerabil problema. Condiții analoge cu (9.12) pot fi obținute, cerînd ca spațiul să rămînă euclidian și după deformare, așadar anulînd tensorul său de curbură. (Vezi V. Z. Vlasov [1]; A. Green și W. Zerna [1], § 2.3; V. Novojilov [1], § 39; C. Truesdell și R. Toupin [1], § 34).

După cum deformația neliniară este omogenă sau nu, cantitățile cu care avem de a face (invarianți, cuadrice ale deformației, axe principale etc.) sînt aceleași sau variază de la punct la punct.

Teoria neliniară conține drept caz particular teoria deformației infinitezimale. Pentru a ne convinge de aceasta, să începem prin a presupune că componentele $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ sînt suficient de mici pentru a putea neglija produse de astfel de componente față de termeni liniari în raport cu ele. Teoria astfel simplificată poartă numele de *teoria micilor deformații*. În acest caz, din (8) și (9) obținem relații de tipul (4.22), (4.23). Prin urmare, componentele matricii micilor deformații sînt pur și simplu *egale* cu modificările (de lungime sau unghiulare) corespunzătoare. Pentru cuadricele deformației, se poate face uz de o expresie similară cu (8.5). Din (18) obținem aci cu ușurință

$$\widetilde{\theta} = (1 + \widetilde{\varepsilon}_1)(1 + \widetilde{\varepsilon}_2)(1 + \widetilde{\varepsilon}_3) - 1 \cong \widetilde{\varepsilon}_1 + \widetilde{\varepsilon}_2 + \widetilde{\varepsilon}_3 = \widetilde{E}_1 \tag{19}$$

(ceea ce nu coincide cu (8.13)!).

Teoria micilor deformații nu coincide însă cu teoria deformației infinitezimale, întrucît ea limitează numai valorile $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$, permițînd apariția de termeni neliniari în ε_{ij}, ω_{ij}. Pentru a evita astfel de termeni, trebuie deci să presupunem că nu numai deformațiile, ci și rotațiile rigide locale sînt suficient de mici. În acest caz, termenii neliniari din (10) pot fi neglijați și obținem

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}. \tag{20}$$

Prin urmare, *teoria micilor deformații și rotații* coincide cu *teoria deformației infinitezimale*, liniare deci. Această chestiune e tratată în detaliu de V. Novojilov [1], [3].

Adesea, deformațiile sînt suficient de mici pentru ca teoria micilor deformații (încă neliniară!) să fie aplicabilă. Există însă probleme în care pasul de aci spre teoria deformației liniare nu mai poate fi făcut: de pildă, putem îndoi mult o lamă subțire de oțel, obținînd rotații locale mari, fără ca deformațiile să fie mari (fapt de care ne convinge absența

deformaţiei remanente după descărcare). Dimpotrivă, în cazul corpurilor elastice masive, rotaţii mari nu pot coexista cu deformaţii mici şi teoria micilor deformaţii se reduce firesc la teoria liniară.

Teoria liniară prezintă avantajele simplicităţii, permiţînd totodată examinarea unor cazuri din cele mai importante. Dar teoria neliniară nu este simplul rezultat al unei dorinţe de generalizare. La anumite configuraţii şi solicitări ale mediului continuu (tije, plăci, solicitate într-un anumit mod), precum şi pentru anumite materiale (cauciuc, polimeri înalţi etc.) presupunerile asupra liniarităţii relaţiilor geometrice nu mai reprezintă nici măcar o primă aproximare a fenomenului.

Studiul acestor chestiuni se loveşte de mari dificultăţi: domeniul de valabilitate al fiecărui tip de ecuaţii geometrice nu e încă destul de clar, iar ecuaţiile neliniare obţinute sînt greu abordabile.

Pentru indicaţii bibliografice privind problemele neliniare, vezi § 4.1, pag. 125.

În cele ce urmează, ne vom situa sistematic în cadrul teoriei deformaţiei infinitezimale, aşadar al liniarităţii geometrice.

CAPITOLUL 2

STAREA DE TENSIUNE A MEDIULUI CONTINUU

§ 1. FORȚE EXTERIOARE

Să ne fixăm acum atenția asupra forțelor ce acționează dinafară asupra corpului continuu și a celor ce iau naștere în interior, ca efect al acestei acțiuni. Vom părăsi deci cadrul clasic al mecanicii solidului rigid pe o cale pur *statică*. Ca și în capitolul 1, proprietățile materialului nu ne vor interesa.

Nu ne vom preocupa de semnificația noțiunii de „forță". Ne limităm la a spune că o forță poate fi evaluată numai prin intermediul efectelor sale — în cazul nostru prin intermediul deplasărilor cauzate de ea.

a) Forțe de volum și forțe superficiale

Se numește *forță exterioară* orice forță ce caracterizează acțiunea unui corp exterior lui $\mathscr{V}$, asupra punctelor din $\mathscr{V} + \mathscr{S}$. Acele forțe ce acționează asupra punctelor dintr-un domeniu $\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}$ se numesc *forțe de volum*. Cele ce acționează asupra punctelor dintr-un domeniu $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ se numesc *forțe superficiale*.

Să considerăm rezultanta $\mathcal{R}(\mathscr{S}')$ și momentul rezultant $\mathcal{M}(\mathscr{V})$, al forțelor exterioare acționînd asupra lui $\mathscr{V}'$. În general, atît $\mathcal{R}(\mathscr{V}')$ cît și $\mathcal{M}(\mathscr{V}')$ tind către zero o dată cu volumul mes $(\mathscr{V}')$; în general, momentul rezultant tinde spre zero mai repede decît rezultanta, dacă centrul de reducere este ales în $\mathscr{V}'$.

Se numește *forță de volum* $\boldsymbol{F}$ (de componente F_1, F_2, F_3) în $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$, limita

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lim \frac{\mathcal{R}(\mathscr{V}')}{\text{mes}(\mathscr{V}')}, \quad \text{pentru} \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}' \subset \mathscr{V}, \quad d(\mathscr{V}') \to 0, \qquad (1)$$

dacă această limită (unică) există și e finită (compară și cu (1.1.9)).

Dacă pentru $d(\mathscr{V}') \to 0$, momentul rezultant în $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}'$ *nu este neglijabil* în comparație cu rezultanta, atunci avem de a face cu o *teorie asimetrică a continuului* (vezi § 4, pag. 72; vezi și § 4.1, pag. 125).

În cele ce urmează, acțiunea exterioară asupra punctelor din $\mathscr{V}$ va fi întotdeauna caracterizată *numai* prin forța (1). Cele mai simple exemple de forțe de volum sînt cele gravitaționale și cele inerțiale. E ușor de

arătat că efectul unor astfel de forțe provenite din puncte $\xi \notin \mathscr{V}'$, $\xi \in \mathscr{V}$, este neglijabil.

Denumirea de „forță de volum" e improprie: în fapt, $\boldsymbol{F}$ este *densitatea* cîmpului forțelor de volum în punctul considerat. Avem evident $[\boldsymbol{F}] = \mathrm{FL}^{-3} = \mathrm{ML}^{-2}\,\mathrm{T}^{-2}$, și modulul acestei densități de forță se măsoară în kgf/cm^3. Forța ce acționează asupra unui element de volum $\mathrm{d}V$ se va scrie $\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V$; evident, ea are dimensiunea unei forțe.

Definiția (1) poate fi reluată pentru *forțele superficiale*. Anume, o m scrie

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim \frac{\mathscr{R}(\mathscr{S}')}{\mathrm{mes}\,(\mathscr{S}')}, \quad \text{pentru} \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{S}' \subset \mathscr{S}, \quad d(\mathscr{S}') \to 0. \qquad (3)$$

Cel mai frecvent caz de apariție a unor forțe superficiale este cel în care corpul se află în contact cu alt corp, solid sau fluid: contact dintre o fundație și sol, presiunea fluidului asupra pereților unui rezervor etc. Dimensiunea densității forței superficiale este $[\boldsymbol{f}] = \mathrm{FL}^{-2}$, și ea se măsoară în kgf/cm^2. Pe orice element de arie $\mathrm{d}S$ acționează forța $\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}S$.

Forța superficială $\boldsymbol{f}$ nu e în general dirijată după normala $\boldsymbol{n}$ la $\mathscr{S}$. Se spune că avem în $\boldsymbol{x} \in \mathscr{S}$ *întindere* sau *compresiune*, după cum unghiul $\widehat{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n})}$ e mai mic, respectiv mai mare decît $\frac{1}{2}\pi$. Dacă $\mathscr{S}$ este o suprafață închisă orientabilă, $\boldsymbol{n}$ va fi întotdeauna normala *externă* în raport cu $\mathscr{V}^+$.

Forțele exterioare pentru care limitele din (1) sau (2) există se numesc *forțe exterioare* (sau *sarcini*) *repartizate* (sau *distribuite*).

b) Forțe concentrate

Definițiile (1), (2) își pierd sensul dacă rezultanta $\mathscr{R}$ nu tinde spre zero o dată cu diametrul domeniului considerat. Dacă această rezultantă are o limită care nu este nulă, se spune că în $\boldsymbol{x}$ e aplicată o *forță concentrată* (de volum sau superficială), egală cu limita rezultantei. Dimensiunea sa este evident aceea a unei forțe.

Cel mai adesea, avem de a face cu sarcini repartizate. Totuși, apar frecvent și forțe exterioare concentrate (de ex.: explozie în interiorul unui corp masiv; forțe de reacțiune în puncte ale frontierei în care un corp masiv e rezemat pe piloni etc.).

Un mod unitar de a trata împreună sarcinile concentrate și cele repartizate e sugerat de ideea de *distribuție* sau *funcție generalizată* (vezi § A.2). În acest scop, să considerăm un șir de domenii $\mathscr{V}_\varepsilon \subset \mathscr{V}$, funcții de un parametru ε (de ex.: un șir de bule $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$, sau un șir de cuburi cu centrele în $\boldsymbol{x}$ și de laturi 2ε), pentru care $d(\mathscr{V}_\varepsilon) \to 0$ pentru $\varepsilon \to 0$. Dacă pentru $\varepsilon' < \varepsilon''$ avem și $\mathscr{V}_{\varepsilon'} \subset \mathscr{V}_{\varepsilon''}$, se poate arăta că aceste domenii conțin un singur punct comun, care este $\boldsymbol{x}$.

Să presupunem acum că rezultanta $\mathcal{R}(\mathcal{V}_\varepsilon)$ există pentru orice ε. Dacă există un vector $\boldsymbol{Q}$ astfel încît

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{R}(\mathcal{V}_\varepsilon) = \begin{cases} \boldsymbol{Q} \text{ dacă } \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_\varepsilon \text{ pentru orice } \varepsilon, \\ 0 \text{ dacă } \boldsymbol{x} \notin \mathcal{V}_\varepsilon \text{ de la un anumit } \varepsilon, \end{cases} \tag{4}$$

atunci se spune că în $\boldsymbol{x}$ este aplicată o *forță concentrată* $\boldsymbol{Q}$. (Pentru o definiție mai detaliată, vezi de ex. E. Sternberg și S. Al-Khozaie [1], § 2.)

Există o legătură evidentă între această definiție și definiția (A.2.7), (A.2.8) a funcției δ a lui Dirac (adaptată pentru cazul tridimensional). Aceasta permite să se scrie orice forță de volum concentrată, aplicată într-un punct $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, sub forma

$$\boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{Q}\,\delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3), \tag{5}$$

ceea ce se poate înțelege precum urmează: $\boldsymbol{Q}$ este o densitate de forță, nulă pentru $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\xi}$, infinită pentru $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$, și a cărei integrală pe $\mathcal{E}_3$ este $\boldsymbol{Q}$.

O definiție similară poate fi dată pentru forțele concentrate superficiale; aci se impune însă un studiu special al funcției δ definite pe o suprafață (vezi de ex. I. Ghelfand și G. Șilov [1], vol. 1, § 3.1). În cazul particular în care $\mathcal{S}$ conține o porțiune plană (fie $x_3 = 0$), forța concentrată aplicată în $(\xi_1, \xi_2, 0)$ se scrie

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \boldsymbol{q}\,\delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2), \tag{6}$$

unde $\boldsymbol{q}$ este un vector constant de componente q_1, q_2. Pentru $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{i}_j$, respectiv $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}_j$, avem de a face cu forțe concentrate *unitare*, aplicate în punctul $\boldsymbol{\xi}$, și dirijate paralel cu axa Ox_j.

Pentru studiul problemelor privitoare la forțele concentrate, vezi de exemplu C. Pearson [2], capitolul 5; G. Neidhardt și E. Sternberg [1]; E. Sternberg și R. Eubanks [1], [2].

§ 2. FORȚE INTERIOARE. TENSIUNI

a) *Vectorul tensiune*

Sub acțiunea forțelor exterioare iau naștere *forțe interioare* între particulele ce alcătuiesc corpul $\mathcal{V}$. Natura fizică a acestor forțe nu ne interesează. Pentru a le studia, se face uz de *metoda secțiunilor imaginare* propusă de Cauchy.

Să presupunem că corpul $\mathcal{V}$ este în echilibru și să separăm (imaginar) din el o porțiune $\mathcal{V}_1$ (a cărei frontieră poate fi interioară lui $\mathcal{V}$ sau nu) și porțiunea complementară $\mathcal{V}_2$. Vom nota cu $\mathcal{S}_i$ acea parte a lui $\mathcal{S}$ care aparține frontierei lui $\mathcal{V}_i$ $(i = 1, 2)$ și cu $\mathcal{S}_{12}$ frontiera comună a domeniilor $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, presupusă a fi cu plan tangent și cu două fețe.

Pentru ca porţiunea $\mathscr{V}_1$ să-şi păstreze nealterat echilibrul după separare, trebuie ca acţiunea părţii $\mathscr{V}_2$ (care transmite lui $\mathscr{V}_1$ efectul forţelor exterioare ce acţionează asupra lui $\mathscr{V}_2$ şi a frontierei sale, precum şi acţiunea forţelor interioare ce iau naştere în $\mathscr{V}_2$) să fie înlocuită prin acţiunea anumitor forţe aplicate pe $\mathscr{S}_{12}$. Aceste forţe trebuie deci alese în aşa fel încît $\mathscr{V}_1$ să rămînă în echilibru, fără nici o schimbare a configuraţiei sale, sub acţiunea tuturor forţelor exterioare aplicate anterior asupra sa, *plus* forţele de interacţiune dintre $\mathscr{V}_1$ şi $\mathscr{V}_2$ introduse mai sus. Acestea au rolul unor forţe de coeziune şi considerarea lor echivalează cu utilizarea ipotezei rigidizării părţilor (§ 0.4, c).

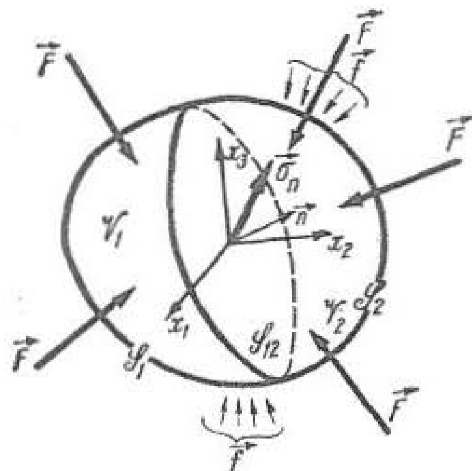


Fig. 2.2.1

Definind o densitate a forţelor de interacţiune pe $\mathscr{S}_{12}$, ajungem printr-un raţionament similar celui din § 1, la noţiunea de tensiune internă sau pur şi simplu *tensiune*:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \lim \frac{\mathscr{R}(\mathscr{S}'_{12})}{\operatorname{mes}(\mathscr{S}'_{12})} \quad \text{pentru } \boldsymbol{x} \in \mathscr{S}'_{12} \subset \mathscr{S}_{12},\ \mathrm{d}(\mathscr{S}'_{12}) \to 0. \qquad (1)$$

Aceasta apare a fi deci o mărime vectorială (*vectorul tensiune*), de dimensiune FL^{-2}; modulul său se măsoară în kgf/cm². Într-o formă deplin conturată, introducerea acestei noţiuni aparţine lui Cauchy (pentru istoricul chestiunii, vezi C. Truesdell [6]).

Subliniem aci — odată pentru totdeauna — că tensiunile $\boldsymbol{\sigma}$ repartizate pe frontiera $\mathscr{S}'$ a unui subdomeniu $\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}$, *joacă rolul de forţe superficiale exterioare în raport cu* $\mathscr{V}'$.

b) *Proprietăţile vectorului tensiune*

Vectorul tensiune $\boldsymbol{\sigma}$ este o funcţie de punct. Dar în primul rînd, el depinde de suprafaţa de separaţie aleasă; în al doilea rînd, atîta timp cît se cere ca orice parte separată din $\mathscr{V}$ să fie în echilibru *ca solid rigid*, (adică *numai* din punctul de vedere al sistemului de forţe aplicat asupra sa), rezultă că tensiunile distribuite pe suprafeţele de separaţie nu sînt determinate decît abstracţie făcînd de un sistem de forţe static echivalent cu zero.

Pentru a elimina prima din aceste dificultăţi, să arătăm că vectorul tensiune $\boldsymbol{\sigma}$ este funcţie de punct şi de normala la suprafaţa de separaţie în acel punct. În acest scop să împărţim domeniul mărginit $\mathscr{V}$ în

trei subdomenii $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2, \mathscr{V}_3$. Să considerăm mai întîi suprafața $\mathscr{S}_{13} + \mathscr{S}_{23}$. Pe suprafețele $\mathscr{S}_{13}$ și $\mathscr{S}_{23}$ — frontiere ale domeniilor $\mathscr{V}_1$ și $\mathscr{V}_2$ — apar, în virtutea principiului acțiunii și reacțiunii, tensiuni egale și de semne contrare tensiunilor ce iau naștere pe aceleași suprafețe, privite ca mărginind domeniul $\mathscr{V}_3$ (aflat și el — separat — în echilibru).

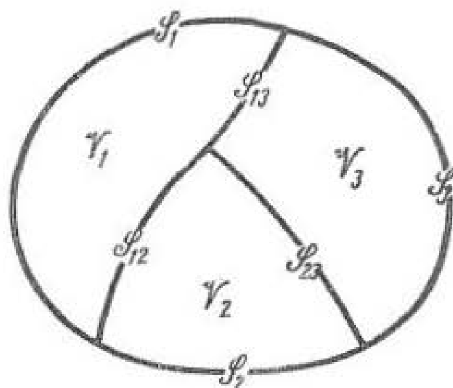


Fig. 2.2.2

Secționînd acum $\mathscr{V}$ după $\mathscr{S}_{13} + \mathscr{S}_{12}$, tensiunile ce apar pe $\mathscr{S}_{13}$ rămîn aceleași, deoarece în starea de echilibru a lui $\mathscr{V}_3$ nu s-a schimbat nimic.

Prin urmare, tensiunea pe o porțiune oarecare a suprafeței de separație nu depinde de forma acesteia în restul ei.

Fie în particular un element dS' al unei suprafețe de separație, deplin caracterizat de poziția centrului său $\boldsymbol{x}$ și de normala sa $\boldsymbol{n}$. Raționamentele de mai sus impun să notăm vectorul tensiune cu $\boldsymbol{\sigma}_n$, iar componentele sale cu σ_{ni} $(i = 1, 2, 3)$ — subînțelegînd că el depinde și de $\boldsymbol{x}$.

Pentru a dovedi însă că $\boldsymbol{\sigma}_n$ depinde *numai* de $\boldsymbol{x}$ și $\boldsymbol{n}$, trebuie să putem *alege* dintre toate acele sisteme de forțe static echivalente, repartizate pe o suprafață imaginară de separație, pe acela care corespunde echilibrului lui $\mathscr{V}$ ca corp *deformabil*. În virtutea semnificației sale mecanice, acest sistem este, în fapt, unic. Determinarea sa va fi posibilă abia după stabilirea legăturii dintre deplasări, deformații și tensiuni și după demonstrarea unei teoreme de unicitate (vezi § 4.5).

Elementul dS' posedă două fețe, așadar două sensuri pozitive ale normalei — după cum îl privim ca aparținînd lui $\overline{\mathscr{V}}_1$ sau $\overline{\mathscr{V}}_2$; de aci rezultă

$$\boldsymbol{\sigma}_{-n}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{x}) . \tag{2}$$

În general, $\boldsymbol{\sigma}_n$ nu are același suport cu $\boldsymbol{n}$. Componenta sa dirijată după $\boldsymbol{n}$ se numește *componentă normală*: $N = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{n}$. Orice componentă dispusă în planul elementului dS' se numește *componentă tangențială* sau încă *de alunecare*.

Elementul considerat este supus la *întindere* (tracțiune) sau *compresiune*, după semnul — pozitiv sau negativ — al lui N. (Evident, este vorba de întindere sau compresiune asupra acelei părți din $\mathscr{V}$ pentru care $\boldsymbol{n}$ e normală exterioară.) Dacă $N = 0$, elementul este supus numai la o tensiune tangențială.

Determinarea lui $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{x})$ rezolvă problema forțelor interioare ce apar în $\mathscr{V}$ sub acțiunea forțelor exterioare $\boldsymbol{F}$ și $\boldsymbol{f}$. Legătura dintre vectorii $\boldsymbol{\sigma}_n$ și $\boldsymbol{f}$ rezultă din chiar definiția lor: tensiunea pe un element de suprafață al frontierei este chiar tensiunea superficială

$$\boldsymbol{\sigma}_n|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{f}, \tag{3}$$

unde $\boldsymbol{n}$ este normala exterioară la $\mathcal{S}$, iar *cantitatea* $\boldsymbol{\sigma}_n|_{\mathcal{S}}$ *este înțeleasă în sensul valorii la limită definite în* (1.1.6) — (1.1.8).

Relația dintre vectorii $\boldsymbol{\sigma}_n$ și $\boldsymbol{F}$ va fi dată în § 4.

§ 3. STAREA DE TENSIUNE ÎN VECINĂTATEA UNUI PUNCT. COMPONENTELE TENSIUNII

a) *Matricea tensiune*

A cunoaște starea de tensiune în vecinătatea unui punct înseamnă a cunoaște tensiunile ce acționează pe *toate* elementele de suprafață ce trec prin el. Să reținem deocamdată trei elemente paralele cu planele de coordonate, așadar de normale paralele cu direcțiile pozitive ale axelor. Vectorii tensiune corespunzători se vor nota $\boldsymbol{\sigma}_i$, iar componentele lor, cu σ_{ij}.

În modul acesta definim în fiecare punct o matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ de componente $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$, numită *matricea tensiune*, sau pur și simplu *tensiune* în punctul considerat. Mărimile $\boldsymbol{\sigma}_j$ se numesc *componentele tensiunii*. (Dacă există risc de confuzie, se va folosi semnul (;) ; de ex., $\sigma_{-1;2}$.)

O imagine geometrică asupra componentelor tensiunii se obține considerînd un cub elementar cu centrul în $\boldsymbol{x}$ și cu fețele paralele cu planele de coordonate. (În fig. 2.3.1. am trasat *versorii* direcțiilor σ_{ij} pe fețele de normale pozitive.)

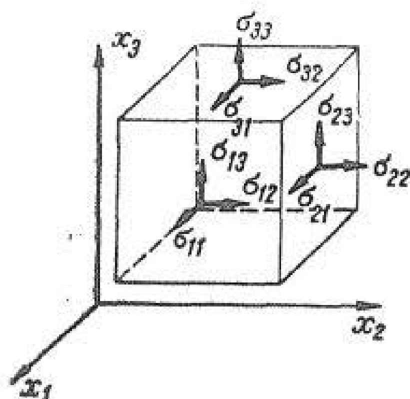


Fig. 2.3.1

Componentele σ_{ii} se numesc *componente normale*, iar celelalte, *componente tangențiale* ale tensiunii.

OBSERVAȚIE. Notațiile cele mai frecvente în literatura clasică sînt cele propuse de G. Kirchhoff [3], § 11.2: $(X_x, \ldots, X_y, \ldots)$, unde majuscula indică axa de proiecție, iar indicele — normala la elementul considerat. Des folosite sînt și notațiile lui Th. von Karman [1]: $(\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots)$.

Notația σ_{ij} este compactă și simplă. Aproape toate lucrările contemporane folosesc această notație — sau variantele ei — întrucît ea este indispensabilă cînd se tinde spre folosirea mijloacelor analizei tensoriale. Noi facem uz de ea aci numai pentru simplificarea scrierii și pentru evidențierea paralelismului cu teoria deformațiilor. (Vezi și observația de la finele § 1.5, pag. 46.)

Pentru ceea ce numim *tensiuni*, se folosește adesea (mai ales în literatura tehnică) și denumirea de *eforturi unitare*.

b) *Relațiile lui Cauchy*

Alegerea componentelor σ_{ij} implică un mare grad de arbitrar, provenit din alegerea axelor. Este firesc deci să căutăm vectorul $\boldsymbol{\sigma}_n$ pe un element de normală *oarecare* $\boldsymbol{n}$, ca funcție de componentele σ_{ij}.

Să considerăm deci un element de normală $\boldsymbol{n}$ caracterizat de mărimile $n_i = \cos(\boldsymbol{n}, x_i)$ — *notație pe care o vom păstra de acum încolo* — și să construim un tetraedru dreptunghic PABC (fig. 2.3.2, unde am ales normala în așa fel încît $n_i > 0$; ca urmare, elementele PBC, PAC, și PAB au normalele paralele cu direcțiile *negative* ale axelor).

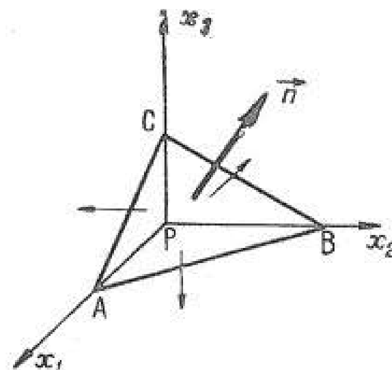


Fig. 2.3.2

Dacă componentele forțelor de volum și ale vectorilor tensiune sînt funcții *continue*, putem calcula toate aceste mărimi în același punct (fie el $P \equiv \boldsymbol{x}$): valorile lor reale se abat de la valoarea în P cu cantități (pe care le vom nota cu η cu diferiți indici) care tind la zero o dată cu dimensiunile tetraedrului, de pildă o dată cu înălțimea h coborîtă din P.

Notînd cu D aria elementului ABC, avem pentru ariile PBC, PAC, PAB și pentru volumul V, valorile

$$D_1 = Dn_1, \quad D_2 = Dn_2, \quad D_3 = Dn_3, \quad V = \frac{1}{3} hD. \tag{1}$$

Tetraedrul se găsește în echilibru sub acțiunea forțelor de volum *și* a tensiunilor aplicate pe fețele sale. Proiectînd pe axa Ox_i condiția ca rezultanta forțelor exterioare să fie nulă, și ținînd seama că vectorii tensiune pe fețele paralele cu planele de coordonate sînt egali respectiv cu $-\boldsymbol{\sigma}_1$, $-\boldsymbol{\sigma}_2$, $-\boldsymbol{\sigma}_3$, obținem

$$(F_i + \eta)\frac{1}{3} hD + (\sigma_{ni} + \eta')D + (-\sigma_{ji} + \eta_j)Dn_j = 0. \tag{2}$$

Împărțind la aria D și trecînd la limită pentru $h \to 0$ obținem

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ji}\, n_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{3}$$

toate mărimile fiind calculate în punctul $P \equiv \boldsymbol{x}$.

Relația (3) rămîne valabilă, oricare ar fi orientarea elementului de normală $\boldsymbol{n}$. Într-adevăr, fie de pildă $n_1 < 0$. Tetraedrul corespunzător are în acest caz drept normală la fața paralelă cu Ox_2x_3, chiar axa pozitivă Ox_1, astfel că în (2) trebuie să înlocuim vectorul $-\boldsymbol{\sigma}_1$ cu $+\boldsymbol{\sigma}_1$. Pe de altă parte, prima din relațiile (1) trebuie înlocuită acum cu $D_1 = -Dn_1$, întrucît aria D_1 este pozitivă. Produsul $-\sigma_{1i}Dn_1$ din (2) rămîne deci neschimbat, astfel că și relația (3) nu depinde de poziția elementului ales.

Relaţiile (3) — stabilite de A. Cauchy [1] — sînt relaţii *întregi*. Aceasta se datorește faptului că în definirea tensiunilor s-a făcut abstracţie de variaţia componentelor σ_{ij} de la o faţă la alta a cubului elementar, variaţie care va interveni în alte ecuaţii.

În sensul furnizat de (3), matricea $\mathbf{\Sigma}$ *caracterizează* deci starea de tensiune în punctul considerat (compară cu § 1.4, pag. 43).

Totodată, relaţiile (3) restrîng gradul de arbitrar despre care am vorbit la pag. 66, impunînd anumite legături între vectorii tensiune pe elemente de suprafaţă ce trec prin acelaşi punct. Acest pas înainte e datorat faptului că, în timp ce metoda secţiunilor imaginare introduce ideea de tensiune prin considerarea echilibrului (rigid) al unei porţiuni *finite* a corpului $\mathscr{V}$, relaţiile (3) provin din considerarea echilibrului (de asemenea ca solid rigid, şi numai în primă aproximaţie) al unor elemente *infinitezimale*.

Absenţa forţelor de volum din (3) nu înseamnă că forţele de volum nu influenţează asupra stării de tensiune — ci numai că această influenţă nu apare în expresia lui $\boldsymbol{\sigma}_n$ *ca funcţie de direcţia* $\boldsymbol{n}$; în fapt, ea se exercită prin intermediul mărimilor σ_{ij}, în a căror determinare aceste forţe intervin explicit.

Totuşi, adesea se petrece chiar pentru ansamblul corpului un fenomen analog: influenţa forţelor de volum este neglijabilă, faţă de factorul esenţial, constituit de forţele superficiale (ca aci de componentele σ_{ij}) şi de legături. (Vezi şi § 4.10.)

§ 4. ECUAŢIILE DE ECHILIBRU

a) Asupra ecuaţiilor statice ale teoriei liniare

Întrucît putem exprima acum orice vector tensiune prin anumite componente standard, ecuaţiile de echilibru pentru un domeniu oarecare trebuie să conducă la relaţii între forţele exterioare şi componentele tensiunii.

Întrucît echilibrul se stabileşte în corpul *deformat*, toate mărimile relative la starea de tensiune ar trebui scrise nu în coordonatele iniţiale, ci în coordonatele finale $Ox_1^* x_2^* x_3^*$. Revenind la coordonatele iniţiale, rezultă că parametrii geometrici trebuie să intervină şi ei: componentele deplasării şi deformaţiei vor apare în coeficienţii ecuaţiilor de echilibru, în coordonatele în raport cu care se efectuează derivări etc. De aci va proveni caracterul esenţialmente *neliniar* al acestor ecuaţii.

Obţinerea lor nu e dificilă, dar rezolvarea lor e practic imposibilă cu mijloacele actuale ale matematicii.

Se poate însă demonstra că, *în cadrul liniarităţii geometrice*, termenii care introduc deplasările şi deformaţiile în ecuaţiile de echilibru şi în condiţiile la limită care le însoţesc, sînt neglijabili faţă de cei independenţi de deplasări şi deformaţii. (Aceasta nu înseamnă că *soluţia* ecuaţiilor astfel simplificate este suficient de apropiată de cea a ecuaţiilor exacte: studiul acestei probleme dificile e deschis.) Pentru detalii, vezi de exemplu V. Novojilov [1], capitolul 2; [3], capitolul 2.

În cele ce urmează, ne vom situa în cadrul liniarității geometrice, ceea ce va permite studiul ecuațiilor de echilibru în coordonatele inițiale. Așadar, deși domeniul trece în starea $\mathscr{V}^*$ ca stare de echilibru, vom studia această stare în primă aproximație tot pentru domeniul $\mathscr{V}$. Același lucru e valabil și pentru condițiile la limită, *chiar dacă ele implică modificări ale frontierei* (vezi de ex. § 10.2).

Prin urmare, eventuala neliniaritate a ecuațiilor de echilibru e de natură geometrică și dispare o dată cu neliniaritatea geometrică. Neliniaritate „statică" nu există: dacă forțele ce intervin în problemă depășesc anumite limite, ecuațiile de echilibru rămîn liniare în coordonatele deformate, și devin neliniare în coordonatele inițiale numai datorită deplasărilor și deformațiilor mari pe care ele le provoacă. (Uneori — ca de pildă în problemele de stabilitate a echilibrului elastic, unde deformații mici coexistă cu rotații mari — prezintă utilitate scrierea acestor ecuații *liniare* în coordonatele deformate.)

Acesta este motivul pentru care studiul stării de tensiune trebuia să urmeze *după* cel al stării de deformație: un studiu pur static al echilibrului corpului deformabil este în principiu cu neputință. Numai în cadrul liniarității geometrice, se obțin ecuații „pur" statice, așa cum ecuațiile (1.5.4) sau (1.10.10) sînt „pur" geometrice.

b) Ecuațiile lui Cauchy

Să considerăm un domeniu $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$ a cărui frontieră $\mathscr{S}'$ e suficient de regulată pentru a permite folosirea formulei lui Gauss-Ostrogradskii (7.2.9). Domeniul $\mathscr{V}'$ este în echilibru sub acțiunea forțelor $\boldsymbol{F}$ și a tensiunilor $\boldsymbol{\sigma}_n$ pe $\mathscr{S}'$. Condiția ca *rezultanta* acestor forțe să fie nulă este

$$\iint\limits_{\mathscr{S}'} \sigma_{ni}\,\mathrm{d}S + \iiint\limits_{\mathscr{V}'} F_i\,\mathrm{d}V = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

de unde, introducînd relațiile (3.3):

$$\iint\limits_{\mathscr{S}'} \sigma_{ji}\, n_j\,\mathrm{d}S + \iiint\limits_{\mathscr{V}'} F_i\,\mathrm{d}V = 0, \tag{2}$$

și încă, făcînd uz de formula lui Gauss-Ostrogradskii:

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}'} (\sigma_{ji,j} + F_i)\,\mathrm{d}V = 0. \tag{3}$$

Dacă întărim presupunerile din § 3 și cerem ca $\sigma_{ij} \in C^1(\mathscr{V})$, integrandul din (3) este o funcție continuă în $\mathscr{V}$. Din caracterul arbitrar al domeniului $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$ rezultă că relația (3) este posibilă dacă și numai dacă

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

ceea ce reprezintă legătura dintre componentele tensiunii și forțele de volum sub forma unor relații *diferențiale*.

OBSERVAŢIA 1. Acesta este momentul esenţial, care permite trecerea de la ecuaţiile *finite* de echilibru ale solidului rigid, la ecuaţiile *diferenţiale* de echilibru ale mediului continuu deformabil, echivalente în fond cu condiţiile de echilibru scrise pentru un element *infinitezimal* de volum arbitrar. La baza acestui raţionament stă atît ipoteza mediului continuu, cît şi cea a rigidizării.

Ecuaţiile (4) sînt adevărate şi în cazul solidului rigid — dar rămîn inutile. Ele dau anumite legături între forţele exterioare şi cele interioare, legături totuşi insuficiente pentru a alege dintre sistemele static echivalente menţionate în § 2, pag. 66, pe cel potrivit — atîta timp cît nu facem uz de ideea de deformaţie.

Mai departe, condiţia ca *momentul rezultant* al tuturor forţelor exterioare aplicate asupra porţiunii $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$ să fie nul, este

$$\iint_{\mathscr{S}'} (x_k \sigma_{nh} - x_h \sigma_{nk})\, dS + \iint_{\mathscr{V}'} (x_k F_h - x_h F_k)\, dV = 0, \tag{5}$$

(unde am presupus că nu apar momente de volum; vezi § 1, pag. 63). Introducînd aci (3.3), căpătăm

$$\iint_{\mathscr{S}'} (x_k \sigma_{jh} - x_h \sigma_{jk})\, n_j\, dS + \iiint_{\mathscr{V}'} (x_k F_h - x_h F_k)\, dV = 0, \tag{6}$$

şi mai departe, cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradskii:

$$\iiint_{\mathscr{V}'} [x_k (\sigma_{jh,j} + F_h) - x_h (\sigma_{jk,j} + F_k) + \sigma_{kh} - \sigma_{hk}]\, dV = 0. \tag{7}$$

În virtutea relaţiilor (4), parantezele din (7) sînt nule, ceea ce conduce la

$$\iiint_{\mathscr{V}'} (\sigma_{hk} - \sigma_{kh})\, dV = 0; \tag{8}$$

ca şi în cazul integralei (3), de aci deducem

$$\sigma_{hk} = \sigma_{kh}. \tag{9}$$

Aceste relaţii exprimă *legea de reciprocitate* (sau de *dualitate*, sau încă de *simetrie*) *a tensiunilor tangenţiale* (vezi fig. 2.2.2). În prezenţa momentelor de volum, aceste relaţii îşi pierd valabilitatea — ceea ce justifică denumirea de „teorie asimetrică" dată teoriei menţionate în § 1, pag. 63.

Ultimele 3 ecuaţii de echilibru arată că matricea $\boldsymbol{\Sigma}$ e simetrică, rezultat similar celui privitor la matricea $\mathbb{E}$.

Ecuaţiile de echilibru iau deci forma finală

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{10}$$

(unde vom ţine încă seama, dacă va fi cazul, de simetria matricii $\boldsymbol{\Sigma}$). Acestea se numesc *ecuaţiile statice* ale mecanicii mediului continuu (scrise

în cazul liniarității geometrice). Ele au fost stabilite de A. Cauchy [3], [4] și poartă frecvent numele de *ecuațiile lui Cauchy*.

OBSERVAȚIA 2. Ecuațiile (10) se pot obține și scriind condițiile de echilibru ale cubului elementar din figura 2.2.2 și ținînd seama de variația componentelor tensiunii de la o față la alta a cubului — variație ce se datorează tocmai acțiunii forțelor de volum. (Vezi și § 3, pag. 70.)

OBSERVAȚIA 3. Ecuațiile (10) pot fi scrise sub o formă simbolică simplă. Anume, se definește acțiunea operatorului div asupra unei matrice $\mathbf{Q}$ de componente q_{ij}, spunînd că div $\mathbf{Q}$ este mărimea cu trei componente $q_{ij,j}$. Ecuațiile (10) iau acum forma (compară cu (1.5.9)):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{F} = 0. \tag{11}$$

Evident, ecuațiile de echilibru (10) apar însoțite de anumite condiții la limită. Dacă acestea reprezintă legături între componentele tensiunii și forțele superficiale, ele se obțin din (2.3), (3.3) sub forma

$$\sigma_{ij}\, n_j \big|_{\mathscr{S}} = f_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{12}$$

(unde primul membru poate fi interpretat ca produs scalar al tensorului Σ cu vectorul $\boldsymbol{n}$).

În consecință, am obținut pentru cele 6 funcții necunoscute σ_{ij}, un sistem de numai trei ecuații cu derivate parțiale de primul ordin, liniare, cu coeficienți constanți, și trei condiții la limită, de asemenea liniare. Rezultă că problemele mecanicii mediului continuu nu pot fi rezolvate numai ca probleme în tensiuni, ele furnizîndu-ne astfel un model netrivial de problemă static nedeterminată.

Acest fapt trebuie legat și de observația din § 2, pag. 67, asupra imposibilității de a determina componentele tensiunii fără a fi stabilit în prealabil legătura dintre tensiuni și deformații (în teoria elasticității), fără a considera anumite relații suplimentare în tensiuni (cum se procedează în unele variante ale teoriei plasticității) etc.

Forma sistemului (10) justifică raționamentele de la începutul paragrafului: în cazul neliniarității geometrice, tensiunile ar trebui raportate la elemente de suprafață modificate iar derivările ar trebui efectuate în raport cu variabilele $x_i^* = x_i + u_i$. Deși aparent „pur" statice, ecuațiile (10) sînt în fapt numai ecuații simplificate; sistemul ce ar corespunde relațiilor geometrice (1.10.10) ar cuprinde și parametrii geometrici.

Liniaritatea ecuațiilor (10) și a condițiilor (12) permite folosirea principiului superpoziției (§ 4.2, pag. 129), iar mijloacele de investigare matematică a unui astfel de sistem sînt relativ bine puse la punct.

c) Teorema de reciprocitate

Relația (9) poate fi generalizată într-un mod semnificativ. Să considerăm într-un punct două elemente de suprafață de normale $\boldsymbol{n}'$ și $\boldsymbol{n}''$. Ținînd seama de (9) în (3.3), obținem

$$\sigma_{n'i} = \sigma_{ij}\, n'_j, \quad \sigma_{n''i} = \sigma_{ij}\, n''_j. \tag{13}$$

Proiecţia vectorului $\boldsymbol{\sigma}_{n'}$ pe direcţia $\boldsymbol{n}''$ este

$$\mathrm{pr}_{n''}\, \boldsymbol{\sigma}_{n'} = \sigma_{n'i}\, n_i'' = \sigma_{ij}\, n_j'\, n_i'' . \tag{14}$$

Analog avem şi

$$\mathrm{pr}_{n'}\, \boldsymbol{\sigma}_{n''} = \sigma_{n''i}\, n_i' = \sigma_{ij}\, n_j''\, n_i' . \tag{15}$$

Intervertind în (15) indicii i, j şi ţinînd din nou seama de relaţia (9), obţinem *teorema de reciprocitate* a lui A. Cauchy [5]:

$$\mathrm{pr}_{n'}\, \boldsymbol{\sigma}_{n''} = \mathrm{pr}_{n''}\, \boldsymbol{\sigma}_{n'} . \tag{16}$$

Luînd pentru $\boldsymbol{n}'$ şi $\boldsymbol{n}''$ direcţii paralele cu axele, obţinem din nou egalitatea (9).

§ 5. TENSORUL TENSIUNE. PROPRIETĂŢI

a) Tensorul tensiune

Ca şi în § 1.6, să considerăm o rotaţie a axelor, poziţia noilor axe $Ox_1'\, x_2'\, x_3'$ fiind caracterizată de matricea n_{ij} din (1.6.1) şi de relaţiile (1.6.2).

Componenta normală a lui $\boldsymbol{\sigma}_n$ se obţine luînd $\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n}'' = \boldsymbol{n}$ în (4.14):

$$N = \mathrm{pr}_n\, \boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{ij}\, n_i\, n_j . \tag{1}$$

Să considerăm un vector $\boldsymbol{\xi}$ paralel cu $\boldsymbol{n}$:

$$\xi_i = |\boldsymbol{\xi}|\, n_i , \tag{2}$$

şi să construim forma patratică analogă cu cea din (1.6.5):

$$s\,(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = \sigma_{ij}\, \xi_i\, \xi_j . \tag{3}$$

Relaţia (1) se scrie acum

$$N\, |\boldsymbol{\xi}|^2 = s\,(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3), \tag{4}$$

unde atît componenta normală N, cît şi modulul $|\boldsymbol{\xi}|^2$, sînt invarianţi. Ca şi în § 1.6, ajungem astfel la analogul relaţiei (1.6.6):

$$\sigma_{ij}' = n_{ih}\, n_{jk}\, \sigma_{hk} , \tag{5}$$

ceea ce arată că componentele tensiunii alcătuiesc un tensor simetric de al doilea ordin, numit *tensorul tensiune*. (Denumirea e tautologică — cuvîntul „tensor" venind chiar de la „tensiune". Acesta a fost, istoriceşte

vorbind, primul exemplu de sistem de mărimi ce se supun unei legi mai complicate decît legea de transformare vectorială, dar care o generalizează direct.)

b) *Vectorul tensiune*

Ceea ce am numit în §2 „vector tensiune" este o mărime alcătuită deci cu ajutorul componentelor acestui tensor. Se verifică ușor că $\boldsymbol{\sigma}_n$ este un vector. Într-adevăr, pentru componentele n_i avem din (1.6.3):

$$n'_i = n_{ij}\, n_j. \tag{6}$$

Relația (3.3) scrisă pentru $\boldsymbol{\sigma}'_n$ (același vector, în noul sistem de axe) dă prin urmare, folosind și (5):

$$\sigma'_{ni} = \sigma'_{ij}\, n'_j = n_{ih}\, n_{jk}\, \sigma_{hk}\, n_{jl}\, n_l\,,$$

de unde, utilizînd (1.6.2) și din nou (3.3), obținem

$$\sigma'_{ni} = n_{ih}\, \sigma_{hk}\, n_k = n_{ih}\, \sigma_{nh}\,, \tag{7}$$

astfel că $\boldsymbol{\sigma}_n$ respectă legea de transformare vectorială. Mărimea

$$\sigma^2_{ni} = \sigma_{ij}\, \sigma_{ih}\, n_j\, n_h \tag{8}$$

este un invariant: pătratul modulului vectorului tensiune. Într-adevăr, avem pe rînd

$$\sigma'^2_{ni} = \sigma'_{ij}\, n'_j\, \sigma'_{ih}\, n'_h = n_{i\alpha}\, n_{j\beta}\, \sigma_{\alpha\beta}\, n_{jp}\, n_p\, n_{i\gamma}\, n_{h\delta}\, \sigma_{\gamma\delta}\, n_{hq}\, n_q =$$
$$= \delta_{\alpha\gamma}\, \delta_{\beta p}\, \delta_{q\delta}\, n_p\, n_q\, \sigma_{\alpha\beta}\, \sigma_{\gamma\delta} = \sigma_{\alpha\beta}\, n_\beta\, \sigma_{\alpha\delta}\, n_\delta\,.$$

Mărimile $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ sînt vectori. Trebuie să distingem însă între aceste mărimi — și liniile matricei Σ. Astfel de pildă, cantitatea $\sigma^2_{11} + \sigma^2_{12} + \sigma^2_{13}$ *nu este un invariant* la o schimbare de axe, dacă înlocuim σ_{ij} prin σ'_{ij}. Pentru a sublinia — dacă e cazul — caracterul de componentă a unui *vector* a mărimii σ_{11}, de pildă, o vom nota $(\boldsymbol{\sigma}_1)_1$. La o schimbare de axe, σ'_{11} înseamnă componenta pe axa x'_1 a tensiunii pe elementul de normală x'_1, în timp ce $(\boldsymbol{\sigma}_1)'_1$ este componenta pe axa x'_1 a tensiunii pe elementul de normală *neschimbată* x_1.

c) *Direcții principale*

Consecințele ce decurg din caracterul tensorial al tensiunii pot fi expuse în deplin paralelism cu cele din teoria deformației. În particular, acest caracter tensorial poate sluji la transcrierea invariantă a *tuturor* relațiilor teoriei.

Studiul direcțiilor principale repetă cele spuse în §1.7. Există deci trei direcții triortogonale, numite *axe principale ale tensiunii*, pentru care tensiunile tangențiale σ_{ij} $(i \neq j)$ sînt nule, iar tensiunile normale

σ_{ii} au caracter staționar. (Dat fiind că tensiunile tangențiale sînt nule, rezultă că pe aceste trei direcții vectorul tensiune coincide cu componenta sa normală, pentru care s-a pus problema de extremum.) Valorile staționare ale tensiunii normale se obțin rezolvînd o ecuație analogă cu (1.7.6) :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

ale cărei rădăcini $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ se numesc *tensiuni* (normale) *principale*. Matricea tensiunilor redusă la axele principale ia, evident, forma diagonală.

Cunoașterea stării de tensiune este asigurată de cunoașterea celor 6 componente σ_{ij}. Reducerea tensorului tensiune la axele principale arată că cunoașterea celor șase componente σ_{ij} este echivalentă cu cunoașterea celor trei tensiuni σ_i și a celor trei unghiuri ale lui Euler care caracterizează poziția axelor principale.

Liniaritatea relațiilor (3.3) și (4.10) ne asigură că starea de tensiune într-un punct poate fi reprezentată ca sumă a trei tensiuni de întindere (sau compresiune) după axe, și a trei tensiuni de alunecare în planele coordonate corespunzătoare. Orice stare de tensiune poate fi redusă la suprapunerea a numai trei tensiuni de întindere (compresiune) după axele principale.

d) Cuadricele tensiunii

Analog celor din § 1.8, se poate construi o cuadrică (sau două cuadrice) ale tensiunii. Rolul formei patratice $e(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ îl are aci forma $s(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, iar rolul alungirii ε_m pe direcția $\boldsymbol{\xi}$ îl are aci componenta normală N a tensiunii. În felul acesta ajungem la relația (4), care joacă aci rolul relației (1.8.5).

Construind cuadricele

$$s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \pm c^2, \tag{10}$$

valorile lui N se obțin ducînd din centrul cuadricei o direcție paralelă cu $\boldsymbol{n}$, luînd pentru $|\boldsymbol{\xi}|$ distanța dintre centru și punctul în care direcția astfel aleasă înțeapă cuadrica și calculînd raportul

$$N = \pm c^2/|\boldsymbol{\xi}|^2, \tag{11}$$

unde semnele $\pm$ corespund întinderii, respectiv compresiunii.

Pentru a determina vectorul $\boldsymbol{\sigma}_n$, să introducem (2) în (3.3), de unde

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij}\xi_j/|\boldsymbol{\xi}| = \frac{1}{2}(\sigma_{kj}\xi_k\xi_j)_{,i}/|\boldsymbol{\xi}|,$$

adică

$$\sigma_{ni} = \frac{1}{2} s_{,i} / |\boldsymbol{\xi}|. \tag{12}$$

(Amintim că $\boldsymbol{x}$ este fix, iar derivările se efectuează în raport cu ξ_i). Vectorul $\boldsymbol{\sigma}_n$ rezultă deci paralel cu normala la cuadricele (10).

Pentru a construi acest vector, trebuie să construim așadar cuadrica (10) și să ducem o direcție paralelă cu $\boldsymbol{n}$, care înțeapă una sau cealaltă din cuadrice într-un punct H. Normala la cuadrică în H definește direcția lui $\boldsymbol{\sigma}_n$. Relația (11) dă valoarea componentei sale normale N. Cunoscînd suportul vectorului $\boldsymbol{\sigma}_n$ și proiecția sa N pe o direcție dată, putem determina însuși vectorul $\boldsymbol{\sigma}_n$.

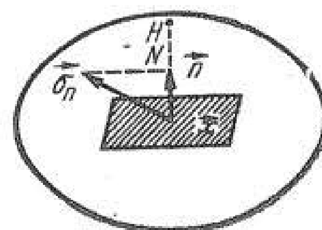


Fig. 2.5.1

Faptul că vectorul tensiune este paralel cu normala la cuadrică arată că, dacă $\boldsymbol{\sigma}_n$ este dirijat după $\boldsymbol{n}$ (așadar dacă tensiunea se reduce la componenta ei normală), atunci $\boldsymbol{\sigma}_n$ și $\boldsymbol{n}$ sînt dirijați după una din axele cuadricei. (Amintim că problema găsirii axelor unei cuadrice se rezolvă pornind chiar de la condiția ca normala să fie dirijată după raza vectoare. Se ajunge atunci tocmai la ecuația (9) și la analogul ecuațiilor (1.7.5).)

Raportînd cuadrica la axele principale, obținem din (10):

$$\sigma_1 \xi_1^2 + \sigma_2 \xi_2^2 + \sigma_3 \xi_3^2 = \pm c^2. \tag{13}$$

Se pot repeta acum cuvînt cu cuvînt cele spuse în § 1.8, pag. 53. Aceasta conduce la a considera stări de *tensiune antiplane* (vezi (1.8.9)), în care de exemplu

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0; \tag{14}$$

stări de tensiune plane (vezi (1.8.8)), în care de exemplu

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0; \tag{15}$$

și *stări de tensiune spațiale* (sau *tridimensionale*).

Pentru a ne da seama de *caracterul* repartiției tensiunilor în jurul unui punct, este suficientă cunoașterea *semnelor* tensiunilor principale. Într-adevăr, dacă toți $\sigma_i > 0$, trebuie să alegem semnul plus în (13), și obținem o singură cuadrică reală, un elipsoid; relația (11) ne dă

$$N = c^2 / |\boldsymbol{\xi}|^2 > 0, \tag{16}$$

astfel că pe toate direcțiile apar tensiuni de întindere. Dacă toți $\sigma_i < 0$, trebuie să alegem semnul minus; obținem tot un elipsoid, dar (11) devine

$$N = -c^2 / |\boldsymbol{\xi}|^2 < 0, \tag{17}$$

și pe toate direcțiile apar tensiuni de compresiune.

Dacă mărimile σ_i sînt de semne diferite, întîlnim mai multe posibilități. Să reținem de pildă cazul $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 < 0$. Relația (13) se scrie acum

$$|\sigma_1|\xi_1^2 + |\sigma_2|\xi_2^2 - |\sigma_3|\xi_3^2 = \pm c^2, \tag{18}$$

și reprezintă ansamblul a doi hiperboloizi conjugați. În interiorul conului asimptotic avem $N < 0$, iar în exterior, $N > 0$. Pe conul asimptotic, $N = 0$, așadar tensiunea se reduce la componenta sa tangențială. Pentru a construi însă efectiv acest con, trebuie să cunoaștem desigur nu numai semnele, ci și *valorile* tensiunilor principale.

OBSERVAȚIE. Construcția cuadricelor (13) este practic greu realizabilă, întrucît e vorba de o construcție spațială. Ea ne interesează aci numai pentru sublinierea unor aspecte geometrice ale problemei. Există construcții plane care permit descrierea efectivă a stării de tensiune (și tot astfel, de deformație) în vecinătatea oricărui punct. Pentru cea mai importantă din ele — *diagrama lui Mohr* — vezi de pildă A. Nadai [1], capitolul 10.

e) *Invarianți*

Pornind de la ecuația (9) se pot studia invarianții tensiunii, tot așa cum ecuația (1.7.6) a condus la studiul invarianților deformației. (Dacă s-ar accepta drept componente ale deformației cantitățile ε_{ii}, $2\varepsilon_{ij}$ — vezi Observația de la finele § 1.5 — atunci ecuațiile (1.7.6) și (9), și deci și invarianții corespunzători, ar avea forme diferite.)

Conchidem că există trei invarianți ai tensiunii:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;\\
\Sigma_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \quad (19)\\
\Sigma_3 &= \mathrm{Det}\,[\sigma_{ij}] = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.
\end{aligned}$$

Cel mai adesea vom nota $\Sigma_1 = \Theta$. Termenii din coloana a treia a acestor egalități reprezintă cazul particular, echivalent însă cu cel general, al celor din coloana a doua. Folosind notațiile (19), ecuația (9) ia forma

$$\sigma^3 - \Sigma_1\sigma^2 + \Sigma_2\sigma - \Sigma_3 = 0. \tag{20}$$

§ 6. TENSIUNILE TANGENȚIALE MAXIMALE

Determinarea axelor principale ale tensiunii este legată de chestiunea găsirii valorilor extremale ale componentei *normale* a tensiunii. Să căutăm acum direcțiile în lungul cărora componentele *tangențiale* ale tensiunii au caracter extremal.

Alegînd drept axe de coordonate, axele principale ale tensiunii, relațiile (3.3) devin[1])

$$\sigma_{ni} = \sigma_i n_i, \tag{1}$$

de unde

$$|\boldsymbol{\sigma}_n|^2 = \sigma_i^2 n_i^2. \tag{2}$$

Pe de altă parte, relația (5.1) ia forma

$$N = \sigma_i n_i^2. \tag{3}$$

Pentru mărimea T a componentei tangențiale avem deci

$$T^2 = |\boldsymbol{\sigma}_n|^2 - N^2 = \sigma_i^2 n_i^2 - (\sigma_i n_i^2)^2. \tag{4}$$

Ținînd seama aci de relația

$$\sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1, \tag{5}$$

obținem

$$T^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) n_2^2 + \sigma_3^2 - \\ - [(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3]^2. \tag{6}$$

Derivînd aci în raport cu n_i $(i = 1,2)$, obținem din (5), (6) sistemul

$$(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) n_1 - 2(A + \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3) n_1 = 0,$$
$$(\sigma_2^2 - \sigma_3^2) n_2 - 2(A + \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) n_2 = 0, \tag{7}$$
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

unde am notat

$$A = (\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2. \tag{8}$$

Să presupunem acum că ecuația (5.9) are rădăcinile distincte. Simplificînd în (7) cu $(\sigma_1 - \sigma_3)$, respectiv cu $(\sigma_2 - \sigma_3)$, obținem

$$(\sigma_1 - \sigma_3 - 2A) n_1 = 0, \quad (\sigma_2 - \sigma_3 - 2A) n_2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1. \tag{9}$$

Soluția banală $n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$, nu convine, întrucît ea dă pentru $\boldsymbol{n}$ direcția uneia dintre axele principale, așadar *minimul* $T^2 = 0$. Dimpotrivă, alegînd $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$, putem simplifica primele două ecuații (9) și conchide apoi prin scădere că $\sigma_2 = \sigma_1$, ceea ce contrazice presupunerea inițială.

Rămîne posibilitatea $n_1 = 0$, $n_2 \neq 0$, și cele analoge care se obțin prin permutări circulare ale indicilor 1, 2, 3. Ecuația a doua din (9) devine

$$\sigma_2 - \sigma_3 - 2(\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 = 0,$$

---

[1]) În (1) fără semnul sumă, dar și fără (!) — întrucît indicele i apare și în primul membru. În (2) și (3), indicele i este indice de sumare.

ceea ce dă $n_2 = \pm \sqrt{2}/2$. Ţinînd seama şi de a treia ecuaţie (9), deducem

$$n_1 = 0, \quad n_2 = n_3 = \pm \sqrt{2}/2, \tag{10}$$

şi prin permutări circulare, încă două soluţii de acelaşi tip.

Întrucît $n_1 = 0$, direcţia $\boldsymbol{n}$ este normală pe axa Ox_1. Aşadar, $\boldsymbol{n}$ este situat în planul Ox_2x_3, şi anume pe bisectoarea unghiului format de axele Ox_2 şi Ox_3. Elementul de suprafaţă avînd normala $\boldsymbol{n}$ va conţine deci axa Ox_1, fiind egal înclinat pe planele $x_2 = 0$ şi $x_3 = 0$.

În definitiv, în sistemul de axe principale, planele de coordonate sînt plane de tensiuni *normale* staţionare (în particular, extremale), iar planele bisectoare ale diedrelor coordonate sînt plane de tensiuni *tangenţiale* staţionare (în particular, extremale).

Să evaluăm tensiunile ce acţionează pe planele bisectoare. Introducînd (10) în (4), avem

$$T_1^2 = \frac{1}{2}\,\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\,\sigma_3^2 - \left(\frac{1}{2}\,\sigma_2 + \frac{1}{2}\,\sigma_3\right)^2,$$

de unde — pentru primul plan, şi apoi similar pentru celelalte :

$$T_1 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad T_2 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \quad T_3 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{11}$$

Componentele normale ale tensiunii pe aceleaşi plane se obţin introducînd (10) în (3), de unde — prin permutări circulare — :

$$N_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), \quad N_2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1), \quad N_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2). \tag{12}$$

Notînd cu σ_1 pe cea mai mare şi cu σ_3 pe cea mai mică (în valoare relativă !) dintre tensiunile principale, urmează că tensiunea tangenţială maximă este T_2.

CAPITOLUL 3

LEGĂTURA DINTRE STAREA DE TENSIUNE ŞI STAREA DE DEFORMAŢIE

§1. DESPRE IDEEA DE LEGE FIZICĂ PENTRU CORPURILE ELASTICE

Atît teoria geometrică cît şi cea statică mai sus examinate fac abstracţie de proprietăţile mecanice reale ale corpurilor. În aceste condiţii nu se poate spune nimic despre *modul* în care forţele exterioare provoacă, *datorită proprietăţilor materialului*, anumite deplasări şi deformaţii; altfel spus, despre *modul în care corpul se opune solicitării*.

Pînă în acest moment, modelul corpului solid era mediul continuu şi deformabil, caracterizat de primele trei ipoteze din § 0.4 — valabile pentru *orice* corp solid, şi chiar nu numai pentru solide. Pentru a merge mai departe, trebuie să precizăm acest model, stabilind forma dependenţei dintre cîmpul deformaţiilor şi cel al tensiunilor, dependenţă care poartă numele de *lege fizică*.

Din punct de vedere teoretic, problema legii fizice este o problemă de structură a materiei. Încă la începutul secolului XIX, Cauchy, Poisson şi Navier au încercat să fondeze teoria legii fizice cu ajutorul forţelor de atracţie şi repulsie intermoleculară (vezi A. Love [1], Anexa B, sau C. Müller şi A. Timpe [1]). Aceste raţionamente au dus la relaţii apropiate de cele utilizate şi azi în teoria liniară.

Ceva mai tîrziu este iniţiată cercetarea acestei probleme cu mijloacele termodinamicii: Lord Kelvin [2] (vezi şi [4], vol. 3, „On the dynamical theory of heat", cap. 7) şi J. Gibbs [1], [2]. O bibliografie mai amănunţită este dată în § 5, pag. 103.

Către finele secolului trecut, cercetările lui W. Voigt [1], [2] asupra cristalelor deschid drumul spre studiul proprietăţilor *mecanice* ale corpului solid din punctul de vedere al *fizicii* corpului solid. Indicăm aci lucrările clasice fundamentale ale lui M. Born (vezi M. Born şi K. Huang [1]; punctul de vedere al lui Born este analizat şi de M. Drăganu [1], vol. 2, cap. 21; vezi de asemenea L. Brillouin [1]). Din lucrările recente, menţionăm studiile de sinteză ale lui G. Leibfried [1] (în special secţiunea D), A. Seeger [1] (în special cap. 2, pct. a) şi lucrările asupra teoriei dislocaţiilor (vezi mai jos § 4.1, pag. 125).

Invariabilitatea distanţelor şi unghiurilor epuizează conţinutul legii fizice în mecanica solidului rigid. Echilibrul se stabileşte ca consecinţă a anumitor relaţii între forţele exterioare (inclusiv reacţiuni), fără cheltuire de lucru mecanic. Forţele interioare nu pot fi determinate.

Dimpotrivă, echilibrul solidului deformabil se stabileşte în corpul deformat. Starea corpului e cunoscută dacă cunoaştem *poziţia* fiecărui punct, şi *forţele* ce acţionează în oricare punct, aşadar deplasările (sau

deformaţiile) şi tensiunile. Curba caracteristică a materialului pune în evidenţă (în cazul unidimensional) *pentru zona elastică* o relaţie simplă între tensiuni şi deformaţii; să ne oprim asupra acesteia, generalizînd-o convenabil în cazul tridimensional.

Abstracţie făcînd de faptul că tensiunile sînt definite în coordonatele antrenate de deformaţie, ipoteza dependenţei locale impune, atît pentru încărcare cît şi pentru descărcare, aceleaşi relaţii, de forma

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{hk};\ x;\ T), \tag{1}$$

unde funcţiile considerate sînt uniforme (fiecărui sistem de deformaţii îi corespunde *un* sistem de tensiuni), iar temperatura T joacă rol de parametru.

Ipoteza elasticităţii ideale impune ca relaţiile (1) să fie inversabile, aşadar ca să putem scrie

$$\varepsilon_{hk} = \varepsilon_{hk}(\sigma_{ij};\ x;\ T). \tag{2}$$

Pentru aceasta, este necesar şi suficient ca jacobianul relaţiilor (1) sau (2), în raport cu variabilele ε_{hk} (sau σ_{ij}) să fie mărginit şi diferit de zero:

$$0 < |\mathrm{D}(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{31})/\mathrm{D}(\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{31})| < \infty. \tag{3}$$

În cadrul ipotezelor dependenţei locale şi elasticităţii ideale, starea mecanică în fiecare punct şi pentru fiecare temperatură este deci determinată prin cunoaşterea a numai 6, şi nu a 12 cantităţi. În particular, de aci rezultă că deformaţia este reversibilă: dacă corpul trece a doua oară printr-o stare de tensiune anumită (inclusiv starea nulă), el trebuie să treacă în acelaşi timp şi prin starea de deformaţie corespunzătoare.

Relaţiile (1) sînt valabile numai între anumite limite; ele descriu anumite proprietăţi fizice ale corpului şi *epuizează*, din punctul de vedere al teoriei elasticităţii, aceste proprietăţi. Dacă se depăşesc anumite limite pentru deformaţii sau tensiuni sau anumite combinaţii ale lor, sau dacă alţi parametri variază în afara unor limite permise, relaţiile (1) îşi pierd valabilitatea: totul se petrece ca şi cum din punct de vedere fizic am avea de a face cu alt corp, caracterizat de alte proprietăţi.

Pentru diferite tipuri de proprietăţi fizice neelastice, dar totuşi apropiate de proprietăţile elastice, vezi lucrările indicate în § 4.1, pag. 124–126.

§ 2. LEGEA LUI HOOKE

a) Legi liniare

În anul 1660, Robert Hooke a publicat (sub formă de anagramă) legea dependenţei dintre tensiuni şi deformaţii: „*ut tensio, sic vis*" — exprimînd astfel proporţionalitatea dintre forţa ce întinde o epruvetă metalică

(în speţă, un resort), şi alungirea (deformaţia) pe care această forţă o provoacă. Legea se limita la cazul unidimensional, descris în (0.2.5). Anagrama a fost descifrată în 1678 (R. Hooke [1]). Aceeaşi lege a fost regăsită independent de către E. Mariotte [1], care a dat şi primele ei aplicaţii la problema încovoierii barelor cilindrice (abordată încă de G. Galilei [1]). *Astăzi, relaţia lui Hooke şi Mariotte pare simplă şi evidentă. Dar apariţia ei a avut pentru mecanica solidelor deformabile importanţa pe care legile lui Newton le-au avut pentru mecanică în ansamblu.*

O generalizare firească a legii lui Hooke din (0.2.5) se obţine luînd ca punct de pornire relaţiile (1.1) şi presupunînd că funcţiile considerate sînt desfăşurabile în serii Taylor (cu coeficienţi ce depind în genere de x şi T). Se poate ajunge la concluzii similare şi pornind de la teorema lui Weierstrass asupra aproximării funcţiilor continue prin polinoame (vezi A. Green şi J. Adkins [1], § 1.3). Pentru aceasta este necesar ca fie componentele ε_{ij}, fie coeficienţii termenilor de grad superior, să fie suficient de mici, pentru ca să fim îndreptăţiţi să reţinem în aceste serii numai termenii liniari[1]). (Subliniem că nu se pune nici o problemă de convergenţă: aceste relaţii nu se determină teoretic sub formă compactă, ci experimental, şi în fapt tocmai sub forma unor polinoame în ε_{ij}.)

Dacă relaţiile (1.1) pot fi liniarizate, se spune că legea fizică este liniară, sau că *problema este liniară din punct de vedere fizic.*

Se poate afirma că liniaritatea fizică este favorizată de cea geometrică, dar ea nu se reduce la aceasta. Relaţiile (1.1) pot fi liniare chiar în cadrul unei teorii neliniare geometric (mărimile ε_{ij} înlocuindu-se atunci cu $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ şi toate relaţiile trebuind să fie scrise într-un sistem determinat de coordonate: cele iniţiale, sau cele antrenate de deformaţie), dacă termenii de grad superior au coeficienţi foarte mici. Invers, dacă aceşti termeni au coeficienţi foarte mari, sîntem siliţi să ţinem seama de ei chiar şi în cadrul unei teorii liniare geometric. Pentru raporturile dintre liniaritatea geometrică şi liniaritatea fizică, vezi P. Germain [1], § 5.1. Vezi şi mai jos, § 4.1, pag. 126.

O teorie bazată pe relaţii liniare atît geometric, cît şi fizic, se va numi pe scurt *liniară.*

b) Legea lui Hooke

Presupunînd că la deformaţii nule corespund tensiuni nule (aşadar nu există „tensiuni iniţiale" — care pot însă apare în unele probleme importante, de pildă în studiul metalelor călite), obţinem din (1.1) *legea lui Hooke* (generalizată)

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{hk}\,\varepsilon_{hk}\,, \qquad i,\, j,\, h,\, k = 1,\, 2,\, 3, \tag{1}$$

unde mărimile c_{ij}^{hk} sînt în genere funcţii de punct, de alegerea axelor şi de temperatură. Dimensiunea lor este FL^{-2}.

---

[1]) Pentru unele obiecţii la acest mod de a raţiona, vezi de exemplu A. Clebsch şi B. de Saint-Venant [1], nota la pag. 39.

Aparent, în (1) intervin $3^4 = 81$ coeficienţi. În fapt, simetria tensorilor tensiune şi deformaţie conduce (făcînd uz şi de un evident raţionament de simetrizare) la egalităţile

$$c_{ij}^{hk} = c_{ij}^{kh} = c_{ji}^{hk} = c_{ji}^{kh}, \tag{2}$$

astfel că numărul lor se reduce la $6 \times 6 = 36$.

Condiţia de biunivocitate (1.3) se scrie acum

$$\text{Det } [c_{ij}^{hk}] \neq 0 \tag{3}$$

Rezolvînd relaţiile (1) în raport cu componentele deformaţiei, obţinem

$$\varepsilon_{ij} = C_{ij}^{hk} \, \sigma_{hk} \tag{4}$$

cu egalităţi analoge cu (2) pentru mărimile C_{ij}^{hk}.

Cantităţile c_{ij}^{hk} se numesc *coeficienţi de rigiditate* (elastică): cu cît ele sînt mai mari, cu atît e nevoie de tensiuni mai mari pentru a realiza o anumită stare de deformaţie. Cantităţile C_{ij}^{hk} se numesc *coeficienţi de deformabilitate* : cu cît ele sînt mai mari, cu atît corpul se deformează mai mult la o stare de tensiune dată.

Întrucît funcţiile (1.1) caracterizează pe deplin proprietăţile mecanice ale corpului, rezultă că, în cazul liniar, cunoaşterea coeficienţilor de rigiditate echivalează cu cunoaşterea acestor proprietăţi. Dacă coeficienţii de rigiditate sînt funcţii de punct, corpul este *neomogen* din punct de vedere mecanic. Dacă ei sînt constanţi, corpul este *omogen*.

c) Tensorul lui Hooke

Natura dependenţei acestor coeficienţi faţă de alegerea axelor este determinată nu numai de proprietăţile eventual diferite ale materialului după diferite direcţii, ci şi de proprietăţile tensoriale ale componentelor σ_{ij} şi ε_{ij}. (Din acelaşi punct de vedere se pot studia şi proprietăţile funcţiilor din (1.1).)

Să considerăm relaţiile (1) transcrise într-un sistem de axe $Ox_1'x_2'x_3'$:

$$\sigma_{ij}' = c_{ij}'^{hk} \;\; \varepsilon_{hk}' . \tag{5}$$

Ţinînd seama de (1.6.6) şi (2.5.5), obţinem din (5)

$$n_{i\alpha} \, n_{j\beta} \, \sigma_{\alpha\beta} = c_{ij}'^{hk} \, n_{hp} \, n_{kq} \, \varepsilon_{pq} .$$

Amplificînd această egalitate cu n_{il} n_{jm}, obţinem

$$n_{il} \, n_{jm} \, n_{i\alpha} \, n_{j\beta} \, \sigma_{\alpha\beta} = n_{il} \, n_{jm} \, n_{hp} \, n_{kq} \, c_{ij}'^{hk} \, \varepsilon_{pq} ,$$

sau încă, ţinînd seama de relaţiile de ortogonalitate (1.6.2) :

$$\delta_{l\alpha} \, \delta_{m\beta} \, \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{lm} = n_{il} \, n_{jm} \, n_{hp} \, n_{kq} \, c_{ij}'^{hk} \, \varepsilon_{pq} ,$$

de unde, comparînd cu (1), deducem imediat

$$c_{lm}^{pq} = n_{il} \, n_{jm} \, n_{hp} \, n_{kq} \, c_{ij}'^{hk} . \tag{6}$$

Coeficienţii de rigiditate elastică formează deci un tensor de ordinul patru : *tensorul lui Hooke*[2]). Acest rezultat depinde numai de caracterul tensorial al deformaţiei şi tensiunii şi de caracterul liniar şi omogen al relaţiilor (1).

§ 3. CAZURI PARTICULARE ALE LEGII LUI HOOKE

a) *Anizotropie*

Corpurile pentru care relaţiile (2.1) sînt valabile se numesc *liniar anizotrope*, sau pe scurt *anizotrope*. Coeficienţii c_{ij}^{hk} fiind independenţi, comportarea corpului diferă de la o direcţie la alta în jurul oricărui punct. Dacă însă corpul posedă anumite proprietăţi de simetrie mecanică, aceşti coeficienţi rezultă legaţi prin anumite relaţii, şi numărul celor independenţi dintre ei se micşorează.

Sub o formă generală, această problemă (în teoria neliniară) este studiată de J. Adkins [1], [2]. (Vezi A. Green şi J. Adkins [1], cap. 1.) Aci, ne vom limita numai la cîteva cazuri simple de simetrie elastică, în teoria liniară.

b) *Un plan de simetrie elastică*

Dacă proprietăţile mecanice îşi păstrează forma după direcţii simetrice faţă de un plan — pe care îl vom alege drept plan $x_3 = 0$ — rezultă că, trecînd la axele $Ox_1' x_2' x_3'$ caracterizate de relaţiile

$$x_1' = x_1, \; x_2' = x_2, \; x_3' = -x_3, \tag{1}$$

trebuie ca legea lui Hooke (2.1) să-şi păstreze forma.

În noile axe, în loc de (2.5) vom avea deci

$$\sigma_{ij}' = c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}'. \tag{2}$$

Întrucît (1) nu este o rotaţie de axe, formulele (1.6.6) nu pot fi utilizate. Avem însă uşor, pornind de la definiţia componentelor deformaţiei :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11}' = \varepsilon_{11}, \; \varepsilon_{22}' = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{33}' = \varepsilon_{33}, \\ &\varepsilon_{12}' = \varepsilon_{12}, \; \varepsilon_{23}' = -\varepsilon_{23}, \; \varepsilon_{31}' = -\varepsilon_{31}, \end{aligned} \tag{3}$$

şi relaţii analoge pentru componentele tensiunii.

---

[2]) În formula (6) sînt concentrate 81 relaţii, fiecare conţinînd cîte 81 termeni, aşa dar în total 6561 termeni. Avantajele notaţiei tensoriale sînt evidente.

Din (2.1) deducem pentru $i = j = 1$:

$$\sigma_{11} = c_{11}^{11}\,\varepsilon_{11} + c_{11}^{22}\,\varepsilon_{22} + c_{11}^{33}\,\varepsilon_{33} + 2c_{11}^{12}\,\varepsilon_{12} + 2c_{11}^{23}\,\varepsilon_{23} + 2c_{11}^{31}\,\varepsilon_{31}, \quad (4)$$

în timp ce din (2) şi (3) obţinem

$$\sigma'_{11} = c_{11}^{11}\,\varepsilon_{11} + c_{11}^{22}\,\varepsilon_{22} + c_{11}^{33}\,\varepsilon_{33} + 2c_{11}^{12}\,\varepsilon_{12} - 2c_{11}^{23}\,\varepsilon_{23} - 2c_{11}^{31}\,\varepsilon_{31}. \quad (5)$$

Egalitatea $\sigma'_{11} = \sigma_{11}$ (care decurge din relaţiile (3) scrise pentru tensiuni) este posibilă dacă şi numai dacă $c_{11}^{13} = c_{11}^{23} = 0$. Repetînd acelaşi raţionament pentru toate componentele tensiunii, obţinem pe rînd

$$c_{11}^{13} = c_{11}^{23} = c_{22}^{13} = c_{22}^{23} = c_{33}^{13} = c_{33}^{23} = c_{12}^{13} = c_{12}^{23} =$$

$$= c_{13}^{11} = c_{13}^{22} = c_{13}^{33} = c_{13}^{12} = c_{23}^{11} = c_{23}^{22} = c_{23}^{33} = c_{23}^{12} = 0, \quad (6)$$

astfel că un corp elastic (liniar) cu un plan de simetrie are $36-16=20$ coeficienţi de rigiditate independenţi.

c) *Ortotropie. Trei plane de simetrie triortogonale*

Raţionamentul de mai sus poate fi repetat şi pentru axe ce se obţin schimbînd sensul pe axa x_2, respectiv x_1. Relaţiile corespunzătoare decurg din (6) prin permutări circulare ale indicilor. În virtutea condiţiilor de simetrie (2.2), obţinem unele relaţii ce coincid cu (6), precum şi relaţiile noi

$$c_{11}^{12} = c_{12}^{11} = c_{12}^{22} = c_{12}^{33} = c_{13}^{23} = c_{22}^{12} = c_{23}^{13} = c_{33}^{12} = 0, \quad (7)$$

astfel că numărul coeficienţilor de rigiditate independenţi se reduce la 12.

Corpurile de acest tip se numesc ortogonal-anizotrope, sau pe scurt *ortotrope*. Legea lui Hooke se scrie în acest caz sub forma

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}^{11}\,\varepsilon_{11} + c_{11}^{22}\,\varepsilon_{22} + c_{11}^{33}\,\varepsilon_{33},\\ \sigma_{22} &= c_{22}^{11}\,\varepsilon_{11} + c_{22}^{22}\,\varepsilon_{22} + c_{22}^{33}\,\varepsilon_{33},\\ \sigma_{33} &= c_{33}^{11}\,\varepsilon_{11} + c_{33}^{22}\,\varepsilon_{22} + c_{33}^{33}\,\varepsilon_{33},\end{aligned} \quad (8)$$

$$\sigma_{12} = 2c_{12}^{12}\,\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2c_{23}^{23}\,\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2c_{31}^{31}\,\varepsilon_{31}.$$

Din (8) urmează că, dacă $\varepsilon_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$, atunci avem şi $\sigma_{ij} = 0$. Aşadar, *într-un corp ortotrop, axele principale ale deformaţiei şi cele ale tensiunii coincid*. De aceea, în teoria liniară a corpurilor ortotrope se vorbeşte pe scurt despre *axele principale* într-un punct dat.

Categoria corpurilor ortotrope este foarte importantă în practică.

Similar celor de mai sus, se pot considera — în loc de corpuri cu plane de simetrie — corpuri cu diferite tipuri de *axe* de simetrie.

d) Izotropie

În acest caz, proprietățile elastice trebuie să rămînă invariante la orice simetrie și orice rotație a axelor — deci la o permutare circulară a indicilor axelor, precum și la o rotație în jurul unei axe oarecare.

Luînd mai întîi

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_3, \quad x'_3 = x_1, \tag{9}$$

obținem evident

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon_{22}, \; \varepsilon'_{22} = \varepsilon_{33}, \; \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{11}, \; \varepsilon'_{12} = \varepsilon_{23}, \; \varepsilon'_{23} = \varepsilon_{31}, \; \varepsilon'_{31} = \varepsilon_{12}, \tag{10}$$

și relații analoge pentru componentele tensiunii. Avem deci din (8)

$$\sigma'_{11} = c^{11}_{11}\,\varepsilon_{22} + c^{22}_{11}\,\varepsilon_{33} + c^{33}_{11}\,\varepsilon_{11},$$

astfel că relația $\sigma'_{11} = \sigma_{22}$ este posibilă dacă și numai dacă $c^{11}_{11} = c^{22}_{22}$, $c^{22}_{11} = c^{33}_{22}$, $c^{33}_{11} = c^{11}_{22}$. Considerînd și transformarea

$$x'_1 = x_3, \quad x'_2 = x_1, \quad x'_3 = x_2, \tag{11}$$

și calculînd valorile tuturor componentelor σ'_{ij} în ambele transformări (9) și (11), obținem

$$\begin{aligned} c^{11}_{11} &= c^{22}_{22} = c^{33}_{33} = a, \qquad c^{22}_{11} = c^{33}_{22} = c^{11}_{33} = b, \\ c^{11}_{22} &= c^{22}_{33} = c^{33}_{11} = c, \qquad c^{12}_{12} = c^{23}_{23} = c^{31}_{31} = d, \end{aligned} \tag{12}$$

astfel că legea lui Hooke (8) devine provizoriu, pentru corpuri ortotrope cu proprietăți echivalente în lungul celor trei axe :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a\,\varepsilon_{11} + b\,\varepsilon_{22} + c\,\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= c\,\varepsilon_{11} + a\,\varepsilon_{22} + b\,\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= b\,\varepsilon_{11} + c\,\varepsilon_{22} + a\,\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2d\,\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2d\,\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2d\,\varepsilon_{31}. \end{aligned} \tag{13}$$

În fine, să presupunem că axele se rotesc de un unghi ϑ în jurul axei x_1; componentele deformației sînt date deci de formule analoge cu (1.7.17) (plus încă două formule pentru ε_{23} și ε_{31}, de care nu avem însă nevoie). Componentele tensiunii se transformă în același mod. Avem deci mai întîi

$$\sigma'_{22} = \sigma_{22}\cos^2\vartheta + \sigma_{23}\sin 2\vartheta + \sigma_{33}\sin^2\vartheta,$$

de unde, ținînd seama de (13) :

$$\begin{aligned} \sigma'_{22} = (c\,\varepsilon_{11} + a\,\varepsilon_{22} + b\,\varepsilon_{33})\cos^2\vartheta + 2\,d\,\varepsilon_{23}\sin 2\vartheta + \\ + (b\,\varepsilon_{11} + c\,\varepsilon_{22} + a\,\varepsilon_{33})\sin^2\vartheta. \end{aligned} \tag{14}$$

Pe de altă parte, a doua relaţie (13) îşi păstrează forma în axele noi, astfel că, folosind din nou (1.7.17), obţinem

$$\sigma'_{22} = c\varepsilon'_{11} + a\varepsilon'_{22} + b\varepsilon'_{33} = c\varepsilon_{11} + a(\varepsilon_{22}\cos^2\vartheta + \varepsilon_{23}\sin 2\vartheta + \\ + \varepsilon_{33}\sin^2\vartheta) + b(\varepsilon_{22}\sin^2\vartheta - \varepsilon_{23}\sin 2\vartheta + \varepsilon_{33}\cos^2\vartheta). \qquad (15)$$

Comparînd relaţiile (14) şi (15), deducem $b = c$, $2d = a - b$. Nici o altă rotaţie sau simetrie nu conduce la relaţii noi. Prin urmare, notînd

$$b = c = \lambda, \quad d = \mu, \quad a = \lambda + 2\mu, \qquad (16)$$

şi amintind (1.8.11), putem transcrie (13) sub forma

$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33}, \qquad (17)$$
$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2\mu\varepsilon_{31},$$

adică, mai compact :

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \qquad (18)$$

Din (12) şi (16) rezultă acum

$$c^{11}_{11} = c^{22}_{22} = c^{33}_{33} = \lambda + 2\mu, \quad c^{12}_{12} = c^{23}_{23} = c^{31}_{31} = \mu,$$
$$c^{22}_{11} = c^{11}_{22} = c^{33}_{22} = c^{22}_{33} = c^{11}_{33} = c^{33}_{11} = \lambda,$$

ceilalţi 24 coeficienţi fiind nuli, sau, mai compact :

$$c^{hk}_{ij} = \lambda\delta_{hk}\delta_{ij} + \mu(\delta_{ih}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jh}). \qquad (19)$$

Este evident că existenţa a 3 plane şi a 3 axe de simetrie trirectangulare e suficientă pentru a asigura izotropia. Prin urmare, formulele (18) dau legea lui Hooke pentru un corp elastic *izotrop* (eventual neomogen) în teoria liniară. (Aceasta se poate verifica şi cu ajutorul relaţiilor (2.6).)

Putem privi aşadar în practică mărimile λ, μ drept mărimi *scalare*. De aci rezultă invarianţa relaţiilor (18) : în orice schimbare de coordonate, coeficienţii λ, μ rămîn neschimbaţi, iar mărimile σ_{ij}, ε_{ij}, δ_{ij} se transformă ca componente ale unor tensori.

Transcriind (18) în axe principale, avem şi

$$\sigma_i = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (20)$$

Relaţiile (18) reprezintă cazul particular al relaţiilor (2.1) pentru corpuri elastice izotrope. Pentru a căpăta şi cazul particular al relaţiilor (2.4), să luăm $i = j$ în (18); obţinem

$$\sigma_{ii} = 3\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{ii}, \qquad (21)$$

unde sumele în raport cu i dau invarianţii liniari Θ şi θ :

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu)\theta. \qquad (22)$$

În orice material și în orice punct, putem evident realiza o stare de tensiune în care $\Theta \neq 0$. De aci urmează că în orice axe și în orice punct, avem

$$3\lambda + 2\mu \neq 0. \tag{23}$$

Cu aceasta, putem transcrie (18) sub forma

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\,\Theta\delta_{ij} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}\,. \tag{24}$$

Toate raționamentele precedente sînt valabile și pentru corpuri neomogene. Pentru corpuri omogene, coeficienții λ, μ se numesc *constantele lui Lamé*. Constanta μ a fost considerată anterior lui Lamé de către Coulomb în experiențele sale asupra torsiunii firelor cilindrice (vezi § 5.15, pag. 239), și e uneori numită *constanta lui Coulomb*. În literatura tehnică ea se notează adesea cu G — ceea ce dă totuși un aspect dezagreabil formulelor (18) și (24).

Ipoteza izotropiei este o ipoteză *puternic limitativă*. Totuși, numeroase materiale uzuale o verifică : în primul rînd corpurile amorfe, precum și cele alcătuite dintr-un mare număr de microcristale, dezordonat dispuse (metalele). Dimpotrivă, monocristalele sînt întotdeauna anizotrope. Există și materiale necristaline care sînt anizotrope, ca de pildă lemnul.

Proprietăți de anizotropie pot apare datorită anumitor procedee de prelucrare (de ex. după laminarea metalelor) sau pot fi admise pentru a descrie o structură geometrică ce favorizează anumite direcții (de ex. plăci cu nervuri de întărire pe anumite direcții). Se deosebește astfel o *anizotropie de material* (anizotropie propriu-zisă) și o *anizotropie constructivă*.

Pentru teoria corpurilor anizotrope, vezi indicațiile din § 4.1, pag. 125. (Diferitele variante de simetrie elastică mai sus considerate sînt însă prezentate mai ales pentru corpuri hiperelastice — vezi mai jos §§ 5—7.)

Studiul legii fizice se poate efectua și în cadrul neliniarității geometrice (vezi de ex. V. Novojilov [1], cap. 3 și [3], cap. 3). Dat fiind caracterul fizic al legii de legătură între tensiuni și deformații, prezintă interes studierea ei cu ajutorul invarianților tensiunii și deformației (inclusiv în cazul anizotrop, în teoria plasticității etc.). Pentru detalii, vezi de exemplu I. Goldenblatt [1], W. Prager [1], L. Sedov [2].

§ 4. CONSTANTELE ELASTICE ALE TEORIEI LINIARE PENTRU CORPURI OMOGENE ȘI IZOTROPE

a) Modulul lui Young; coeficientul lui Poisson

Proprietățile mecanice ale materialului omogen și izotrop sînt deplin caracterizate de constantele lui Lamé. Vom examina semnificația lor, modul în care ele pot fi obținute experimental, contribuția lor în apariția stării elastice.

Să considerăm mai întîi un corp în care este realizată starea de tensiune

$$\sigma_{11} = c = \text{const.}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0. \tag{1}$$

Introducînd (1) în ecuaţiile statice (2.4.10), constatăm că acestea sînt satisfăcute dacă $\boldsymbol{F} = 0$ (forţe de volum neglijabile). Componentele deformaţiei corespunzătoare se obţin din (3.24) sub forma

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\, c, \qquad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)}\, c, \tag{2}$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0.$$

Întrucît acestea sînt nişte constante, ele satisfac banal condiţiile lui Saint-Venant (1.9.12); deci, starea (1), (2) este posibilă, şi deplasarea $\boldsymbol{u}$ poate fi determinată.

Să căutăm un model simplu de corp în care această stare se realizează. Pentru aceasta, să considerăm un cilindru de ax Ox_1. Introducînd (1) în (2.3.3), obţinem

$$\sigma_{n1} = c\, n_1\,, \qquad \sigma_{n2} = \sigma_{n3} = 0\,. \tag{3}$$

Întrucît pe suprafaţa laterală $\mathscr{S}_l$ a cilindrului avem $n_1 = 0$, iar pe bazele $\mathscr{S}_b$ avem $n_1 = \pm 1$, relaţia (3) devine

$$\boldsymbol{\sigma}_n \Big|_{\mathscr{S}_l} = 0, \quad \sigma_{n1}\Big|_{\mathscr{S}_b} = \pm c, \quad \sigma_{n2}\Big|_{\mathscr{S}_b} = \sigma_{n3}\Big|_{\mathscr{S}_b} = 0, \tag{4}$$

astfel că suprafaţa laterală rezultă a fi liberă, iar bazele sînt supuse unor tensiuni uniform repartizate, egale şi opuse.

Dacă $c > 0$ (întindere), experienţa arată că cilindrul se alungeşte, iar secţiunea sa transversală se micşorează. Dacă $c < 0$ (compresiune) cilindrul se scurtează, iar secţiunea transversală creşte. Prin urmare, avem :

$$\begin{aligned} &\text{pentru } c > 0: \quad \varepsilon_{11} > 0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} < 0, \\ &\text{pentru } c < 0: \quad \varepsilon_{11} < 0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Se numeşte *modulul lui Young* raportul dintre tensiunea longitudinală c şi alungirea ε_{11} pe care ea o provoacă pe linia sa de acţiune. Din (2) şi (3) căpătăm deci

$$E = c/\varepsilon_{11} = \mu\,(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu) > 0. \tag{6}$$

Semnificaţia sa e apropiată de cea a coeficientului de rigiditate c^{11}_{11} (vezi (2.1)). Cu cît E este mai mare, cu atît materialul rezistă mai bine la întindere şi compresiune.

Mai departe, să notăm cu $-\nu$ (unde $\nu > 0$) raportul dintre efectul tensiunii c pe direcţii transversale şi efectul ei pe direcţia liniei sale de

acțiune. Întrucît, în virtutea izotropiei, putem face uz în mod egal de componentele ε_{22} sau ε_{33}, din (2) și (5) urmează

$$\nu = -\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\lambda/(\lambda+\mu) > 0. \tag{7}$$

Mărimea ν se numește *coeficientul lui Poisson* [3]).

Experiența de întindere-compresiune descrisă în § 0.2 servește la determinare lui E. Coeficientul lui Poisson nu se determină din aceeași experiență, întrucît măsurătorile cer o mare precizie și există de altfel experiențe mai simple care duc la calcularea sa pe cale indirectă (vezi pag. 95).

b) Constanta lui Coulomb

Fie acum un al doilea caz de solicitare: un corp în care

$$\sigma_{12} = c = \text{const.},\quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0. \tag{8}$$

Pentru starea de deformație deducem ușor

$$\varepsilon_{12} = c/2\mu,\quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0. \tag{9}$$

Starea (8), (9) este posibilă pentru $F = 0$. Constanta μ apare a fi raportul dintre tensiunea de alunecare c, și deformația unghiulară $2\varepsilon_{12}$ pe care ea o provoacă. Din această cauză, μ mai poartă numele de *modul de rigiditate la alunecare*.

Căutînd — după modelul cazului precedent — să realizăm starea (8), (9) în același cilindru de ax Ox_1, obținem din (2.3.3)

$$\sigma_{n1} = cn_2,\quad \sigma_{n2} = cn_1,\quad \sigma_{n3} = 0. \tag{10}$$

Prin urmare, suprafața laterală *nu* e liberă de tensiuni (vezi § 4.2 pag. 128). Rezultatul era de așteptat: în virtutea teoremei de reciprocitate (vezi finele § 2.4), pe elemente paralele cu Ox_1 apar tensiuni tangențiale egale cu cele de pe elementele de normală Ox_1, așa dar de pe secțiuni.

OBSERVAȚIE. Aceeași stare de tensiune admite și o altă descriere, foarte sugestivă. Considerînd axele $Ox_1'x_2'$ ce se obțin rotind axele Ox_1x_2 de 45° în jurul axei $Ox_3 = Ox_3'$ și făcînd uz de formulele (2.5.5), obținem din (8):

$$\sigma'_{ij} = (n_{i1}n_{j2} + n_{i2}n_{j1})c,$$

unde $n_{ij} = \cos(x_i', x_j)$ (vezi (1.6.1)). De aci căpătăm

$$\sigma'_{11} = c,\quad \sigma'_{22} = -c,\quad \sigma'_{12} = \sigma'_{23} = \sigma'_{31} = \sigma'_{33} = 0. \tag{11}$$

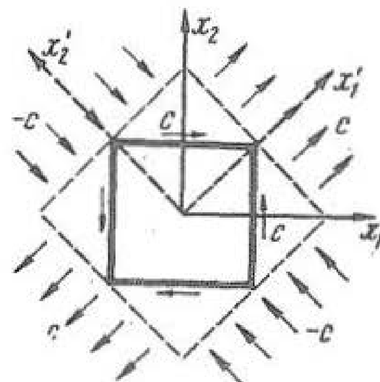


Fig. 3.4.1

[3]) Uneori se folosește notația σ — care pretează însă la confuzie. Și mai puțin corectă este notația μ. Destul de frecvent se folosește inversul $m = 1/\nu$, numit *numărul lui Poisson*.

Axele nou introduse sînt deci chiar axele principale în punctul considerat, şi starea de alunecare pură (8) apare drept rezultat al suprapunerii unor tensiuni egale (în valoare absolută) de întindere, respectiv de compresiune, pe direcţii perpendiculare.

c) *Modulul de compresiune hidrostatică*

Fie acum un al treilea exemplu de stare de tensiune

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \qquad p > 0. \tag{12}$$

Din (2.3.3) obţinem acum

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j = -p n_i, \tag{13}$$

astfel că vectorul tensiune este dirijat după normală. O astfel de stare se numeşte *presiune hidrostatică* sau *compresiune uniformă*. Din (3.22) urmează

$$p = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\theta. \tag{14}$$

Întrucît pentru $p > 0$ trebuie evident să avem $\theta < 0$, deducem

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0. \tag{15}$$

Acest coeficient se numeşte *modul de compresiune hidrostatică*. Calcule elementare dau uşor din (6), (7) şi (15):

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \tag{16}$$

Întrucît mărimile E, ν, k sînt pozitive, deducem imediat că

$$0 < \nu < \frac{1}{2}, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0. \tag{17}$$

Din (6) rezultă că modulul lui Young are dimensiunea FL^{-2}; din (7) urmează că coeficientul lui Poisson este nul-dimensional; în fine, din (16) deducem că λ, μ, k au aceeaşi dimensiune cu E — aşadar se măsoară în kgf/cm².

Dacă ν ar fi nul, aceasta ar însemna că sarcina nu dă nici un efect de contracţie pe direcţii transversale liniei ei de acţiune. Pe de altă parte, dacă $\nu = 0{,}5$, din (14)—(16) ar rezulta că pentru orice sarcină hidrostatică θ este nul, aşadar deformaţia s-ar produce fără modificare de volum, la presiuni arbitrar de mari. Valorile $\nu = 0$, $\nu = 0{,}5$ nu sînt deci accep-

tabile. Totuşi, $\nu = 0{,}5$ poate fi admis ca valoare-limită, pentru procese în care deformaţia de volum este neglijabilă — ca de exemplu pe pragul trecerii la deformaţia plastică. (Vezi mai departe pag. 94.)

d) *Legea lui Hooke rezolvată în raport cu deformaţiile*

Constantele lui Lamé permit scrierea simplă a legii lui Hooke (3.18), în timp ce constantele E, ν sînt de preferat în relaţiile lui Hooke rezolvate în raport cu deformaţiile. Într-adevăr, ţinînd seama de (6), (7) şi de a doua relaţie (16) în (3.24), obţinem

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\,\Theta\,\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij}, \tag{18}$$

ceea ce se mai scrie şi sub forma

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu\,(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right],\quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})\right],$$
$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu\,(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right],\quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij}\quad (i \neq j). \tag{19}$$

e) *Tensori sferici şi deviatori*

Pentru a clarifica rolul constantei k, să separăm din tensorul de deformaţie **E** o componentă **E°** ce caracterizează *deformaţia de volum*, şi o componentă E care produce o *deformaţie de formă* sau *distorsiune*. Vom scrie deci

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^0_{ij} + e_{ij}, \tag{20}$$

şi vom pune condiţiile

$$\theta^0 = \theta,\quad \theta^e = 0. \tag{21}$$

Considerînd aşa-numita *deformaţie medie* [4])

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\,\theta, \tag{22}$$

obţinem descompunerea dorită (20), (21) dacă alegem

$$\varepsilon^0_{ij} = \varepsilon_m\,\delta_{ij},\quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m\,\delta_{ij}. \tag{23}$$

Primul din tensorii astfel introduşi se numeşte *tensorul sferic al deformaţiei* (întrucît cuadrica corespunzătoare este o sferă). Al doilea se numeşte

[4]) A nu se confunda cu ε_m din (1.4.16) — (1.4.18).

deviatorul deformaţiei. Întrucît $\theta^e = 0$, cuadrica corespunzătoare este evident un hiperboloid.

O descompunere similară se poate realiza şi pentru tensorul tensiune. Anume, se consideră *tensiunea medie*

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\Theta, \tag{24}$$

şi se ia pentru *tensorul sferic* $\boldsymbol{\Sigma}^0$ şi pentru *deviatorul tensiunilor* S

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_m\,\delta_{ij} \quad \text{şi} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m\,\delta_{ij}. \tag{25}$$

Relaţia (3.22) devine acum

$$\sigma_m = (3\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_m = 3k\,\varepsilon_m, \tag{26}$$

şi legea lui Hooke (3.18) conduce deci la

$$\sigma_{ij} - \sigma_m\,\delta_{ij} = 3\lambda\varepsilon_m\,\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_m\,\delta_{ij},$$

sau încă

$$s_{ij} = 2\mu\,e_{ij}. \tag{27}$$

Relaţiile (26), (27) exprimă faptul că *tensorul sferic al tensiunii este proporţional cu tensorul sferic al deformaţiei, iar deviatorul tensiunii este proporţional cu deviatorul deformaţiei*. Aceasta se poate scrie şi sub forma

$$\boldsymbol{\Sigma}^0 = 3k\,\mathbf{E}^0, \quad \mathsf{S} = 2\mu\,\mathsf{E}. \tag{28}$$

Această formă a legii lui Hooke pune în evidenţă rolul lui k şi μ ca coeficienţi ce măsoară rezistenţa opusă de corp la modificarea de volum, respectiv la cea de formă.

Comparînd (26) şi prima relaţie (25) cu definiţia (12), se vede uşor că tensorii sferici descriu în fapt stări de tipul compresiunii hidrostatice (eventual cu $p < 0$).

Întrucît este verificat experimental că deformaţia *elastoplastică* se desfăşoară cu modificări de volum neglijabile faţă de modificările de formă, urmează că această scriere a legii lui Hooke este deosebit de importantă ca punct de pornire în teoria plasticităţii, unde pe primul plan apar nu tensorii tensiune şi deformaţie, ci deviatorii corespunzători.

f) Concluzii

În definitiv, dispunem de trei forme echivalente ale legii lui Hooke pentru corpuri izotrope : relaţiile (3.18), (19) şi (28). Fiecare din ele pune în evidenţă o pereche de constante : (λ, μ), (E, ν), (k, μ). Pentru determinarea acestora este suficientă găsirea (pe cale teoretică sau experimentală) a două din ele.

Aceste raționamente rămîn valabile și pentru corpuri neomogene — caz în care mărimile λ, μ, E, ν, k sînt însă funcții de punct și determinarea lor experimentală este mult mai dificilă.

Dacă corpul este omogen, se pot realiza experiențe simple pentru determinarea constantelor elastice. Astfel, problema întinderii cilindrului (primul exemplu de mai sus) furnizează valoarea lui E pentru materialul considerat. Răsucirea (torsionarea) unui astfel de cilindru va da (vezi § 5.15, pag. 239) un model simplu de experiență pentru determinarea lui μ. (Vezi și § 4.12, pag. 162).

Putem deci determina valorile *tuturor* constantelor elastice pentru diferite materiale, executînd epruvete (omogene) din aceste materiale și efectuînd asupra lor anumite experiențe simple. Valorile obținute informează *complet* asupra comportării materialului în chestiune, într-un corp de *orice* configurație, sub *orice* sarcină. Cunoașterea a *doi* parametri, obținuți din *două* experiențe distincte, ne permite să cunoaștem modul de a reacționa al *oricărui* corp realizat din materialul considerat. Pentru aceste motive, teoria corpului izotrop și omogen, aflat în stare de deformație liniară și realizat dintr-un material ce respectă legea lui Hooke, se numește uneori *teorie biconstantă*.

Reproducem aci un tablou al constantelor pentru unele materiale uzuale. (Valorile pentru λ, μ, E, k sînt date în milioane kgf/cm^2.) Valorile reale pot prezenta mari abateri față de cele informative de aci (vezi § 0.2, pag. 25—26).

	λ	μ	E	k	ν
oțel	0,9 — 1,3	0,8 — 0,9	2 — 2,2	1,5 — 1,9	0,27 — 0,31
fier	1,00	0,8	2	1,6	0,28
alamă	0,85	0,38	1,1	1,1	0,33
cupru	0,9	0,46	1,3	1,2 — 1,7	0,33 — 0,38
plumb	0,35	0,05	0,16	0,37	0,43
sticlă	0,27 — 0,3	0,25	0,6	0,45	0,26

Pentru date mai amănunțite, vezi de exemplu N. Beliaev [2], anexa 7; A. Love [1], § 71; C. Mc Gregor [1]; P. Rieckert [1]. Vezi și K. Hillier [1].

§ 5. NOȚIUNI DE TERMODINAMICA DEFORMAȚIEI

a) Formularea problemei

După cum am arătat în introducere, ne limităm la studiul proceselor pseudostatice; toată informația de care dispunem relativ la starea unui corp deformabil se reduce deci la cunoașterea mărimilor ε_{ij}, σ_{ij} și (pro-

vizoriu) T, ca funcţii de punct. (În virtutea condiţiilor lui Saint-Venant, cunoaşterea deplasărilor nu este necesară.)

Terecerea dintr-o stare (0) într-o stare (1) înseamnă deci înlocuirea unor valori (funcţii de punct) ε^0_{ij}, σ^0_{ij}, T^0, prin alte valori ε^1_{ij}, σ^1_{ij}, T^1. Considerînd un spaţiu aritmetic (euclidian) cu 13 dimensiuni, de coordonate ε_{ij}, σ_{ij}, T, este limpede că fiecărei *stări* posibile într-un punct al corpului deformabil, îi corespunde un *punct* în acest spaţiu; iar fiecărui *proces* de deformaţie, o curbă — pe care o vom numi un *drum*, ducînd de exemplu de la un punct (0) la un punct (1).

Dacă mărimile ε_{ij}, σ_{ij}, T sînt legate prin anumite relaţii — ca de pildă cele ce rezultă din ipotezele din § 0.4 — atunci procesele de deformaţie se pot desfăşura numai pe *anumite* drumuri, situate pe anumite varietăţi cu un număr de dimensiuni mai mic. (Vezi de exemplu cazul din § 0.2.) În particular, în cazul corpului elastic, ne putem limita la considerarea unui spaţiu cu 7 dimensiuni, de coordonate ε_{ij}, T.

Mulţimea stărilor posibile într-un punct al corpului elastic ocupă un *domeniu* din acest spaţiu, iar o stare este deplin cunoscută dacă cunoaştem mărimile ε_{ij}, T corespunzătoare.

Cu toate că aceste funcţii nu depind de timp, putem totuşi imagina *diferite* procese de deformaţie, diferite *moduri* de a trece de la o stare (0) la o stare (1).

De pildă, putem presupune că într-un anumit proces, facem ca componenta ε_{11} să treacă de la valoarea ε^0_{11} la valoarea ε^1_{11}; apoi efectuăm aceeaşi operaţie cu componenta ε_{12} şi aşa mai departe. Schimbînd *ordinea* de trecere a componentelor de la valorile iniţale la valorile finale, obţinem procese de deformaţie — şi deci drumuri — diferite. (În exemplul din § 0.2 există numai un singur drum.)

Evident că pentru o teorie care neglijează *istoricul* procesului de deformaţie, aceste moduri diferite de trecere de la o stare la alta trebuie să fie echivalente. Să remarcăm însă că, spre deosebire de cazul solidului rigid, pentru a realiza o stare de echilibru elastic este necesară cheltuirea de *lucru mecanic* al forţelor exterioare: aceste forţe îşi deplasează punctele de aplicaţie în aşa fel încît lucrul lor mecanic total pe deplasările generate nu este nul.

Considerarea acestui lucru mecanic, precum şi a unui eventual aport de energie sub alte forme (termică, electromagnetică) sugerează o cale energetică, principial diferită de cea care a condus la ecuaţiile (2.4.10) şi la condiţiile (2.4.12), pentru a stabili legătura dintre sarcină şi efectul ei.

Or, nimic nu ne asigură a priori (chiar în absenţa unor fenomene termice sau electromagnetice) că lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare este o diferenţială totală; de aci rezultă că lucrul mecanic cheltuit pentru deformarea corpului depinde nu numai de stările iniţială şi finală, ci şi de *modul* în care starea finală a fost atinsă, deci de *drumul* de la starea (0) la starea (1), aşadar de *istoricul* procesului.

Informația asupra stărilor (0) și (1) nu este deci suficientă pentru a calcula acest element evident esențial, lucrul mecanic necesar pentru deformație. În această situație, avem de ales între următoarele două căi:

1° Fie să căutăm o formulare *lărgită* a problemei, în care informațiile asupra stărilor inițială și finală să fie îndestulătoare pentru determinarea în mod univoc a unor parametri de același tip cu lucrul mecanic, dar mai generali;

2° Fie să impunem corpului și procesului de deformație condiții mai *restrictive*, care să permită determinarea univocă a lucrului mecanic necesar deformației numai cu ajutorul datelor cunoscute pentru stările inițială și finală.

Prima cale conduce la înlocuirea studiului pur mecanic (inclusiv chestiunea transmiterii de lucru mecanic unui corp deformabil) printr-un studiu asupra schimbului de energie între diverse sisteme materiale — și este deci o problemă de *termodinamică fenomenologică*. A doua cale conduce la considerarea unei categorii particulare de corpuri, numite *hiperelastice*, pentru care lucrul mecanic elementar necesar pentru deformație este diferențiala totală a unei funcții ce depinde numai de stările inițială și finală.

Vom aminti aci unele noțiuni de termodinamică, cu ajutorul cărora vom putea formula cazuri simple în care un corp elastic este și hiperelastic — urmînd să ne limităm apoi la studiul acestor din urmă corpuri.

b) Noțiuni fundamentale

Să considerăm un corp sau un sistem de corpuri a cărui stare la un moment dat este deplin caracterizată de cunoașterea unor parametri (independenți sau nu) $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Spațiul $\mathcal{E}_n$ al acestor parametri permite reprezentarea stărilor corpului și a proceselor de trecere de la o stare la alta.

Orice funcție care depinde numai de starea corpului la un moment dat și nu și de modul în care această stare a fost atinsă, se numește *funcție de stare*. Întrucît putem măsura sau calcula cel mai adesea numai *variații* ale anumitor funcții în trecerea de la o stare la alta, trebuie să considerăm și o stare-reper (cel mai adesea, arbitrar aleasă), pe care o vom numi stare *normală* (sau *naturală*, sau *nulă*).

Prezintă interes evident reducerea numărului parametrilor p_i, ceea ce este posibil dacă unii din ei pot fi exprimați prin intermediul altora, care rămîn independenți.

Evident, astfel de legături pot fi universal valabile, și atunci unii din parametrii p_i pot fi definitiv eliminați din raționamente (afară de cazuri în care prezența lor este utilă din considerente de comoditate a scrierii, de simetrie a formulelor etc.). Dar chiar presupunînd că parametrii p_i sînt în general independenți, se poate totuși ca pentru (sau între) anumite valori ale acestora să existe relații de dependență, relații care, *într-un*

anumit cadru precis, permit reducerea numărului total de parametri. Astfel de relaţii se numesc *ecuaţii de stare* şi stabilirea lor echivalează cu stabilirea unui model al unei categorii *particulare* de corpuri în raport cu cele dintîi.

Parametrii independenţi se numesc *coordonate generalizate*, corespunzătoare unei anumite stări, şi se notează $q_1, q_2, \ldots q_m$. Ecuaţiile de stare se pot scrie exprimînd parametrii neindependenţi p_i prin intermediul parametrilor q_i. Spaţiul aritmetic al coordonatelor generalizate se numeşte *spaţiul figurativ*.

Punctele sale reprezintă stări ale sistemului, *în cadrul de valabilitate al ecuaţiilor de stare considerate*; iar drumurile sînt — în acelaşi cadru — procese de trecere de la o stare la alta.

Evident, orice funcţie de stare se poate scrie acum sub forma

$$f = f(q_1, q_2, \ldots, q_m), \tag{1}$$

unde se presupune că funcţia f are numărul de derivate continue necesar în raţionamente.

Pentru orice funcţie de stare avem desigur

$$\mathrm{d} f = f_{,i} \,\mathrm{d} q_i, \tag{2}$$

şi de aci

$$f_{,ij} = f_{,ji}. \tag{3}$$

Pentru orice funcţie de stare, integrala $\int_{(0)}^{(1)} \mathrm{d} f$ este independentă de istoricul trecerii de la o stare (0) la o stare (1), şi depinde numai de valorile iniţiale şi finale q_i^0, q_i^1.

Dacă mulţimea stărilor posibile ocupă un domeniu simplu conex în spaţiul figurativ, atunci condiţia necesară şi suficientă pentru ca o formă diferenţială liniară

$$\delta \Phi = \varphi_i (q_1, q_2, \ldots, q_m) \,\mathrm{d} q_i. \tag{4}$$

să fie diferenţiala unei funcţii de stare, este ca pe *orice* drum închis $\mathscr{C}$ din spaţiul figurativ, să avem

$$\int_{\mathscr{C}} \delta \Phi = 0. \tag{5}$$

Această condiţie integrală este echivalentă cu condiţiile diferenţiale

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}. \tag{6}$$

Dacă acestea din urmă nu sînt verificate, dar avem cel puţin

$$\varphi_i (\varphi_{j,k} - \varphi_{k,j}) + \varphi_j (\varphi_{k,i} - \varphi_{i,k}) + \varphi_k (\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}) = 0, \tag{7}$$

(pentru $i \neq j \neq k$), atunci există o funcţie $I(q_1, q_2, \ldots q_m)$, numită *factor integrant*, aşa fel ca $I\,\delta\Phi$ să fie o diferenţială totală. Altfel spus, există o funcţie de stare Ψ definită de relaţia

$$d\Psi = I\,\delta\Phi. \tag{8}$$

Subliniem că atîta timp cît nu sîntem siguri de existenţa unei funcţii de stare Φ, expresia $\delta\Phi$ *nu are* sensul unei operaţii δ aplicate asupra unei funcţii Φ, ci trebuie înţeleasă numai ca *definită* de membrul al doilea din (4).

Se poate face uz de aceste noţiuni pentru a studia corpuri pentru care drept parametri p_i putem alege poziţia particulelor, forţele ce acţionează între particule, şi temperatura — aşadar corpuri deplin caracterizate de mărimi mecanice şi termice (uneori pot interveni şi mărimi de natură electromagnetică).

Orice corp continuu (sau sistem) care poate primi sau ceda mediului ambiant lucru mecanic, căldură, sarcini electrice sau magnetice, eventual şi materie — se numeşte *sistem termodinamic*.

Un sistem termodinamic care nu schimbă cu mediul ambiant nici energie, nici materie, se numeşte *izolat*. Un sistem care schimbă cu mediul ambiant energie, dar nu şi materie, se numeşte *închis*. Un sistem care schimbă atît energie cît şi materie, se numeşte *deschis*.

Mărimile a căror cunoaştere la un moment dat echivalează cu cunoaşterea stării sistemului, se numesc *parametri termodinamici*. Orice fenomen care duce la modificarea valorilor lor se numeşte *proces termodinamic*.

Un proces de trecere de la o stare (0) la o stare (1) se numeşte *reversibil*, dacă el se poate desfăşura şi în sensul de la starea (1) la starea (0), *trecînd prin aceleaşi stări intermediare*. Un proces care nu are această proprietate, se numeşte *ireversibil*.

O condiţie suficientă (dar nu necesară) pentru ca un proces să fie reversibil, este ca el să fie *cvasistatic*. Tot ca reversibile pot fi privite şi procese de tipul vibraţiilor, dacă la capătul fiecărei perioade se reproduce starea iniţială.

Stabilirea unor ecuaţii de stare revine la precizarea unui model al unui anumit tip de corpuri, model valabil între anumite limite ale parametrilor. În virtutea acestor ecuaţii, numărul parametrilor independenţi se reduce. Parametrii independenţi rămaşi se numesc *coordonate termodinamice generalizate*.

Astfel, de exemplu, gazele ideale au ecuaţia de stare $pv = nRT$ (unde p este presiunea; v — volumul; n — numărul de molecule-gram de substanţă; R — constanta universală a gazelor; T — temperatura absolută). Această ecuaţie — valabilă numai între anumite limite ale parametrilor — stabileşte o legătură simplă între presiune, volum şi temperatură şi permite să reţinem drept coordonate generalizate, numai două din aceste trei mărimi.

Alt exemplu îl constituie studiul solidului deformabil. Chiar în cazul unidimensional din § 0.2, rezultă limpede că pe diferite porţiuni ale curbei caracteristice în diferite procese (încărcare sau descărcare), legătura dintre tensiune şi deformaţie este alta.

În general ecuaţiile (1.1) — (1.3) au deci sensul unor *ecuaţii de stare ale corpului elastic*, valabile atît la încărcare, cît şi la descărcare. Ele permit să reţinem drept coordonate generalizate mărimile ε_{ij}, T *sau* σ_{ij}, T. Odată cu trecerea în zona plastică (adică dacă se depăşesc anumite limite pentru ansamblul parametrilor — ceea ce nu e tot atît de uşor de stabilit ca în § 0.2 ; vezi § 4.3), aceste ecuaţii îşi pierd valabilitatea.

În starea elastică, orice funcţie de stare se scrie deci sub forma (1), unde rolul mărimilor q_i îl joacă componentele deformaţiei (sau tensiunii) şi temperatura.

(Amintim că însăşi temperatura este o funcţie de stare. Ea poate fi aleasă drept una din coordonatele generalizate — dar aceasta nu este obligatoriu. Temperatura absolută T se măsoară în grade Kelvin, iar 0°C = 273,15°K.)

Un sistem termodinamic este în *echilibru termic*, dacă între punctele sale nu au loc schimburi de căldură. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca T să fie o constantă (independentă de punct).

c) Principiile termodinamicii

Aceste noţiuni permit formularea celor *două principii ale termodinamicii*. Toate mărimile cu care operăm vor fi înţelese ca mărimi *unitare* sau *specifice* (raportate la unitatea de volum). Evident, ele sînt funcţii de punct. Valorile lor globale (pentru întregul corp) se vor obţine prin integrare pe domeniul $\mathscr{V}$. Variaţiile elementare de la o stare la alta se vor nota cu d sau cu δ, după cum avem de-a face cu o funcţie de stare, sau nu. Variaţiile neelementare se obţin integrînd variaţiile elementare corespunzătoare pe drumuri din spaţiul figurativ (sau din cel al parametrilor termodinamici).

Primul principiu al termodinamicii : există o funcţie de stare U, numită *energie internă* ; în orice proces termodinamic, creşterea elementară a energiei totale (energia internă U, plus energia cinetică K a mişcării macroscopice, plus energia potenţială E a aceleaşi mişcări) se compune din suma lucrului mecanic elementar $\delta\,\Phi$ efectuat asupra sistemului, a aportului elementar de căldură δQ, şi a aportului elementar de energie nemecanică şi netermică (de exemplu energie electromagnetică) $\delta\,Q^*$:

$$dU + dK + dE = \delta\Phi + \delta Q + \delta Q^* . \tag{9}$$

Mărimile $\delta\Phi$, δQ, δQ^* sînt negative dacă ele reprezintă lucru mecanic, căldură etc., furnizate de corp — mediului ambiant.

În cele ce urmează, ne vom mărgini la cazul proceselor cvasistatice, pentru corpuri aflate în echilibru macroscopic şi pentru care aportul de energie nemecanică şi netermică este neglijabil. În acest cadru, relaţia (9) ia forma

$$dU = \delta\Phi + \delta Q , \tag{10}$$

iar pentru întregul corp

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}U \,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} \delta\,\Phi \,\mathrm{d}V + \iiint_{\mathcal{V}} \delta\,Q \,\mathrm{d}V. \tag{11}$$

În particular, pentru un sistem izolat, din (11) urmează că pentru orice proces elementar avem $\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}U \,\mathrm{d}V = 0$, așadar că energia internă nu variază. Rezultatul rămîne valabil pentru un proces neelementar, așadar după integrare pe un drum oarecare (închis sau deschis) în spațiul figurativ :

$$\int_{\mathcal{C}} \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}U \,\mathrm{d}V = 0 .$$

Primul principiu al termodinamicii este principiul conservării energiei : în orice proces termodinamic în care este posibilă revenirea la starea inițială, această revenire se face fără variația energiei (vezi (5)). Dacă procesul este ireversibil, sau dacă drumul considerat din spațiul figurativ este deschis, principiul își păstrează valabilitatea : faptul că U este o funcție de stare înseamnă că valoarea energiei interne în orice punct nu depinde de „drumul" parcurs de sistem de la o stare (0) la o stare (1) în acel punct, ci numai de coordonatele generalizate corespunzătoare.

Dacă procesul conduce la valori pentru care ecuațiile de stare inițiale trebuiesc înlocuite, variația de la starea (0) la (1) trebuie calculată nu în spațiul coordonatelor generalizate (ce corespund unor *anumite* ecuații de stare), ci în spațiul parametrilor termodinamici.

Relația (9) prezintă energia ca măsură *comună* a *diferitelor* forme de mișcare ale materiei. În (10), rolul esențial este jucat de mișcarea mecanică și cea termică.

Primul principiu constituie baza experiențelor permițînd stabilirea echivalentului mecanic al căldurii. Amintim că 1 kcal = 427 kgm. Prin urmare, în (9) sau (10), mărimea δQ trebuie exprimată în unități mecanice, ținînd seama că 1 cal/cm^3 = 42,7 kgf/cm^2.

Al doilea principiu al termodinamicii : există o funcție de stare S, numită *entropie* ; în orice proces termodinamic, variația entropiei este *cel puțin egală* cu variația cantității de căldură raportată la temperatura absolută :

$$\mathrm{d}S \geqslant \delta Q\,/\,T, \tag{12}$$

unde egalitatea caracterizează procesele *reversibile*.

Pentru întregul sistem avem de aci

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}S \,\mathrm{d}V \geqslant \iiint_{\mathcal{V}} (\delta Q\,/\,T) \,\mathrm{d}V. \tag{13}$$

Faptul că S este o funcție de stare echivalează cu afirmația că în orice proces reversibil, cantitatea de căldură elementară δQ are un factor

integrant, funcţie numai de temperatură — şi tocmai acest factor e ales pentru a defini temperatura absolută.

Al doilea principiu al termodinamicii stabileşte un *sens* de desfăşurare a proceselor ireversibile: cel corespunzător *creşterii* entropiei în orice sistem izolat. În particular, aceasta se vede uşor în cazul unui proces ireversibil în regim izotermic ($T =$ const. în punctul considerat). Într-adevăr, într-un sistem izolat avem $\iiint_{\mathcal{V}} \delta Q \, \mathrm{d}V = 0$, astfel că din (13) urmează $\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}S \, \mathrm{d}V > 0$. Relaţia $\mathrm{d}S < 0$ e posibilă numai pentru sisteme neizolate (sau — ceea ce e acelaşi lucru — numai în porţiuni ale sistemului dat).

Pentru microsisteme, sau pentru perioade de timp mari din punct de vedere cosmogonic, al doilea principiu îşi poate pierde valabilitatea. (Vezi observaţiile lui V. Semencenko în J. Gibbs [2], pag. 455.)

Atît entropia cît şi energia sînt caracterizate abstracţie făcînd de o constantă aditivă S', respectiv U'. (Valoarea S' poate fi principial determinată cu ajutorul *teoremei lui Nernst.*) În practică, e suficientă cunoaşterea diferenţelor $U_1 - U_0$ şi $S_1 - S_0$, astfel încît constantele U', S' dispar din calcule.

Orice proces termodinamic se desfăşoară în general cu variaţii de temperatură şi deci cu schimburi de căldură. Procesele în care $\delta Q = 0$ se numesc *adiabatice* (în punctele respective). Cele în care $\mathrm{d}T = 0$ se numesc *izotermice*. După cum se vede din (12), un proces reversibil şi adiabatic este totodată şi *izentropic*: $\mathrm{d}S = 0$.

Limitîndu-ne la cazul proceselor reversibile, obţinem din (12)

$$\delta Q = T \, \mathrm{d}S, \tag{14}$$

ceea ce permite să transcriem (10) sub forma

$$\mathrm{d}U = \delta \Phi + T \mathrm{d}S. \tag{15}$$

Să considerăm funcţia de stare, numită *energie liberă*:

$$F = U - TS. \tag{16}$$

(Produsul TS se numeşte *energie legată.*) Din (15) şi (16) deducem

$$\mathrm{d}F = \delta\Phi - S \, \mathrm{d}T. \tag{17}$$

Relaţiile (15) şi (17) constituie forme echivalente ale primului principiu *pentru procese reversibile.* Din (10) şi (17) rezultă că în orice proces *adiabatic*, precum şi într-un proces *reversibil şi izotermic*, lucrul mecanic elementar este o diferenţială totală şi prin urmare *există* funcţiile de stare

$$\Phi_{ad} = U \qquad \text{pentru } S = \text{const.}, \tag{18}$$

$$\Phi_{is} = F \qquad \text{pentru } T = \text{const.} \tag{19}$$

Ambele relații sînt scrise pentru procese reversibile: relația (18) are sens pentru $S = \text{const.}$, ceea ce e posibil numai într-un proces reversibil; iar relația (19) a fost dedusă cu ajutorul egalității (14).

Posibilitatea unui sistem de a efectua lucru mecanic este deci caracterizată în cazul unui proces izentropic de energia sa, iar în cazul unui proces izotermic, de energia sa liberă.

d) *Indicații bibliografice*

Pentru detalii asupra celor de mai sus, vezi mai întîi tratatele lui M. Leontovici [1], M. Planck [1], M. Roy [3], A. Sommerfeld [2]. Pentru stadiul actual al cercetării, vezi E. Guggenheim [1] (inclusiv notele istorice, cap. H). Pentru axiomatica termodinamicii, vezi G. Falk [1]. Pentru raporturile sale cu teoria generală a cîmpului (inclusiv probleme de mecanica mediului continuu) vezi A. Freudenthal și H. Geiringer [1], cap. A, III și C. Truesdell și R. Toupin [1], cap. E. Pentru termodinamica proceselor ireversibile, vezi S. de Groot [1], J. Prigogine [1] și — cu aplicație specială la mecanica mediilor deformabile — M. Biot [2], [3], H. Ziegler [2].

Studii și expuneri aprofundate privitoare la aplicațiile — din diferite puncte de vedere — ale termodinamicii la mecanica mediilor continue deformabile, aparțin lui P. Chadwick [1]; I. Goldenblatt [1]; Ch. Platrier [1], vol. 2, partea B; M. Roy [1], vol. 1, partea I; L. Sedov [2]. Vezi și G. Grioli [3], cap. 2, 3 și 10 (acesta din urmă, pentru problemele asimetrice); C. Pearson [2], cap. 8; de asemenea unele paragrafe din L. Kaceanov [1] și D. Kutilin [1]. Pentru problemele de termoelasticitate, vezi B. Boley și J. Weiner [1]. Pentru probleme în care intervin cîmpuri electromagnetice, vezi K. Belov [1]; W. Cady [1]; J. Nye [1].

A. Pipkin și R. Rivlin [1] precum și R. Rivlin [2] au studiat chestiunea ecuațiilor de stare în teoria neliniară. Pentru diferite probleme speciale, vezi articolele lui A. Akopian [1]; B. Coleman [1], [2]; B. Coleman și W. Noll [1], [2]; S. Grigorian [1]; M. Gurtin [5]; J. Serrin [1]; A. Vakulenko [1]— pentru a nu cita decît o foarte mică parte. Mai amintim în fine lucrările fundamentale ale lui lord Kelvin [4]; J. Gibbs [1], [2]; E. și F. Cosserat [1]; E. Jouguet [1].

e) *Exemplul experienței de tracțiune și compresiune*

Pentru a clarifica noțiunile de mai sus în legătură cu mecanica mediului solid deformabil, să reluăm examinarea experienței descrise în § 0.2.

Epruveta supusă întinderii este un sistem termodinamic neizolat, dar închis, care primește lucru mecanic și o cantitate de căldură permițînd menținerea unei temperaturi constante. Pe porțiunea $\sigma < \sigma_s$, procesul este evasistatic. și reversibil; pentru $\sigma \geqslant \sigma_s$, el este numai pseudostatic și ireversibil.

Parametrii termodinamici ai problemei sînt mărimile ε, σ, T, a căror cunoaștere echivalează cu cunoașterea stării epruvetei. Ecuația de stare e dată de familia curbelor carac-

teristice pentru diferite valori ale lui T. În general avem $E = E(T)$. Presupunînd pentru simplitate că $\sigma_p = \sigma_s$, avem *pentru încărcare*

$$\sigma = \begin{cases} E(T)\,\varepsilon & \text{pentru } 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s\,; \\ \sigma_s = E(T)\,\varepsilon_s & \text{pentru } \varepsilon_s \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_e\,; \\ \sigma(\varepsilon, T) & \text{pentru } \varepsilon_e \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{20}$$

(ε_s este deformaţia elastică maximă — corespunzătoare aici limitei de plasticitate; ε_e este acea valoare a deformaţiei dincolo de care începe fenomenul de ecruisaj.)

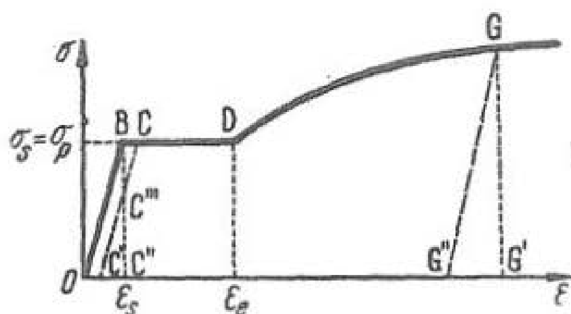


Fig. 3.5.1

Curba de *descărcare* este un segment de dreaptă de pantă $E(T)$ ce trece prin punctele $(\varepsilon_1, \sigma_1)$ şi $(\varepsilon_2, 0)$. Pentru $\varepsilon < \varepsilon_1$, deducem deci

$$\sigma = \begin{cases} E(T)\,\varepsilon & \text{dacă } 0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_s\,; \\ \sigma_s + E(T)(\varepsilon - \varepsilon_1) & \text{dacă } \varepsilon_s \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_e\,; \\ \sigma(\varepsilon_1, T) + E(T)(\varepsilon - \varepsilon_1) & \text{pentru } \varepsilon_e \leqslant \varepsilon_1\,. \end{cases} \tag{21}$$

Relaţiile (20), (21) sînt *ecuaţiile de stare* care permit ca, în diferite faze ale procesului, să reducem cei trei parametri termodinamici la două coordonate generalizate.

Experimental se constată că la temperaturi mai mari, metarialul cedează mai uşor, aşadar E este o funcţie descrescătoare de T. Se constată de asemenea că în cazul unei deformări de încărcare evasistatice adiabatice (epruveta izolată termic), temperatura materialului *scade*; pentru a se realiza o asemenea deformare în regim izotermic, este necesar aport de căldură [5]). Vom vedea că aceste fapte sînt legate între ele.

Să presupunem că epruveta de lungime l şi de secţiune de arie D este solicitată de o forţă care creşte lent de la zero la X. Prin definiţie avem (vezi § 0.2):

$$\sigma = X/D, \qquad \varepsilon = (l^* - l)/l \quad , \quad l^* = l + l\varepsilon. \tag{22}$$

Forţei $X + \delta X$ îi corespunde o lungime $l^* + \delta l^*$, iar lucrul mecanic elementar necesar pentru a realiza această nouă alungire este $\delta L = (X + \delta X)\,\delta l^* \cong X\,\delta l^*$. Întrucît din (22) urmează $\delta l^* = l\,\delta\varepsilon$, deducem $\delta L = D l \sigma \delta\varepsilon$, şi prin urmare lucrul mecanic elementar pe unitatea de volum este

$$\delta\Phi = \sigma\,\delta\varepsilon. \tag{23}$$

[5]) În cazul unui proces care nu este pseudostatic, lucrurile nu se petrec aşa, şi temperatura poate *creşte* mult.

Lucrul mecanic total necesar pentru a aduce epruveta de la starea naturală ($\varepsilon_0 = 0$) la starea finală ($\varepsilon = \varepsilon_1$) este dat de integrala expresiei (23) între 0 și ε_1, așadar de suma dreptunghiurilor elementare de baze $\delta\varepsilon$ și înălțimi $\sigma(\varepsilon, T)$ pe figura 3.5.1; aceasta este deci aria cuprinsă între curba caracteristică, axa ε și verticala $\varepsilon = \varepsilon_1$. (Dacă $\varepsilon_0 \neq 0$, se scade desigur aria corespunzătoare.) Prin urmare curba caracteristică poate fi privită ca o *diagramă a lucrului mecanic* (*unitar*) *de încărcare*.

Mărimea

$$\delta\Phi_c = \varepsilon\,\delta\sigma \tag{24}$$

poartă numele de *lucru mecanic elementar complementar* (unitar). Pe porțiunea rectilinie de pantă $E(T)$ a curbei caracteristice, acesta este egal cu lucrul mecanic elementar.

Să presupunem acum că starea (0) este starea normală; că starea (1) este caracterizată de o valoare ε_1 *și de ecuațiile* (20)$_s$; iar o stare (2) este caracterizată de valoarea ε_2 a deformației care se obține la descărcarea completă (așadar pentru $\sigma_2 = 0$) pornind de la starea (1), *și de ecuațiile de stare* (21).

Fie de pildă că $\varepsilon_1 > \varepsilon_e$. Din (21) deducem pentru $\sigma_2 = 0$ valoarea

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \sigma(\varepsilon_1, T)/E(T). \tag{25}$$

Pentru procesul de încărcare avem deci din (20) și (23)

$$\int_{(0)}^{(1)} \delta\Phi = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{2}E(T)\,\varepsilon_s^2 + E(T)\,\varepsilon_s(\varepsilon_e - \varepsilon_s) + \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon_1} \sigma(\varepsilon, T)\,\mathrm{d}\varepsilon, \tag{26}$$

iar pentru procesul de descărcare, folosind (21) și (23):

$$\int_{(1)}^{(2)} \delta\Phi = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma\,\mathrm{d}\varepsilon = -\frac{1}{2}E(T)\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 = -\frac{1}{2}[\sigma(\varepsilon_1, T)]^2 : E(T). \tag{27}$$

Dacă notăm cu G′ punctul de abscisă ε_1 și cu G″ punctul de abscisă ε_2, lucrul mecanic de încărcare se obține însumînd aria triunghiului OBε_s (lucrul de încărcare elastic), aria dreptunghiului ε_sBDε_e (lucrul deformației de fluaj), și aria trapezului curbiliniu ε_eDGG′. Lucrul mecanic pe care corpul îl cedează la descărcare este reprezentat de aria triunghiului G″GG′.

Pentru $\varepsilon = \varepsilon_2$, corpul nu mai efectuează lucru mecanic: energia acumulată în procesul de deformație nu s-a „pierdut", dar o mare parte a ei nu mai poate fi recuperată sub formă de lucru mecanic. Integrala (27) reprezintă deci (cu semnul schimbat) energia liberă F a corpului în starea (1), care coincide — după (19) — cu lucrul mecanic recuperabil (funcție de stare!). Restul energiei furnizate în procesul de încărcare (lucrul mecanic (26), *plus* cantitatea de căldură necesară pentru menținerea temperaturii) reprezintă creșterea energiei legate $T(S_1 - S_0)$ — (vezi (16)); valoarea ei permite calcularea creșterii entropiei în trecerea de la starea (0) la starea (1).

În fond, o mare parte din lucrul mecanic de încărcare (26) a fost deci cheltuit nu pentru a acumula în epruvetă lucru mecanic, ci pentru a modifica proprietățile fizice ale materialului acesteia — ceea ce se exprimă prin modificarea ecuațiilor de stare îndată ce depășim limita ε_s.

Să ne mărginim acum la cazul $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_s$, în regim cvasistatic izotermic. Întrucît în acest caz este valabilă relaţia (19), urmează că $dF = \sigma\, d\varepsilon$, şi deci

$$F_1 - F_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \sigma\, d\varepsilon. \tag{28}$$

Introducînd aci prima relaţie (20) — identică cu prima relaţie (21) — obţinem

$$F_1 - F_0 = \frac{1}{2} E(T)(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2). \quad (29$$

Din (17) deducem $S = -\partial F/\partial T$ (întrucît $\delta\Phi$ nu depinde de T); cu aceasta (16) devine

$$U = F - T(\partial F/\partial T), \tag{30}$$

şi prin urmare avem

$$U_1 - U_0 = \frac{1}{2}\left[E(T) - T E'(T)\right](\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2), \tag{31}$$

unde al doilea termen este deci aportul de căldură necesar pentru a menţine temperatura constantă. Întrucît $E'(T) < 0$ pentru $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, acest aport este într-adevăr *pozitiv*.

Relaţiile de mai sus sînt valabile pentru orice $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1 \geqslant 0$. Alegînd $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, obţinem

$$U - U_0 = \frac{1}{2}\left[E(T) - T E'(T)\right]\varepsilon^2, \qquad F - F_0 = \frac{1}{2} E(T)\,\varepsilon^2. \tag{32}$$

Prin urmare, într-un proces de încărcare cu tensiuni pozitive sub limita de proporţionalitate, avem $U - U_0 > F - F_0$, şi entropia creşte. La descărcare, dimpotrivă, entropia revine la valoarea sa iniţială. (Evident, aceasta este cu putinţă numai pentru că epruveta nu constituie un sistem izolat.)

Trebuie să remarcăm că în cazul unui proces de descărcare ce începe de la $\varepsilon_1 > \varepsilon_s$, entropia *nu revine* la valoarea sa iniţială: procesul nu este reversibil, şi deci variaţia entropiei se datoreşte *nu numai* variaţiei cantităţii de căldură.

Chiar dacă în procesul de descărcare deformaţia trece printr-o valoare $\varepsilon < \varepsilon_s$, (vezi linia $CC'''C'$ de pe fig. 3.5.1), entropia nu mai este egală cu cea corespunzătoare aceleiaşi valori ε (şi T) la încărcare: într-adevăr, ε şi T sînt coordonate generalizate, a căror cunoaştere epuizează cunoaşterea stării corpului *numai pentru o ecuaţie de stare dată*; or, ecuaţiile de stare corespunzătoare încărcării şi descărcării, pe porţiuni diferite ale curbei caracteristice, sînt şi ele diferite.

Dacă însă corpul trece a doua oară prin aceleaşi valori pentru ε, σ şi T, atît energia cît şi entropia trebuie desigur să revină la valorile iniţiale. Astfel, descărcînd corpul pînă la $\sigma = 0$ pornind de la o valoare $\varepsilon_1 > \varepsilon_s$, şi încărcîndu-l apoi din nou pînă la revenirea la valorile ε_1, σ_1 (notate acum ε_3, σ_3), obţinem o buclă de hysteresis ale cărei capete definesc

un segment de pantă $E(T)$. Întrucît avem $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\sigma_1 = \sigma_3$, trebuie să avem și $U_1 = U_3$, $S_1 = S_3$. Întrucît curba de descărcare este situată *sub* cea de încărcare, rezultă că aria buclei de hysteresis măsoară lucrul mecanic pierdut în cursul acestui proces, care *nu este* un proces reversibil: drumurile de la starea (1) la (2) și apoi de la (2) la (3) ≡ (1) nu pot fi parcurse trecînd prin *aceleași* stări intermediare. Din relația (12) deducem

$$\int_{(1)}^{(3)} \delta(Q)/T < S_3 - S_1 = 0\,. \tag{33}$$

Întrucît T = const., urmează $\delta Q < 0$, astfel că în cursul acestui proces, corpul *cedează căldură*.

Bucla de hysteresis oferă deci un exemplu simplu de *degradare* a energiei: energia rămîne constantă, dar o parte a lucrului mecanic cheltuit pentru realizarea acestui ciclu se transformă în căldură, cedată exteriorului. Ținînd seama de valoarea echivalentului mecanic al căldurii, aria buclei de hysteresis permite calcularea acestei cantități de căldură în calorii.

§ 6. POTENȚIALUL ELASTIC

În paragraful precedent am prezentat cazuri simple în care există o funcție de stare a cărei diferențială totală este lucrul mecanic elementar (vezi (5.18), (5.19)). În astfel de cazuri, lucrul mecanic de încărcare nu depinde de drumul de deformare, și este în întregime recuperat la descărcare. Să stabilim legătura dintre aceste rezultate și problema comportării corpului *elastic*.

a) Lucrul mecanic de deformație

Fie că starea corpului elastic, caracterizată de mărimile u_i, ε_{ij}, σ_{ij} la o temperatură T, este determinată de aplicarea unor forțe de volum $\boldsymbol{F}$ și a unor forțe superficiale $\boldsymbol{f}$. Procesul cvasistatic ducînd de la starea normală la starea de echilibru elastic deformat poate fi descompus într-o succesiune de treceri de la o stare de echilibru la altă stare apropiată, corespunzătoare unor forțe $\boldsymbol{F} + \delta\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{f} + \delta\boldsymbol{f}$ care produc deplasări, deformații și tensiuni $u_i + \delta u_i$, $\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}$, $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$. (Subliniem că aci δ *nu este* un simbol de diferențiere, ci reprezintă numai variații elementare ale mărimilor considerate în procesul de încărcare.) În cazul stării elastice, aceleași relații rămîn valabile și pentru descărcare. În particular, deplasarea $\delta\boldsymbol{u}$ poartă numele de *deplasare* (*elemntară*) *virtuală*, întrucît ea nu corespunde cu necesitate unei deplasări reale în corp.

Dat fiind un domeniu $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$, de frontieră $\mathscr{S}'$, să evaluăm *lucrul mecanic elementar virtual* $\delta L'$ al tuturor forțelor exterioare în raport cu $\mathscr{V}'$ (forțele de volum, *și* tensiunile pe frontiera $\mathscr{S}'$) cheltuit în trecerea de la starea $\boldsymbol{u}$ la starea $\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}$.

Mărginindu-ne la cazul *liniarităţii geometrice* (nu neapărat şi fizice), vom raporta toate cantităţile la coordonatele iniţiale, şi vom integra pe domeniul nedeformat. Obţinem astfel

$$\delta L = \iint_{\mathscr{S}'} (\boldsymbol{\sigma}_n + \delta\boldsymbol{\sigma}_n)\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S + \iiint_{\mathscr{V}'} (\boldsymbol{F} + \delta\boldsymbol{F})\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V$$

sau încă, neglijînd termenii de ordin superior:

$$\delta L = \iint_{\mathscr{S}'} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S + \iiint_{\mathscr{V}'} \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V. \tag{1}$$

(Amintim că în definiţia lucrului mecanic intervine produsul scalar al forţei cu deplasarea *finală* a punctului ei de aplicaţie, astfel că modul în care variază $\delta\boldsymbol{u}$ în timp nu ne interesează.)

Dimensiunea acestui lucru elementar este desigur $[\delta L'] = \mathrm{FL}$.

Introducînd (2.3.3) în (1) şi utilizînd formula lui Gauss—Ostrogradski (7.2.9), obţinem

$$\delta L' = \iint_{\mathscr{S}'} \sigma_{ij} n_j \delta u_i\,\mathrm{d}S + \iiint_{\mathscr{V}'} F_i \delta u_i\,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathscr{V}'} [(\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} + F_i\delta u_i]\,\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint_{\mathscr{V}'} (\sigma_{ij,j} + F_i)\,\delta u_i\,\mathrm{d}V + \iiint_{\mathscr{V}'} \sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j}\,\mathrm{d}V \tag{2}$$

de unde, în virtutea ecuaţiilor statice (2.4.10):

$$\delta L' = \iiint_{\mathscr{V}'} \sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j}\,\mathrm{d}V. \tag{3}$$

Vom nota

$$\delta\Phi = \sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j}, \tag{4}$$

astfel că $\delta\Phi$ are semnificaţia unui lucru mecanic elementar virtual *unitar* al forţelor exterioare, pe deplasările virtuale elementare corespunzătoare. Evident, $[\delta\Phi] = \mathrm{FL}^{-2}$.

Datorită liniarităţii geometrice, avem desigur $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) = \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) + \varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$, de unde urmează

$$\delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\,[(\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}]. \tag{5}$$

Întrucît $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, obţinem din (4) şi (5) expresia (compară cu (5.23)) :

$$\delta\Phi = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}, \tag{6}$$

astfel că lucrul mecanic elementar virtual căutat este

$$\delta L' = \iiint_{\mathcal{V}'} \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V. \tag{7}$$

Lucrul mecanic $\delta\Phi$ este deci egal cu produsul contractat al tensorului tensiune cu tensorul variaţiei deformaţiei. Din această cauză, el poartă şi numele de lucru mecanic elementar virtual unitar al tensiunii în cîmpul variaţiilor deformaţiei, sau încă, pe scurt, *lucru* (mecanic) *elementar de deformaţie.*

OBSERVAŢIE Rezultatul poate fi extins şi la cazul deformaţiei geometric neliniare, şi la cel al deformaţiei plastice.

Compararea relaţiilor (1) şi (7) este sugestivă.

Subliniem că $\delta\Phi$ *nu conţine* variaţia δT. Nu avem nici un motiv să presupunem că $\delta\Phi$ ar fi o diferenţială totală : într-adevăr, absenţa termenului în δT arată că în acest caz din (5.6) ar trebui să urmeze $\partial\sigma_{ij}/\partial T = 0$, ceea ce în general este fals. Din această cauză nu putem încă vorbi despre lucrul mecanic de deformaţie, ci numai despre lucrul mecanic *elementar* de deformaţie, subînţelegînd caracterul elementar al deformaţiei.

Simbolul $\delta\Phi$ este *definit* de membrul al doilea din (6) şi această expresie a lucrului de încărcare rămîne valabilă pentru *orice* stare a corpului (inclusiv starea elasto-plastică).

Expresia duală lui (6) :

$$\delta\Phi_c = \varepsilon_{ij}\,\delta\sigma_{ij} \tag{8}$$

nu are deocamdată nici un sens fizic. Întrucît însă este evident că

$$\delta\Phi + \delta\Phi_c = \mathrm{d}(\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}), \tag{9}$$

unde σ_{ij} şi ε_{ij} sînt priviţi ca parametri independenţi, vom spune că mărimea $\delta\Phi_c$ *definită* pe (8) este *lucrul mecanic elementar complementar de deformaţie.* (Compară cu (5.24).)

b) Energia elastică

Să reducem acum numărul de parametri, presupunînd că există relaţii

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{hk}, T), \qquad i, j, h, k = 1, 2, 3, \tag{10}$$

ceea ce repetă (1.1) — argumentul x fiind subînţeles — şi corespunde ipotezelor dependenţei locale, elasticităţii ideale şi liniarităţii geometrice. Acestea sînt deci *ecuaţiile de stare,* valabile numai între anumite limite, şi permiţînd considerarea a numai 7 coordonate generalizate. (Dacă relaţia (1.3) nu este verificată, această reducere a numărului parametrilor nu e posibilă.) Spre deosebire de relaţia (6), raţionamentele ce urmează

sînt deci valabile numai în cazul unui proces de deformaţie *elastică* (cu liniaritate geometrică). Ne vom limita la procesele cvasistatice (cazul dinamic va putea fi studiat ulterior, făcînd uz de principiul lui d'Alembert), şi vom presupune că nu există cîmpuri electromagnetice de natură să influenţeze parametrii mecanici.

Introducînd (6) în (5.15) şi (5.17), obţinem primul principiu al termodinamicii pentru procese de deformaţie *elastică cvasistatică* (deci reversibilă) sub formele echivalente

$$dU = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} + T\,dS, \qquad dF = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} - S\,dT, \tag{11}$$

unde există numai 7 variabile independente, astfel că termenii pentru $i = j$ apar cu coeficientul 1, iar ceilalţi, cu coeficientul 2.

Prezintă adesea avantaj să considerăm ca argumente toate cele *nouă* componente ale deformaţiei. Pentru aceasta, dată fiind de exemplu o funcţie $G(\varepsilon_{ij})$, $i \leqslant j$, vom defini o prelungire a ei $\hat{G}(\varepsilon_{ij})$ (pentru $i, j = 1, 2, 3$) supusă condiţiilor

$$G(\varepsilon_{ij}) = \hat{G}(\varepsilon_{ij}), \qquad \partial\hat{G}/\partial\varepsilon_{ij} = \partial\hat{G}/\partial\varepsilon_{ji}. \tag{12}$$

Vom folosi accentul circonflex pentru a indica prezenţa a 9 argumente (renunţînd ulterior la această convenţie, cînd numărul argumentelor rezultă din formule, sau e indiferent). Vom proceda analog şi pentru funcţii de componentele tensiunii.

În felul acesta găsim

$$\begin{aligned} &\partial\hat{G}/\partial\varepsilon_{ij} = \partial G/\partial\varepsilon_{ij}, && i = j; \\ &\partial\hat{G}/\partial\varepsilon_{ij} = \partial\hat{G}/\partial\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\,\partial G/\partial\varepsilon_{ij}, && i \neq j. \end{aligned} \tag{13}$$

Pentru un proces elastic cvasistatic, avem mai întîi din (11):

$$\sigma_{ij} = \partial U/\partial\varepsilon_{ij},\ \ i = j; \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}\,\partial U/\partial\varepsilon_{ij},\ \ i \neq j; \quad T = \partial U/\partial S,$$

şi relaţii similare pentru funcţia F. Ţinînd seama de (13), putem scrie

$$\begin{aligned} &\hat{\sigma}_{ij} = \partial\hat{U}/\partial\varepsilon_{ij}, && T = \partial\hat{U}/\partial S, \\ &\hat{\sigma}_{ij} = \partial\hat{F}/\partial\varepsilon_{ij}, && S = -\,\partial\hat{F}/\partial T. \end{aligned} \tag{14}$$

Întrucît $\delta\Phi$ nu este o diferenţială totală, atît lucrul mecanic cît şi cantitatea de căldură absorbită de corp depind în general de istoricul procesului. Din (5.18), (5.19) — sau din (11) — urmează că, pentru ca $\delta\Phi$ să fie, într-un anumit punct, o diferenţială totală, este suficient ca procesul să se desfăşoare *adiabatic* sau *izotermic* în acel punct. În aceste

două cazuri-limită există deci cîte o funcție de stare, a cărei diferențială totală este $\delta\Phi$: anume, avem

$$\Phi_{ad} = U(\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{31}; S_0), \tag{15}$$

$$\Phi_{iz} = F(\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{31}; T_0), \tag{16}$$

unde S_0, respectiv T_0 sînt valorile constante ale entropiei, respectiv ale temperaturii, la care se desfășoară procesul.

Primul caz este cel al proceselor suficient de rapide pentru ca schimbul de căldură să nu fie posibil (de pildă cazul vibrațiilor elastice, cînd $\delta K = \delta Q = 0$ *pe un ciclu*). Al doilea caz este cel al proceselor cvasistatice, cînd există timp suficient pentru absorbție sau degajare de căldură, astfel ca temperatura să rămînă constantă.

În ambele cazuri există deci — la regimul $S = S_0$ sau $T = T_0$ — o funcție de stare Φ, denumită *energie potențială unitară de deformație elastică*, sau, pe scurt, *potențial elastic*, sau încă *energie elastică*. Dimensiunea ei este $[\Phi] = FL^{-2}$.

Ca stare-reper se alege (ca și în §2), starea în care atît deformațiile cît și tensiunile sînt nule, la o anumită temperatură $T = T_0$.

Aparent, orice proces de deformație necesită cheltuire de lucru mecanic; așadar, dacă considerăm că în starea naturală $\Phi_0 = 0$, în *orice* stare diferită de aceasta urmează $\Phi > 0$. În fapt însă, pot exista procese izotermice în cursul cărora corpul primește din mediul ambiant lucru mecanic *și* căldură. Pentru atingerea unei *anumite* stări este deci cu putință ca pentru $\delta Q > 0$ să avem $\delta\Phi < 0$. În cele ce urmează, ne vom limita însă la cazurile în care deformația se face cu *cheltuire* de lucru mecanic, astfel că pentru *orice* stare diferită de cea naturală, vom presupune $\Phi > 0$.

c) Corpuri elastice și corpuri hiperelastice

Corpurile pentru care sînt satisfăcute relațiile (1.1) — (1.3) sînt corpurile *elastice*. Corpurile elastice pentru care — în condiții date — există un potențial elastic, se numesc *hiper-elastice*.

În cazul unidimensional de la finele § 5, distincția nu are sens: lucrul elementar $\delta\Phi$ este diferențiala ariei definite de curba caracteristică, axa ε, și verticala corespunzătoare. Dimpotrivă, in cazul a 6 sau 7 variabile independente, cînd sînt deci posibile *diferite* drumuri din starea naturală într-o anumită stare finală, această deosebire este esențială: condiția (1.3) asigură numai corespondența biunivocă între tensiuni și deformații, *nu însă* și reversibilitatea procesului ca proces termodinamic, inclusiv posibilitatea de a recupera după descărcare *întreg* lucrul mecanic cheltuit la încărcare.

Prin urmare, în cazul deformației elastice, putem alege drept coordonate generalizate mărimile ε_{ij}, T sau mărimile σ_{ij}, T. Deformația elastică este reversibilă, sînt deci posibile cicluri (drumuri închise) în spațiul parametrilor ε_{ij}, σ_{ij}, T — așadar procese cu revenire la valoarea inițială a energiei și entropiei. Aceste cicluri pot fi reprezentate

tot ca cicluri în spaţiul figurativ al coordonatelor generalizate alese. Sensul de parcurs pe orice drum (închis sau deschis) este indiferent.

Dacă procesul de descărcare se desfăşoară pe acelaşi drum cu cel de încărcare, atunci variaţia lucrului mecanic pe întregul ciclu este nulă. În general însă, pentru procese de descărcare pe *alt* drum decît cel de încărcare avem, în virtutea primului principiu al termodinamicii şi a faptului că $\delta\Phi$ nu este o diferenţială totală:

$$\int_{\mathscr{C}} \delta\Phi = - \int_{\mathscr{C}} \delta Q \neq 0. \tag{17}$$

Aci este posibilă atît transformarea unei părţi din lucrul mecanic în căldură, cît şi procesul invers, de transformare a căldurii în lucru mecanic (spre deosebire de cazul gazelor, deocamdată cel puţin fără utilitate practică).

Odată cu depăşirea limitei de valabilitate a relaţiilor (1.1)—(1.3), reducerea la numai 7 coordonate generalizate nu mai este posibilă, deformaţia nu mai este reversibilă, drumurile din spaţiul parametrilor ε_{ij}, σ_{ij}, T nu mai pot fi parcurse în orice sens, şi orice drum închis în spaţiul celor 7 coordonate ε_{ij}, T sau σ_{ij}, T e inevitabil însoţit de creşterea entropiei, aşadar de scăderea energiei libere, de transformarea unei părţi din lucrul mecanic de încărcare, în căldură (disipaţia energiei).

În cazul deformaţiei **hiperelastice** în schimb, existenţa funcţiei de stare Φ arată că pentru *orice* ciclu avem, mai particular decît (17):

$$\int_{\mathscr{C}} \delta\Phi = \int_{\mathscr{C}} \delta Q = 0, \tag{18}$$

şi *procesul poate fi descris numai în termeni mecanici*, desigur identici pentru încărcare şi descărcare.

Ca şi starea elastică, starea hiperelastică depinde atît de material, cît şi de condiţiile procesului de deformaţie.

Unele rezultate importante ale teoriei elasticităţii sînt valabile pentru corpuri în stare elastică; totuşi, ***în forma ei actuală, teoria elasticităţii este încă o teorie a corpurilor în stare hiperelastică.***

OBSERVAŢIE. Se cer a fi menţionate aci şi cazurile de relaţii mai generale între factorii geometrici şi cei statici (sau dinamici). Notăm astfel importanţa corpurilor *hipoelastice* (caracterizate de o dependenţă biunivocă între *variaţiile* tensiunii şi deformaţiei în fiecare moment), precum şi a corpurilor *anelastice* (pentru care deformaţiile sînt reversibile şi legate liniar de tensiuni, dar în care, datorită prezenţei factorului timp, corespondenţa dintre tensiuni şi deformaţii nu este biunivocă). Indicaţii bibliografice pentru astfel de tipuri de corpuri vor fi date în § 4.1.

Existenţa potenţialului Φ permite scrierea efectivă a relaţiilor (10) sub forma sub care ele rezultă din (14). Întrucît $\Phi_{iz} \neq \Phi_{ad}$, urmează că şi relaţiile fizice (10) diferă de la un caz la celălalt. Chestiunea a fost

abordată experimental de lord Kelvin [2] (retipărit în [4], vol. 3). Vezi şi L. Brillouin [2]; A. Love [1], § 65, nota 3.

Dacă procesul nu e nici adiabatic, nici izotermic în fiecare punct, nu se poate afirma existenţa potenţialului elastic. Dacă însă variaţiile de temperatură şi entropie au o contribuţie mică în raport cu termenul $\delta\Phi$, se admite existenţa potenţialului chiar dacă condiţiile de integrabilitate ale formei $\delta\Phi$ nu sînt riguros îndeplinite. De asemenea, atunci cînd termenul TS e mic în raport cu U, se admite $F \cong U$, identificîndu-se potenţialul adiabatic cu cel izotermic şi admiţîndu-se că *fenomenul nu depinde de factorii termici*. Spre deosebire de cazul gazelor, în cazul deformării corpurilor solide ordinul de mărime al erorii astfel comise nu depăşeşte 1%.

Dacă însă procesul de deformaţie nu este cvasistatic, sau nu are caracter adiabatic ori izotermic, fiind însoţit de aporturi importante de căldură sau de schimbări mari de temperatură, problema nu mai poate fi studiată în termeni pur mecanici, ci *trebuie abordată ca o veritabilă problemă de termodinamică*.

d) *Notă istorică*

Ideea considerării potenţialului elastic aparţine lui G. Green [1] (vezi şi A. Clebsch şi B. de Saint-Venant [1], notă finală la § 16). Primul care a folosit mijloacele termodinamicii pentru a dovedi *existenţa* unei funcţii de stare Φ a fost Kelvin [2]. Este semnificativ faptul că Kirchoff, unul din creatorii termodinamicii, dar mecanicist convins, construieşte potenţialul Φ pe o cale pur formală, pornind de la postularea dependenţei liniare între tensiuni şi deformaţii (vezi G. Kirchoff [3], § 11.7; vezi şi A. Clebsch şi B. de Saint-Venant [1], pag. 61). Elaborarea amănunţită a problemelor termodinamicii deformaţiei începe în fapt cu J. Gibbs [1], [2] — şi este încă departe de o soluţie definitivă.

§ 7. CORPURI HIPERELASTICE

a) *Formulele lui Green*

În cele ce urmează, ne vom limita la cazul în care există un potenţial Φ care depinde numai de componentele deformaţiei şi de punct:

$$\Phi = \Phi(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}; x_1, x_2, x_3). \tag{1}$$

Acesta se numeşte *potenţialul lui Green*. Forma obţinută subliniază caracterul reversibil al deformaţiei şi implică ipoteza dependenţei locale.

Utilizînd (6.12), (6.13) şi introducînd (1) în (6.14), obţinem *formulele lui Green*:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \partial\hat{\Phi}/\partial\varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

sau încă

$$\sigma_{ii} = \partial\Phi/\partial\varepsilon_{ii}, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}\,\partial\Phi/\partial\varepsilon_{ij} \qquad (i \neq j). \tag{3}$$

Formulele lui Green dau deci conţinutul legii fizice (1.1) pentru corpuri hiperelastice, în teoria deformaţiei liniare. (Relaţii similare se obţin în teoria deformaţiei neliniare: vezi A. Green şi J. Adkins [1]; V. Novojilov [1], [3].)

Întrucît Φ este funcţie de cele 6 componente ale deformaţiei, avem *în fiecare punct* (aşa dar pentru $x_i = \text{const.}$):

$$d\Phi = (\partial\Phi/\partial\varepsilon_{ij})\,d\varepsilon_{ij}, \quad i \leqslant j; \tag{4}$$

condiţia $i \leqslant j$ arată că aci apar numai diferenţialele celor 6 variabile independente. Ţinînd seama de (6.13) şi (2), obţinem

$$d\Phi = \sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}, \tag{5}$$

unde suma se face pentru *toate* valorile i, j. Obţinem astfel din nou expresia (6.6), de data aceasta însă pentru o funcţie de stare Φ.

Din (5) se deduc uşor relaţiile (2) — sau (3) — mărimile σ_{ij} fiind pur şi simplu coeficienţii diferenţialelor $d\varepsilon_{ij}$.

Întrucît cunoaşterea componentelor ε_{ij} este echivalentă cu cea a invarianţilor deformaţiei şi a poziţiei axelor principale (vezi finele § 1.8), putem pune (1) sub forma[6])

$$\Phi = \Phi(E_1, E_2, E_3;\ \psi_1, \psi_2, \psi_3;\ x_1, x_2, x_3), \tag{6}$$

valabilă pentru o temperatură sau o entropie constantă. Dacă funcţia (6) nu depinde explicit de coordonatele x_i, corpul este *omogen* (din punct de vedere elastic); dacă ea nu depinde explicit de unghiurile ψ_i, el este *izotrop*.

b) Constantele elastice

Legea (3) ia forme diferite după natura funcţiei Φ. Ne putem da astfel de funcţii sub formă de serii de puteri ale componentelor ε_{ij}, concentrînd deci eventualele proprietăţi de neomogenitate în coeficienţii seriilor. Evident, o astfel de dezvoltare nu poate conţine termeni cu exponenţi negativi (care ar conduce la energii infinite pentru deformaţii infinit mici); luînd $\Phi_0 = 0$ în starea naturală, urmează că nu pot apare nici termeni liberi; în fine, dacă nu există tensiuni iniţiale, din (3) conchidem că aci nu pot apare nici termeni liniari [7]).

---

[6]) În genere, păstrăm acelaşi simbol Φ pentru potenţialul lui Green, oricare ar fi variabilele ce intervin explicit în expresia sa. Semnul $\wedge$ nu va fi nici el folosit, cînd nu există risc de confuzie.

[7]) În caz contrar, funcţia Φ trebuie construită altfel (vezi de ex. H. Poincaré [1], cap. 2; M. Biot [4], cap. 2 şi 5).

Dezvoltarea în serie începe deci cu termeni *patratici*, cărora le corespund în expresiile tensiunilor termeni liniari. Coeficienţii care înmulţesc diverşii termeni patratici, cubici etc., se numesc — ca şi în § 2 — *coeficienţi de rigiditate elastici* (pentru un corp omogen : *constante elastice*). Nu are rost să vorbim despre coeficienţi hiperelastici — distincţia este evidentă.

Se vede imediat că există 21 coeficienţi ai termenilor patratici, 56 ai celor cubici etc. Ca şi în § 2, determinarea acestor coeficienţi echivalează cu cunoaşterea deplină a proprietăţilor materialului din punctul de vedere al teoriei elasticităţii.

Dacă Φ este o funcţie patratică, problema este *cu liniaritate fizică.*

Să ne limităm acum la cazul unui corp hiperelastic cu liniaritate fizică ; relaţiile ce se obţin trebuie să constituie deci cazuri particulare ale celor din §§ 2 şi 3.

Întrucît există 21 termeni patratici în Φ, rezultă că în cazul hiperelasticităţii cei 36 coeficienţi c_{ij}^{hk} din (2.1) nu pot fi independenţi. Într-adevăr, din (6.6) — care ia acum forma (5) — rezultă că

$$\partial \sigma_{ij}/\partial \varepsilon_{hk} = \partial \sigma_{hk}/\partial \varepsilon_{ij},$$

astfel că, introducind aci (2.1), obţinem

$$c_{ij}^{hk} = c_{hk}^{ij}. \tag{7}$$

Aceste relaţii reduc numărul de coeficienţi exact la 21.

Pentru coeficienţii de deformabilitate avem, analog cu (7) :

$$C_{ij}^{hk} = C_{hk}^{ij}. \tag{8}$$

Întrucît starea hiperelastică depinde nu numai de material, ci şi de condiţiile procesului de deformare, este evident că pentru acelaşi material, condiţiile (7), (8) pot fi uneori satisfăcute şi alteori nu.

OBSERVAŢIA 1. Presupunind că forţele de interacţiune sînt forţe centrale şi că particulele se deplasează analog punctelor unui mediu continuu, A. Cauchy [6] a obţinut relaţii de dependenţă care reduc numărul coeficienţilor elastici la numai 15 în cazul general. În jurul acestei teorii, numită *rariconstantă* (a constantelor rarefiate), s-au purtat în secolul trecut discuţii înverşunate. Astfel, Saint-Venant a susţinut — cu anumite rezerve — punctul de vedere al lui Cauchy (vezi A. Clebsch şi B. de Saint-Venant [1], notă finală la § 16), în timp ce Green se situa pe poziţia teoriei *multiconstante* (a celor 21 coeficienţi).

Teoria rariconstantă a fost infirmată de datele experimentale. Într-adevăr, în cazul unui corp izotrop, ea conduce la egalitatea $\lambda = \mu$, de unde din (4.7) ar urma $\nu = 0{,}25$. Or, se constată că acest coeficient oscilează între limite destul de largi, şi destul de depărtate de această valoare (vezi finele § 4). Rămîne totuşi de cercetat dacă există condiţii speciale în care relaţiile suplimentare ale lui Cauchy sînt valabile. Pentru unele detalii, vezi L. Brillouin [3], § 10.9 ; A. Love [1], anexa B ; W. Voigt [2], § 278 ; mai recent problema a fost reluată de I. Stakgold [1].

c) *Teoria liniară. Formulele lui Castigliano*

În condiţiile teoriei liniare, existenţa potenţialului lui Green este asigurată numai în virtutea condiţiilor (7) — şi desigur şi (2.2). În acest caz, forma $\delta\Phi$ se integrează uşor. Anume, întrucît Φ este acum o funcţie patratică şi omogenă de ε_{ij}, teorema lui Euler asupra funcţiilor omogene dă

$$(\partial\Phi/\partial\varepsilon_{ij})\,\varepsilon_{ij} = 2\Phi, \quad i \leqslant j, \tag{9}$$

(unde $i \leqslant j$, întrucît avem 6 variabile). Utilizînd (6.13), obţinem

$$(\partial\hat{\Phi}/\partial\varepsilon_{ij})\,\varepsilon_{ij} = 2\Phi, \tag{10}$$

(condiţia $i \leqslant j$ a dispărut), şi deci, folosind formulele (2):

$$2\Phi = \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}. \tag{11}$$

Prin urmare, în cazul teoriei *liniare* pentru corpuri *hiper*-elastice, în locul relaţiei diferenţiale (5) obţinem forma întreagă (11). Introducînd aci (2.1), respectiv (2.4), căpătăm încă şi

$$2\Phi = c_{ij}^{hk}\,\varepsilon_{hk}\,\varepsilon_{ij}, \tag{12}$$

$$2\Phi = C_{ij}^{hk}\,\sigma_{hk}\,\sigma_{ij}, \tag{13}$$

relaţii care dau expresia potenţialului elastic ca funcţie patratică şi omogenă de componentele deformaţiei, respectiv tensiunii. (Întrucît $i, j = 1, 2, 3$, derivatele cantităţilor din (11)—(13) se calculează pentru funcţia $\hat{\Phi}$.)

În formula (11) există — spre deosebire de (6.6) şi chiar de (5) — deplină simetrie în ce priveşte rolul tensiunii şi deformaţiei. Aceeaşi teoremă a lui Euler dă, analog cu (9) şi folosind din nou (6.13):

$$2\Phi = (\partial\Phi/\underset{i\leqslant j}{\partial}\sigma_{ij})\,\sigma_{ij} = (\partial\hat{\Phi}/\partial\sigma_{ij})\,\sigma_{ij}, \tag{14}$$

de unde, prin comparaţie cu (11), urmează *formulele lui Castigliano*

$$\varepsilon_{ij} = \partial\hat{\Phi}/\partial\sigma_{ij}, \tag{15}$$

duale formulelor lui Green (2).

Scriind acum $\delta\Phi = \mathrm{d}\Phi$ sub forma (compară cu (4)):

$$\mathrm{d}\Phi = (\partial\Phi/\partial\sigma_{ij})\,\mathrm{d}\sigma_{ij}, \quad i \leqslant j, \tag{16}$$

căpătăm cu ajutorul formulelor (15):

$$\mathrm{d}\Phi = \varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}\sigma_{ij}, \tag{17}$$

aşadar tocmai lucrul complementar (6.8), pentru cazul particular al corpului hiperelastic în teoria liniară. În acest caz, avem deci

$$\delta\Phi = \delta\Phi_c = \mathrm{d}\Phi. \tag{18}$$

Atît formulele lui Green cît și cele ale lui Castigliano se pot obține prin derivare din (11) — sau din (12) și (13) — ținînd seama că între mărimile σ_{ij}, ε_{ij} există relațiile (2.1), (2.4). Privite împreună, aceste formule alcătuiesc un sistem de „ecuații canonice" ce amintește ca aspect și semnificație de ecuațiile lui Hamilton.

OBSERVAȚIA 2. Forma (6.6) a lucrului mecanic elementar este valabilă pentru *orice* proces de deformație (cu liniaritate geometrică, dar susceptibilă de generalizare la cazul geometric neliniar); forma (5) precum și formulele lui Green (2), sînt valabile (tot în cadrul liniarității geometrice) pentru un proces de deformație *hiperelastic*, dar altfel oarecare; forma (17) și formulele lui Castigliano (15) sînt însă valabile numai în cadrul teoriei corpului hiperelastic *cu liniaritate atît geometrică, cît și fizică*.

OBSERVAȚIA 3. Condiția de natură fizică $\Phi > 0$ (vezi § 6, pag. 111) impune anumite condiții coeficienților c_{ij}^{hk}. Într-adevăr, aceasta revine la a afirma că *forma patratică Φ trebuie să fie pozitiv definită*. Condiția necesară și suficientă pentru aceasta este dată de criteriul lui Sylvester (vezi de exemplu V. Smirnov [2], volumul 3, partea I-a, pct. 36): minorii diagonali ai matricii coeficienților formei (12) (sau (13)) trebuie să fie pozitivi, de unde rezultă anumite inegalități care trebuie satisfăcute de coeficienții elastici. În teoria neliniară, chestiunea este studiată de C. Truesdell și R. Toupin [2].

Ca și în cazul general, existența potențialului elastic în cazul unor corpuri cu anumite proprietăți de simetrie elastică trebuie să ducă la micșorarea numărului coeficienților corespunzători.

Pentru corpurile hiperelastice *anizotrope* liniare, numărul coeficienților de rigiditate variază între 21 (cristale din sistemul triclinic) și 3 (sistemul cubic).

În cazul unui corp cu *un plan de simetrie*, relațiile (3.6) se reduc la 8 condiții distincte și numărul de coeficienți independenți este $21-8=13$.

Pentru corpuri *ortotrope*, relațiile (3.7) dau 4 condiții distincte, și coeficienții independenți rămîn în număr de $21-8-4=9$.

În fine, pentru corpuri *elastice izotrope*, relațiile (3.19) arată că condițiile (7) sînt automat satisfăcute: prin urmare, *în cadrul teoriei liniare, orice corp elastic izotrop este și hiperelastic*. Pentru astfel de corpuri, distincția dintre corpuri elastice și hiperelastice nu are deci sens. În acest cadru, vom vorbi deci pe viitor numai despre corpuri *elastice* (izotrope).

OBSERVAȚIA 4. Condițiile din § 6 sînt condiții suficiente, dar nu și necesare, de hiperelasticitate. Totuși, ele arată că dacă procesul de deformație nu se desfășoară nici adiabatic, nici izotermic, este de așteptat că starea elastică a corpului, *în condițiile date*, să nu poată fi privită ca liniară și izotropă.

d) Potențialul elastic al corpurilor izotrope

Potențialul elastic al corpurilor izotrope cu liniaritate geometrică și fizică se va nota în general cu W. Expresia sa se obține introducînd (3.19) în (12) sau (3.18) în (11), de unde:

$$2W = \lambda\theta^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}^2, \tag{19}$$

ceea ce — ţinînd seama de (1.8.11) — se pune uşor sub forma

$$2W = (\lambda + 2\mu)\, E_1^2 - 4\mu E_2. \tag{20}$$

După cum era de aşteptat, W (formă patratică) nu depinde de E_3. Introducînd relaţiile (4.18) în (11), obţinem şi

$$2W = -\frac{\nu}{E}\Theta^2 + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^2. \tag{21}$$

Este vizibil că dacă introducem (19) în formulele lui Green (2) sau (21) în formulele lui Castigliano (15), obţinem din nou legea lui Hooke sub forma (3.18), respectiv (4.18). (Întrucît în (19), (21) avem $i, j = 1, 2, 3$, e limpede că W trebuie înţeles ca $\hat{W}$.)

Prezintă interes scrierea potenţialului elastic cu ajutorul legii lui Hooke sub forma (4.28). Pentru aceasta, să remarcăm că

$$\theta^2 = 3(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) - (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 - (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 - (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2. \tag{22}$$

Întrucît din (4.15) avem $\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$, şi întrucît din (4.23) urmează desigur $\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = e_{11} - e_{22}$, $\varepsilon_{12} = e_{12}$, şi încă patru relaţii similare, expresia (19) devine:

$$W = W^0 + W^e, \tag{23}$$

unde W^0 depinde numai de deformaţia de volum, iar W^e numai de cea de formă:

$$\begin{aligned} W^0 &= \frac{1}{2}k\theta^2, \\ W^e &= \frac{1}{3}\mu[(e_{11}-e_{22})^2 + (e_{22}-e_{33})^2 + (e_{33}-e_{11})^2 + 6e_{12}^2 + 6e_{23}^2 + 6e_{31}^2]. \end{aligned} \tag{24}$$

Ţinînd seama în (24) de relaţiile (4.28), obţinem şi

$$\begin{aligned} W^0 &= (1/18\,k)\,\Theta^2, \\ W^e &= (1/12\mu)[(s_{11}-s_{22})^2 + (s_{22}-s_{33})^2 + (s_{33}-s_{11})^2 + 6s_{12}^2 + 6s_{23}^2 + 6s_{31}^2]. \end{aligned} \tag{25}$$

Astfel de expresii sînt deosebit de importante în teoria plasticităţii (vezi şi §4, pag. 94).

Pentru a găsi condiţiile necesare şi suficiente pentru ca W să fie o formă pozitiv-definită, să considerăm matricea corespunzătoare a coeficienţilor

	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}	ε_{12}	ε_{23}	ε_{31}
ε_{11}	$\lambda + 2\mu$	λ	λ	0	0	0
ε_{22}	λ	$\lambda + 2\mu$	λ	0	0	0
ε_{33}	λ	λ	$\lambda + 2\mu$	0	0	0
ε_{12}	0	0	0	4μ	0	0
ε_{23}	0	0	0	0	4μ	0
ε_{31}	0	0	0	0	0	4μ

(unde coeficientul 4μ apare datorită faptului că în (19) indicii i, j iau toate valorile 1, 2, 3). Minorii diagonali succesivi au valorile:

$$\Delta_1 = \lambda + 2\mu, \quad \Delta_2 = 4\mu(\lambda + \mu), \quad \Delta_3 = 12\lambda\mu^2 + 8\mu^3,$$
$$\Delta_4 = 4\mu\Delta_3, \quad \Delta_5 = 4\mu\Delta_4, \quad \Delta_6 = 4\mu\Delta_5.$$

Toţi aceşti minori sînt pozitivi, dacă şi numai dacă

$$\mu > 0, \quad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0. \tag{26}$$

Or, din (4.15) şi (4.17) urmează că condiţia (26) este întotdeauna satisfăcută, — astfel că potenţialul elastic W este o formă patratică pozitiv-definită. Acest fapt va juca în cele ce urmează un rol esenţial (vezi § 4.5).

Cazul unui corp hiperelastic izotrop, dar eventual cu neliniaritate fizică, se poate obţine considerînd că potenţialul lui Green (6) este independent de unghiurile ψ_i:

$$\Phi = \Phi(E_1, E_2, E_3;\ x_1, x_2, x_3). \tag{27}$$

Dezvoltînd în serie această funcţie, deducem că există numai doi termeni patratici: E_1^2 şi E_2; trei termeni cubici: E_1^3, E_1E_2, E_3; ş.a.m.d. De aci rezultă din nou că un corp hiperelastic izotrop poate fi caracterizat — în cadrul teoriei liniare — prin numai doi coeficienţi elastici. Introducînd expresia potenţialului patratic W în formulele lui Green (3), regăsim legea lui Hooke (3.18) pentru corpuri izotrope.

Reţinînd în Φ şi termeni de grad superior, obţinem legi neliniare fizic pentru corpuri izotrope hiperelastice.

Toate cele de mai sus rămîn valabile pentru corpuri neomogene, determinarea efectivă a coeficienţilor elastici fiind însă considerabil îngreunată.

În cele ce urmează, ne vom limita la cazul *teoriei liniare a corpurilor omogene şi izotrope*. Ori de cîte ori va fi vorba de un cadru mai general, vom specifica aceasta.

CAPITOLUL 4

SISTEMUL COMPLET DE ECUAȚII AL TEORIEI ELASTICITĂȚII LINIARE

§ 1. ECUAȚIILE TEORIEI ELASTICITĂȚII

a) Ecuațiile elasto-staticii liniare

Pînă aci am examinat comportarea corpului elastic din trei puncte de vedere diferite, ceea ce a condus la a considera 3 componente ale deplasării, 6 componente ale deformației și 6 componente ale tensiunii. Aceste funcții sînt legate prin 6 ecuații geometrice, 3 ecuații statice, și 6 ecuații fizice. În total, dispunem acum de 15 ecuații pentru 15 funcții necunoscute.

În cele ce urmează, ne vom limita la studiul *deformației liniare cvasi-statice a corpurilor hiperelastice alcătuite din materiale omogene și izotrope care se supun legii lui Hooke*, așadar la ceea ce se numește curent *elasto-statica liniară*. (Vezi în partea a doua a paragrafului indicații asupra unor probleme cu caracter mai general. Vezi de asemenea § 0.4, pag. 30–31.)

Avem deci de a face cu cantitățile u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, raportate la coordonatele inițiale și legate prin ecuațiile

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{hk}\, \varepsilon_{hk}, \tag{3}$$

sau încă, în loc de (3) :

$$\varepsilon_{ij} = C_{ij}^{hk}\, \sigma_{hk}, \tag{4}$$

(ceea ce include și cazul corpurilor anizotrope și neomogene, în teorie liniară). Condițiile la limită vor fi prezentate ulterior (vezi § 2).

Sistemul (1)–(3) se numește *sistemul complet de ecuații ale teoriei elasticității* (statice și liniare). (Vezi § 5, pag. 139.) Acesta este un sistem de ecuații cu derivate parțiale, liniar, de primul ordin, cu coeficienți constanți pe lîngă termenii diferențiali. Relațiile (1) și (3) sînt omogene.

OBSERVAȚIA 1. Structura acestui sistem este foarte apropiată de cea a sistemului ecuațiilor descriind mișcările lente ale unui fluid viscos (vezi de ex. C. Iacob [5], §§ 4.21–4.33).

OBSERVAȚIA 2. Sistemul (1)—(3) poate fi studiat cu ajutorul mijloacelor analizei tensoriale, tehnică folosită sistematic pentru prima oară de către L. Brillouin [3] și F. Murnaghan [1], [2]. Vezi și V. Bloch [2]; A. Green și W. Zerna [1] (cap. 1 și 2 pentru relațiile generale și toată cartea pentru utilizarea lor); M. Haimovici [1], capitolul 1; N. Kilcevski [2]; N. Kocin [1], capitolele 3 și 4; Iu. Krutkov [1]; A. Lurie [4], capitolul 1; W. Prager [2]; I. Sneddon și D. Berry [1], partea A; o expunere modernă a aparatului matematic de folosit este dată de J. Ericksen [1], iar aplicații profunde sînt prezentate de C. Truesdell și R. Toupin [1] și C. Truesdell și W. Noll [1].

Aceste metode sînt cu deosebire utile în problemele neliniare, și în probleme în care însăși configurația corpului impune folosirea altor coordonate decît cele carteziene ortogonale. Dar nu trebuie uitat niciodată că în definitiv atenția trebuie concentrată asupra rezolvării unor anumite probleme la limită pentru anumite sisteme de ecuații cu derivate parțiale — și nu asupra aparatului, care nu servește decît la scrierea lor, este drept, sub o formă compactă și elegantă.

Pentru evaluarea importanței metodelor tensoriale, vezi recenzia lui F. Pohle la cartea lui M. Biot [4] (*Applied Mechanics Reviews*, no. 4/1965). Chiar examinarea structurii cărții lui A. Green și W. Zerna este instructivă în acest sens.

În cele ce urmează, metodele tensoriale nu vor fi folosite.

OBSERVAȚIA 3. Prezintă adesea interes scrierea ecuațiilor elasticității în coordonate *curbilinii*, legate de configurația frontierei (de obicei, în așa fel încît frontiera să fie suprafață de nivel pentru una din coordonate — ceea ce ușurează mult formularea condițiilor la limită și rezolvarea efectivă a problemei). Atît în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale, cît și în cazul celor neortogonale, este desigur inutil să se stabilească din nou ecuațiile elasticității: proprietățile tensoriale deja examinate permit transcrierea în orice sistem de coordonate a tuturor cantităților și relațiilor necesare, odată ele stabilite în axe carteziene.

Pentru detalii, vezi de exemplu G. Lamé [2]; E. și F. Cosserat [1]; P. Germain [1], capitolul 17; C. Iacob [5], §§ 4.34 și 4.35; N. Kilcevski [2], capitolul 4; N. Kocin [1], § 2.18; A. Lurie [4], §§ 1.6 și 1.7; V. Novojilov [3], capitolul 4 și §§ 5.21, 5.22; W. Prager [2], capitolul 1; I. Sneddon și D. Berry [1], §§ 52, 53 și 68; I. Sokolnikoff [2], § 4.48; S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 13. Rezultate utile în numeroase cazuri particulare sînt date de V. Bloch [2] și P. P. Teodorescu [4]. Vezi și articolele lui I. Beju [1] și M. Vahitov [1].

Menționăm în particular utilitatea coordonatelor curbilinii în studiul corpurilor de rotație — unde e firesc să considerăm coordonatele z (în lungul axei de rotație), ρ (distanța la axă într-un plan $z = \text{const.}$), și φ (unghiul măsurat în acest plan, de la o direcție de referință).

În studiul problemelor plane și antiplane, subliniem importanța coordonatelor curbilinii atașate reprezentării conforme a domeniului dat pe cerc sau pe o coroană circulară (vezi § A.7).

Într-un sistem de coordonate α, β, γ, componentele deplasării se notează u_α, u_β, u_γ; componentele deformației se notează $\varepsilon_{\alpha\alpha}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ etc., iar cele ale tensiunii $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ etc. (sau încă $\widehat{\alpha\alpha}$, $\widehat{\alpha\beta}$ etc.). Sensul acestor notații rezultă din interpretarea componentelor respective ca componente ale deplasării, deformației și tensiunii în *axele carteziene locale* atașate coordonatelor α, β, γ. Astfel, de exemplu $\widehat{\alpha\alpha}$ este proiecția după axa locală α a tensiunii pe elementul de normală α etc.

Introducînd acum (1) în (3) și mai departe în (2), se obține un sistem de trei ecuații pentru cele trei funcții necunoscute u_i, numit *sistemul ecuațiilor în deplasări*. Odată rezolvat acest sistem, relațiile (1) și (3) dau valorile deformației și tensiunii.

Pe de altă parte, ecuațiile (2) alcătuiesc un sistem de ecuații în tensiuni — insuficient totuși pentru a da soluția. Într-adevăr, chiar dacă am găsit o soluție a lor σ_{ij}, ne rămîne să aflăm componentele ε_{ij} — ceea ce este totdeauna posibil — și să calculăm pe u_i din ecuațiile (1) — ceea ce e în general cu neputință.

Ecuațiile (2) sînt valabile și în solidul rigid, dar starea de tensiune rămîne nedeterminată. Posibilitatea de *a alege* dintre stările de tensiune static posibile în corpul continuu, pe aceea care corespunde echilibrului elastic (vezi § 2.2), ne-o dă tocmai condiția ca starea de tensiune găsită să corespundă unei stări de deplasare posibile în corpul elastic. Condiția necesară și suficientă pentru aceasta constă în verificarea condițiilor lui Saint-Venant.

Sistemul static nedeterminat (2) trebuie deci completat cu ecuațiile (1.9.12), transcrise în tensiuni cu ajutorul lui (4). Aceasta echivalează cu introducerea ecuațiilor geometrice în cele statice, dar în alt mod decît la deducerea ecuațiilor în deplasări. Sistemul de 9 ecuații astfel obținut (3 ecuații statice și 6 ecuații de compatibilitate) se numește *sistemul ecuațiilor în tensiuni*.

Ambele sisteme vor fi explicitate în §§ 7, 8 pentru corpuri omogene și izotrope.

OBSERVAȚIA 4. Pentru sistemul în deplasări, problema verificării condițiilor lui Saint-Venant nu are sens.

Componentele deformației sînt singurele funcții necunoscute ce intervin în sistem numai sub formă întreagă, și deci pot fi calculate elementar. În afară de aceasta, este ușor să imaginăm condiții la limită în deplasări sau tensiuni, dar nu în deformații. De aceea, în centrul atenției se vor situa numai componentele deplasării și tensiunii.

Eliminînd componentele deformației din ecuațiile (1) — (3), putem scrie sistemul sub forma ce provine din (2.4.10) și (3.7.2):

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \tag{5}$$

$$\sigma_{ij} = \partial\hat{\Phi}/\partial\left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right], \tag{6}$$

sau încă din (2.4.10) și (3.7.15):

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \tag{7}$$

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2\,\partial\hat{\Phi}/\partial\sigma_{ij}. \tag{8}$$

Ecuațiile (5) — sau (7) — sînt *ecuațiile statice*. Ecuațiile (6) și (8) — sau oricare altele echivalente lor — vor purta numele de *ecuații fizico-geometrice*.

OBSERVAŢIA 5. Raţionamentele precedente sînt valabile şi pentru corpuri neomogene şi anizotrope. Forma (5), (6) rămîne valabilă şi în cadrul neliniarităţii fizice. Ambele sisteme pot fi generalizate la cazul neliniarităţii geometrice.

b) Alte tipuri de corpuri şi probleme

Sistemul considerat descrie un anumit tip de comportare a corpului solid deformabil. Este util să indicăm aci cîteva alte categorii importante de probleme, în strînsă conexiune cu cea de care ne ocupăm, şi să sugerăm cel puţin o bibliografie minimală.

Să presupunem că avem de-a face cu o problemă a cărei soluţie depinde de determinarea unei anumite mărimi abstracte $\mathfrak{v}$ (funcţie, vector, matrice etc.) aparţinînd unei mulţimi $\mathcal{V}$. Informaţiile pe care le deţinem asupra lui $\mathfrak{v}$ permit să scriem o ecuaţie

$$\mathfrak{B}\mathfrak{v} = \mathfrak{q}, \tag{9}$$

unde $\mathfrak{B}$ este o lege de corespondenţă (un *operator*) care asociază elementului necunoscut $\mathfrak{v}$, un anumit element cunoscut $\mathfrak{q}$. Foarte adesea, $\mathfrak{B}$ reprezintă o succesiune de operaţii de derivare şi integrare, aplicate funcţiilor componente ale mărimii $\mathfrak{v}$ (inclusiv, eventual, anumite condiţii la limită, condiţii de normare etc.).

Din păcate, posibilitatea de a *construi* relaţii de acest tip, descriind deci un fenomen mecanic, fizic etc., nu e decît arareori însoţită de posibilitatea de a *rezolva* ecuaţia (9), adică de a găsi un *operator invers* $\mathfrak{B}^{-1}$, care, aplicat celor doi membri din (9), să permită scrierea soluţiei problemei sub forma

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{q}. \tag{10}$$

În acelaşi timp cu necesitatea de a se stabili ecuaţiile exacte (9) ce regizează un anumit fenomen, este deci de majoră importanţă de a se găsi şi descrieri simplificate, mai uşor abordabile, ale fenomenului. Aceasta înseamnă că $\mathfrak{v}$ trebuie să fie înlocuită cu o altă necunoscută $\mathfrak{u}$ (care dă eventual o descriere mai sumară a fenomenului); lui $\mathfrak{B}$ i se substituie un alt operator $\mathfrak{A}$ (care nu mai ţine eventual seama de toate conexiunile iniţial considerate); în fine, $\mathfrak{q}$ este şi el înlocuit cu un alt element $\mathfrak{f}$ (eventual mai uşor de măsurat, de evaluat etc.). În felul acesta, ecuaţia (9) este înlocuită cu o ecuaţie aproximativă

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = \mathfrak{f}, \tag{11}$$

a cărei soluţie este

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{f}. \tag{12}$$

Se întîlnesc adesea cazuri în care operatorul invers exact $\mathfrak{B}^{-1}$ nu există, sau în care existenţa sa nu poate fi demonstrată decît pentru clase de funcţii puţin interesante sau rău adaptate problemei, sau în fine cazuri în care el nu poate fi construit efectiv. Înlocuirea ecuaţiei (9) prin (11) se justifică în primul rînd în măsura în care problema construirii operatorului $\mathfrak{A}^{-1}$ este mai simplă.

Astfel de raţionamente se întîlnesc în toate ramurile mecanicii, fizicii etc. În definitiv, ele conduc la a *neglija* anumite aspecte ale fenomenului real (înlocuirea lui $\mathfrak{v}$ prin $\mathfrak{u}$, şi a lui $\mathfrak{q}$ prin $\mathfrak{f}$), ceea ce conduce de asemenea şi la înlocuirea anumitor raporturi mai complexe prin altele mai simple (înlocuirea lui $\mathfrak{B}$ prin $\mathfrak{A}$).

Această simplificare se poate realiza pe două căi: sau se consideră numai *cazuri particulare* ale unui fenomen (de ex.: se studiază numai corpurile elastice omogene și izotrope), sau se admit anumite *descrieri simplificate* ale raporturilor dintre diferitele aspecte ale fenomenelor (de ex.: se admit relații de dependență liniară între deplasări și deformații, sau între deformații și tensiuni). Se înțelege de la sine că între aceste două puncte de vedere simplificatoare nu există o separație netă.

Să remarcăm totuși că înlocuirea ecuației (9) prin (11) este principial justificată numai în cazul în care mărimile u și v se găsesc într-un raport permițînd să se afirme că u este într-un anume sens „apropiat" de v. Pentru acest motiv, este de dorit ca, desemnînd prin $\mathcal{V}$, $\mathfrak{U}$ mulțimile în care sînt situate mărimile v, u, aceste două mulțimi să poată fi incluse într-o mulțime mai cuprinzătoare $\mathfrak{M}$, care să fie un *spațiu metric*. În acest caz, se va putea considera o *distanță* $\rho(u, v)$ între cele două soluții, și se va putea spune că u este acceptabil, dacă avem $\rho(u, v) \leqslant \varepsilon$, cu un ε suficient de mic. (Este inutil să pretindem ca ε să fie arbitrar de mic: metoda de calcul nu trebuie să încerce să depășească în precizie erorile posibile de măsurătoare, variațiile aleatoare ale fenomenului etc.)

Apoi, va trebui pusă chestiunea realizării unui algoritm pentru determinarea operatorului $\mathfrak{B}^{-1}$, a convergenței sale, a stabilității sale etc. Acestea sînt chestiuni de analiză funcțională recent abordate de către P. Bondarenko [1].

În ce ne privește, sistemul (1)—(3) joacă aci rolul ecuației simplificate (11), unde necunoscuta u este ansamblul funcțiilor u_i, ε_{ij}, σ_{ij}. Ecuația exactă (9) ar descrie fenomenul în termenii din § 0.3, pag. 28 — care sînt deocamdată cu totul inabordabili. În schimb, se pot considera diferite probleme

$$\mathfrak{A}_j u_j = \mathfrak{f}_j, \tag{13}$$

reprezentînd, toate, puncte de vedere intermediare între cel din (9) și cel din (11).

Vom da aci unele indicații asupra unor astfel de probleme, „urcînd" de la (11) la (13). Se vor putea distinge teorii mai generale din punctul de vedere al fenomenului fizic examinat, precum și teorii mai generale din punctul de vedere al descrierii matematice adoptate.

În ce privește aspectul fizic, se vorbește despre comportare *inelastică* a mediului, cu referire la orice încălcare a schemei considerate în capitolul 3. Chestiunea este tratată în detaliu în importantul articol de sinteză al lui A. Freudenthal și H. Geiringer [1]. Vezi și B. Lazan [1]; C. Zener et al. [1].

În general, trebuie să distingem între deformația *anelastică* (caracterizată prin disipare de energie mecanică datorită interacțiunii cu un flux de energie nemecanică sau cu un flux de particule materiale), deformația *visco-elastică* (disipație datorată interacțiunii cu componente fluide viscoase), în fine, deformația *plastică* (disipație provenind din frecarea internă). Combinații de astfel de fenomene complică încă mai mult tabloul final.

Cu privire la fenomenele anelastice, vezi indicațiile date de A. Freudenthal și H. Geiringer [1], §§ 15—16. Un loc important revine teoriei *termo-elasticității* (vezi B. Boley și J. Weiner [1]; o expunere elementară este dată de S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 14; vezi încă indicațiile din J. Goodier [4], § 8), precum și teoriei *corpurilor poroase* și a *corpurilor granulare*, cu prezență a mai multe faze (solidă, fluidă) (vezi M. Biot [1]; H. Deresiewicz [3], [4]; A. Lubinskii [1]; R. Mindlin [5]).

Teoria corpurilor visco-elastice (A. Freudenthal și H. Geiringer [1], §§ 17—20; §§ 27—29; §§ 32—34) consideră scheme în care fiecărui *istoric* al deformației i se asociază un *istoric* al tensiunii. Istoricul imediat al fenomenului conduce la introducerea derivatelor de primul

ordin al mărimilor studiate; mai general, se pot considera derivate de diferite ordine, şi în definitiv operatori integro-diferenţiali. Printre lucrările recente, vezi M. Biot [4], cap. 6; B. Coleman [2]; M. Gurtin şi E. Sternberg [4]; M. Mişicu [7] (pentru teoria asimetrică); J. Radok [2]; E. Sternberg şi S. Al. Khozaie [1].

În fine, cu privire la teoria (sau teoriile) plasticităţii, vezi § 0.3, pag. 28.

Apropiindu-ne de cadrul teoriei elasticităţii, cităm mai întîi studiul corpurilor în stare *hipo-elastică* (vezi § 3.6, pag. 112; pentru detalii vezi G. Grioli [3], capitolul 9; W. Prager [2], §§ 8.1–8.3; C. Truesdell şi W. Noll [1], cap. D, partea IV.) Să remarcăm aci că, pentru corpurile în stare hipo-elastică, nu există stare nulă, iar componentele variaţiei tensiunii depind de cele ale variaţiei deformaţiei, dar nu şi de *viteza* de variaţie a acestora; aceasta conduce la concluzia că materialele hipo-elastice nu sînt vîscoase. Deformaţia hipo-elastică este reversibilă şi, dacă se consideră numai mici deformaţii în vecinătatea unei stări fără tensiuni, se ajunge pur şi simplu la cazul corpurilor elastice.

Pentru raporturile între corpurile hipo-elastice, elastice, şi hiper-elastice (în teorie neliniară), vezi B. Bernstein [1]; W. Noll [2]; W. Prager [2], capitolele 8–10; C. Truesdell [2]; C. Truesdell şi W. Noll [1], cap. D.

Metode apropiate de cele ale teoriei elasticităţii sînt folosite în *teoria dislocaţiilor*, care se dovedeşte a fi un domeniu de contact important între teoria elasticităţii şi teoria plasticităţii. Vezi B. Bilby [1]; J. Friedel [1]; E. Kröner [4]–[7]; E. Kröner şi A. Seeger [1]; L. Landau şi L. Lifşiţ [1], capitolul 4; A. Seeger [1], capitolul C; V. Volterra şi E. Volterra [1]. Vezi de asemenea indicaţiile din § 6.10, pag. 407. Pentru studiul mediilor cu microstructură (cu modificare a ipotezei mediului continuu) vezi I. Kunin [1]; R. Mindlin [6]; M. Mişicu [8], [9].

O imensă literatură este consacrată *teoriei neliniare* a elasticităţii. Cităm, ca un minimum de indicaţii, monografiile lui A. Eringen [1]; I. Goldenblatt [1]; A. Green şi W. Zerna [1], capitolele 3 şi 4; A. Green şi J. Adkins [1]; G. Grioli [3], capitolele 4, 5 şi 7; D. Kutilin [1]; F. Murnaghan [2]; V. Novojilov [1], [3]; C. Pearson [2], capitolul 10; W. Prager [2], capitolele 9 şi 10; L. Sedov [2]; A. Signorini [3]; marile articole ale lui C. Truesdell [1]; C. Truesdell şi W. Noll [1], cap. D; C. Truesdell şi R. Toupin [1]; articolele de sinteză ale lui J. Adkins [3]; T. Doyle şi J. Ericksen [1]; R. Rivlin [1]; lucrările lui V. Bondar [1]; R. Hill [1]; M. Mişicu [1]; B. Seth [1]; A. Signorini [1], [2]; S. Zahorski [1]; etc.

Pentru *teoria asimetrică* a elasticităţii (§ 2.1, pag. 63), vezi E. şi F. Cosserat [4], capitolul 4; A. Green şi R. Rivlin [1], [2]; G. Grioli [3], capitolul 10; R. Mindlin [7]; R. Mindlin şi H. Tiersten [1]; M. Mişicu [7]; V. Palmov [4], [6]; G. Savin [2]; R. Toupin [1], [2].

Pentru studiul corpurilor elastice *anizotrope*, vezi indicaţiile din J. Goodier [4], § 7; articolul de sinteză al lui M. Fridman [1]; monografiile lui A. Green şi W. Zerna [1], capitolele 6, 7 şi 9; S. Lehniţki [1], [2]; A. Love [1], capitolul 6; J. Nye [1]; W. Voigt [2].

Pentru corpurile elastice *neomogene*, vezi articolul informativ al lui Z. Hashin [1]; vezi şi lucrările lui J. Eshelby [1]; V. Lomakin [1]; J. Molyneux şi M. Beran [1]; J. Nowinski şi S. Turskii [1]; W. Olszak [2]; W. Olszak şi J. Rychlewski [1]; V. Palmov [5]; N. Rostovţev [7].

Mai menţionăm aci problemele speciale ale *aero-elasticităţii* — care se ocupă de corpuri şi solicitări de tipul celor ce intervin în mişcarea avioanelor; vezi articolul informativ al lui R. Bisplinghoff [1].

Pentru a termina, mai amintim că problemele generale ale mecanicii mediilor continue deformabile sînt tratate pentru diferite tipuri de corpuri, din puncte de vedere diferite şi la nive-

luri diferite de complexitate, în lucrări ca cele ale lui M. Biot [4]; P. Germain [1]; W. Prager [2]; Iu. Rabotnov [2]; L. Sedov [2]; C. Truesdell şi W. Noll [1]; C. Truesdell şi R. Toupin [1] (vezi aci clasificaţia şi analiza din §§ 293–305).

În ce priveşte toate indicaţiile de mai sus, s-ar putea remarca faptul că ipotezele **a**–**e** din § 0.4, pag. 29, sînt comune aproape tuturor acestor tipuri de probleme; generalizările provin în primul rînd din renunţarea la ipotezele **d** şi **e**; în ce priveşte ipotezele de la **f** la **j**, unele din ele depind de schema fizică aleasă, pe cînd altele reflectă numai simplificări de natură matematică (cum este de ex. cazul celor două ipoteze de liniaritate; pentru această din urmă chestiune, vezi P. Germain [1], §§ 5.1–5.4).

§ 2. PUNCTE DE VEDERE. METODE DE STUDIU. PROBLEME FUNDAMENTALE

a) Puncte de vedere asupra studiului sistemului de ecuaţii ale elasto-staticii

Pentru studiul sistemului (1.1)–(1.3), se pot lua în considerare (deocamdată) două metode. (O a treia va fi examinată în § 6.)

Metoda directă. Se cunosc: configuraţia corpului, coeficienţii elastici ai materialului, şi datele acţiunii exterioare (forţe de volum, şi forţe sau deplasări sau alte date la limită). Se cere să se determine starea elastică a corpului (vectorul $\boldsymbol{u}$, tensorii $\mathbf{E}$ şi $\boldsymbol{\Sigma}$).

Metoda inversă. Se cunosc: starea elastică a corpului şi – în parte – configuraţia sa, coeficienţii elastici, datele acţiunii exterioare. Se cere să se determine elementele încă necunoscute relative la acţiunea exterioară, coeficienţii elastici, forma corpului.

Trebuie spus că şi acest mod de a privi lucrurile este încă destul de depărtat de realitate. Într-adevăr, ceea ce cere practica, este de a putea determina dintr-un punct de vedere optimal *forma* corpului destinat a suporta o anumită solicitare, *materialul* de utilizat, *tehnologia* de adoptat. În etapa actuală, aceasta este adesea o chestiune de intuiţie şi imaginaţie inginerească, care este numai *urmată* de o *verificare* a proprietăţilor mecanice garantate de soluţia propusă.

Lucrări tinzînd spre adoptarea unor criterii precise de *alegere optimală* sînt datorate şcolilor lui W. Prager (criteriul greutăţii minimale a corpului), I. M. Rabinovici (criteriul egalei rezistenţe a părţilor corpului), Z. Wasiutinski (criteriul energiei de deformaţie minimale pentru un volum dat). Din păcate, majoritatea rezultatelor existente pînă azi se referă numai la teoria sistemelor de bare. Discuţii critice ale chestiunii, urmate de indicaţii bibliografice vaste, aparţin lui M. Reitman şi G. Şapiro [3]; Z. Wasiutinski şi A. Brandt [1]. Vezi şi I. M. Rabinovici [1]; V. Komarov [1]; T. Mura et al. [1].

O „teorie optimală" a elasticităţii este azi încă numai un ideal îndepărtat. Ceea ce se poate totuşi face, este de a se evita ca o parte a corpului elastic să „lucreze" în condiţii de suprasarcină, în timp ce altă parte să nu fie decît prea puţin solicitată. Întrucît este evident că proprie-

tățile de rezistență ale ansamblului sînt, în mare măsură, determinate de rezistența părților sale cele mai slabe, cele mai solicitate, — se vede că este foarte important să știm să determinăm, cel puțin pentru un corp de formă dată și alcătuit din materiale cu proprietăți prescrise, zonele de creștere importantă a tensiunilor față de anumite valori medii. Aceste zone se numesc zone de *concentrări ale tensiunilor* și ele apar adesea în vecinătatea punctelor de aplicare ale unor sarcini concentrate, și a punctelor de modificare bruscă a configurației geometrice sau mecanice a corpului (de ex. în vecinătatea cavităților interioare, a discontinuităților tangentei sau planului tangent la frontieră, a suprafețelor sau curbelor de discontinuitate a proprietăților mecanice ale materialului etc.).

O evaluare cantitativă a fenomenului poate fi dată cu ajutorul *coeficientului de concentrare a tensiunilor*, care este raportul dintre o mărime caracteristică (de ex., tensiunea tangențială maximală, sau energia de distorsiune maximală etc.) în zona de concentrare — și o valoare medie a mărimii corespunzătoare în ansamblul corpului, sau într-o anumită parte caracteristică a acestuia, sau în fine în corpul considerat în absența factorului care a cauzat apariția fenomenului de concentrare a tensiunilor (de ex., în absența unei cavități sau discontinuități a tangentei la frontieră etc.).

Pentru studiul acestei importante probleme, vezi monografia lui H. Neuber [2] și articolul informativ al lui E. Sternberg [2]. Vezi de asemenea indicațiile din § 7.1, pag. 512. Vom examina chestiunea în anumite exemple din capitolele 5, 6 și 8.

Cercetarea sistemului de ecuații din punctul de vedere al metodei inverse este elementară. Nu se pun probleme de existență sau unicitate a soluției. Această metodă prezintă uneori utilitate practică : de pildă, în determinarea experimentală a coeficienților elastici.

Dacă ne-am putea da *toate* tipurile de funcții u_i, *toate* domeniile ocupate de corpuri cu coeficienți elastici aleși în *toate* modurile posibile — am putea regăsi *toate* cazurile de încărcare imaginabile. Desigur, aceasta este cu neputință. Dar chiar și cunoașterea unui număr restrîns de soluții obținute pe linia metodei inverse, a jucat în teoria elasticității un rol analog celui al „dicționarului" de funcții primitive în calculul integral.

b) Metoda directă. Probleme fundamentale

Rezolvarea sistemului (1.1) — (1.3) pe linia metodei directe constituie chestiunea esențială a teoriei. Pentru a o putea aborda, trebuie să cunoaștem configurația geometrică a corpului $\mathcal{V}$, coeficienții elastici c_{ij}^{hk}, forțele de volum F, și anumite condiții la limită. Vom reține aci numai cele mai simple și mai importante condiții la limită, cărora le vor corespunde cele *patru probleme fundamentale* :

1° *Problema lui Dirichlet* : date fiind configurația geometrică, coeficienții elastici, forțele de volum și *valoarea la limită* (pe frontieră) *a vectorului deplasare*, se cere să se determine starea elastică a corpului.

Notînd cu $\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}}$ valorile la limită pe $\mathscr{S}$ ale lui $\boldsymbol{u}$, avem deci

$$\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{g}, \tag{1}$$

unde $\boldsymbol{g}$ este un vector, funcție de punct, cunoscut pe $\mathscr{S}$. Porțiunile de pe $\mathscr{S}$ pe care $\boldsymbol{g} = 0$ se zic a fi *fixe.*

2° *Problema lui Neumann* : date fiind configurația geometrică, coeficienții elastici, forțele de volum și *valoarea la limită a vectorului tensiune,* se cere să se determine starea elastică a corpului.

Introducînd relațiile (1.1) în (1.3) și pe acestea în (2.3.3), rezultă că $\boldsymbol{\sigma}_n$ poate fi obținut prin aplicarea unui operator diferențial liniar de primul ordin asupra lui $\boldsymbol{u}$: de aceea vom scrie $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})$. Pentru expresia sa explicită, vezi (7.1.9).

Cu aceasta, condiția la limită a problemei lui Neumann devine

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{f}, \tag{2}$$

unde $\boldsymbol{f}$ este un vector, funcție de punct, cunoscut pe frontieră. Porțiunile de pe $\mathscr{S}$ pe care $\boldsymbol{f} = 0$ se zic a fi *libere.*

3° *Problema mixtă* : date fiind configurația geometrică, coeficienții elastici, forțele de volum și *valoarea la limită a vectorului deplasare pe o parte $\mathscr{S}'$ a frontierei,* și *valoarea la limită a vectorului tensiune pe restul $\mathscr{S}''$ al frontierei,* se cere să se determine starea elastică a corpului.

Condiția la limită se scrie deci

$$\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}'} = \boldsymbol{g}, \ \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}''} = \boldsymbol{f} \text{ pentru } \mathscr{S}' \cup \mathscr{S}'' = \mathscr{S}, \ \mathscr{S}' \cap \mathscr{S}'' = \emptyset. \tag{3}$$

Este vizibil că (3) conține drept cazuri particulare pe (1) și (2).

4° *A patra problemă fundamentală* : date fiind configurația geometrică, coeficienții elastici, forțele de volum și *valoarea la limită a expresiilor*

$$a_{ij}\,\sigma_{nj}(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}} + b_{ij}\,u_j|_{\mathscr{S}} = c_i, \tag{4}$$

unde a_{ij}, b_{ij}, c_i sînt funcții de punct, cunoscute pe frontieră — se cere să se determine starea elastică a corpului.

În mod evident, cea de a patra problemă fundamentală conține drept cazuri particulare pe primele trei. În afară de aceasta, ea cuprinde și alte cazuri — de mare importanță — în care de exemplu pe anumite porțiuni ale frontierei sînt date *unele* din componentele tensiunii și *unele* din cele ale deplasării.

În (1)—(4), valorile la limită se înțeleg în sensul din (1.1.6)—(1.1.8).

OBSERVAȚIA 1. În numeroase lucrări se vorbește despre „prima" și „a doua" problemă fundamentală. Preferăm denumirile date, similare celor folosite în teoria ecuațiilor de tip eliptic. Totuși, denumirea de „problemă Neumann" e abuzivă : operatorul $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})$ *nu este* nici măcar un operator de derivare oblică, astfel că (2) nu este o generalizare nemijlocită a condițiilor curente din teoria ecuațiilor de tip eliptic. (Vezi (7.1.9). Vezi și C. Miranda [1], § 1.4.)

OBSERVAȚIA 2. Condițiile (1)—(4) sînt condițiile la limită ale *problemei în ansamblul ei.* Cunoașterea altor date la limită ar fi sau superfluă, sau contradictorie (vezi § 5). Dacă se rezolvă ecuațiile în tensiuni, componentele deformației se obțin prin operații aritmetice, după care componentele deplasării se găsesc prin integrarea ecuațiilor geometrice. Acest sistem se integrează *fără nici un fel de noi condiții la limită* : într-adevăr, componentele deplasării se deduc sub forma unor integrale definite, independente de drumul de integrare.

Aceeași observație rămîne desigur valabilă și pentru ecuațiile fizico-geometrice.

c) *Liniaritate. Superpoziția efectelor*

Să considerăm — pentru un același corp — *două* sisteme de solicitări exterioare (forțe de volum, și date la limită). Să atribuim tuturor cantităților (date și necunoscute) relative la aceste stări, cîte un indice $^{(1)}$, respectiv $^{(2)}$. Să considerăm acum datele (problemă mixtă)

$$F_i = a_1 F_i^{(1)} + a_2 F_i^{(2)}, \quad f_i = a_1 f_i^{(1)} + a_2 f_i^{(2)}, \quad g_i = a_1 g_i^{(1)} + a_2 g_i^{(2)}. \quad (5)$$

Ținînd seama de faptul că sistemul (1.1)—(1.3), precum și condițiile (1)—(4), conțin numai operații *liniare* (întregi sau diferențiale) asupra componentelor stării elastice, se vede ușor că cantitățile

$$u_i = a_1 u_i^{(1)} + a_2 u_i^{(2)}, \quad \varepsilon_{ij} = a_1 \varepsilon_{ij}^{(1)} + a_2 \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \sigma_{ij} = a_1 \sigma_{ij}^{(1)} + a_2 \sigma_{ij}^{(2)} \quad (6)$$

formează un sistem coherent de mărimi caracterizînd o stare elastică (adică, sumele ε_{ij} sînt tocmai deformațiile ce corespund deplasării-sumă u_i; iar sumele σ_{ij} sînt chiar tensiunile ce corespund deformațiilor-sumă ε_{ij}), și anume chiar starea corpului supus solicitării-sumă din (5).

Rezultatul constituie *teorema superpoziției efectelor*. El este de același tip cu principiul superpoziției deformațiilor (vezi § 1.3, pag. 40), care apare acum drept un caz particular al acesteia. Importanța sa practică este considerabilă : ea permite să se obțină soluția în numeroase probleme prin descompunerea solicitării (de volum și superficiale) în componente mai simple și prin studierea separată a problemelor parțiale obținute.

d) *Regularitatea soluțiilor*

Însăși structura ecuațiilor elasticității obligă să căutăm soluții $\boldsymbol{u} \in C^2(\mathscr{V})$ (vezi §A.1), pentru a se asigura continuitatea forțelor de volum, condiție cu sens fizic ușor de înțeles. Mai departe, pentru ca condițiile (1)—(4) să aibă sens, trebuie ca componentele σ_{ij} și u_i să poată fi prelungite prin continuitate pe $\mathscr{S}$. (Prezența cosinușilor directori ai normalei $\boldsymbol{n}$

în expresia componentelor σ_{ni} poate genera discontinuităţi în punctele singulare ale frontierei.)

În cele ce urmează, vom căuta în general soluţia în clasele

$$u_i \in C^2(\mathscr{V}) \cap C^0(\mathscr{V} + \mathscr{S}), \quad \sigma_{ij} \in C^1(\mathscr{V}) \cap C^0(\mathscr{V} + \mathscr{S}); \tag{7}$$

pentru aceasta vom admite numai date la limită *continue* pentru deplasări, sau avînd cel mult discontinuităţi de prima speţă pentru tensiuni. Astfel de soluţii se vor numi *regulate*, iar relaţiile (7) vor fi presupuse a priori verificate.

Dacă $\mathscr{V}$ nu este mărginit, datele (1)—(4) şi presupunerea (7) nu sînt îndestulătoare, şi trebuie completate prin anumite condiţii la infinit. Chestiunea a fost examinată în detaliu de M. Gurtin şi E. Sternberg [2]; V. Kupradze [2], capitolul 3. (Pentru problema similară în studiul ecuaţiei lui Laplace, vezi de exemplu A. Tihonov şi A. Samarskii [1], § 4.2.)

Din punct de vedere mecanic, este de aşteptat ca deplasările şi tensiunile produse de o sarcină ce acţionează pe o porţiune finită a corpului să tindă la zero atunci cînd distanţa la un punct fix oarecare tinde la infinit. *Natura* comportării la infinit a acestor mărimi rezultă din necesitatea respectării şi în cazul domeniilor infinite, a anumitor teoreme fundamentale. Pentru corpuri omogene şi izotrope, condiţiile corespunzătoare vor fi precizate în (7.6.18).

Condiţiile de regularitate se dovedesc adesea prea restrictive : ele elimină posibilitatea de a studia efectul forţelor concentrate, al modificărilor bruşte de configuraţie a frontierei, al discontinuităţilor proprietăţilor elastice etc. Ca şi în teoria ecuaţiei lui Laplace (vezi de ex. S. Sobolev [2], capitolul 2, şi [3], § 22.2), se pot studia soluţii *generalizate* ale ecuaţiilor elasticităţii, definind operatorii diferenţiali într-un sens generalizat, acceptînd condiţii la limită mai puţin restrictive, sau renunţînd la unele din condiţiile de regularitate. Pentru indicaţii, vezi de exemplu S. Mihlin [3], §§ 33 şi 34.

În fine, rezultatele teoriei distribuţiilor, care-şi găsesc deja aplicaţii esenţiale în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale (vezi L. Schwartz [1], [2]; vezi şi I. Ghelfand şi G. Şilov [1], volumul 1, §§ 2.4 şi 3.2; volumul 3, § 4.8; vezi mai departe indicaţiile din § A.2), pot fi utilizate pentru studiul ecuaţiilor elasticităţii.

În etapa actuală, acestea nu sînt încă probleme *specifice* de teoria elasticităţii ; de aceea, în cartea de faţă ne vom ocupa în principiu numai de soluţii regulate în sensul din (7), eventual cu condiţiile suplimentare (7.6.18); vom considera de asemenea unele soluţii cu singularităţi, care pot fi obţinute pe căi relativ elementare (vezi de ex. §§ 7.8 şi 9.5).

e) Metode experimentale şi altele

Lipsa de soluţii exacte a problemelor fundamentale, sau caracterul greu utilizabil în practică al acestora, obligă adesea în tehnică la folosirea unor metode aproximative insuficient justificate, ceea ce duce inevitabil la coeficienţi de siguranţă exageraţi, la soluţii insuficient de fine etc. Totodată, aceasta obligă la dezvoltarea — în paralel cu studiul teoretic exact — a meto-

delor experimentale și aproximative tinzînd spre abordarea acelorași probleme. (Vezi D. Drucker [1].)

Studiul teoretic al ecuațiilor elasticității este de aceea strîns legat de diferite aspecte experimentale: încercări de materiale, măsurători directe ale tensiunilor și deformațiilor pe corpul supus cercetării (sau pe un model convenabil redus), analogii mecanice sau electrice etc. (Orice fenomen descris de aceleași ecuații și aceleași condiții la limită ca o anumită problemă de teoria elasticității, constituie un analog pentru aceasta din urmă. Existența de astfel de analogii dovedește forța unificatoare a metodelor matematice. Totodată, acela dintre fenomenele analoge care permite o cercetare experimentală mai simplă, joacă rolul de etalon pentru studiul celorlalte).

În ce privește tehnica experimentală, mașinile de încercări mecanice, indicații bibliografice de experiențe, — vezi de exemplu N. Beliaev [1]; C. Mc. Gregor [1]; A. Iliușin și V. Lenskii [1], capitolul 8; J. Marin [1].

Pentru diferitele metode experimentale, analogii, modele, vezi A. Durelli et al. [1], și mai ales M. Hetenyi [1] (unde — printre altele — notăm articolele lui J. Goodier [2]; M. Hetenyi [2], [3]; R. Mindlin și M. Salvadori [1]; J. Wilbur și C. Norris [1]). Vezi și monografia lui M. Kirpicev [1] și articolul de sinteză al lui W. Soroka [1].

În chestiunea modelării electrice, vezi L. Gutenmaher [1]; G. Puhov [1]; B. Volinskii și V. Buchman [1]; vezi și Th. Higgins [6] (cu o bogată bibliografie).

Asupra analogiei membranei și a metodei fotoelasticimetrice, ne vom opri în §§ 5.16 și 5.20, respectiv § 6.13.

Pentru chestiunea coeficienților de siguranță, vezi V. Bolotin [2].

Pentru diferite metode aproximative vezi indicațiile de la finele § 4.

§ 3. CRITERII DE REZISTENȚĂ

Formularea problemelor fundamentale reprezintă desigur o schemă puternic abstractizată a chestiunii. Țelurile nemijlocit aplicative ale mecanicii cer însă răspuns la alte întrebări: ele cer să se clarifice dacă, date fiind anumite informații asupra unui corp, tensiunile, deformațiile, deplasările ce apar în urma aplicării sarcinii nu periclitează în ansamblu construcția, mașina etc. în alcătuirea căreia el intră.

Pentru aceasta, este necesar să se verifice mai întîi dacă tensiunile, în porțiunea și după direcția cea mai primejduită, nu depășesc anumite limite — ceea ce reprezintă verificarea *la rezistență*, din punctul de vedere al *tensiunilor admisibile*.

Adesea, chiar dacă aceste limite sînt depășite (mai ales prin apariția de deformații plastice), corpul în ansamblu continuă să-și îndeplinească rolul. De aceea se poate adopta punctul de vedere al calculului *sarcinilor admisibile* pentru corpul dat (sau un ansamblu de corpuri), verificîndu-se astfel *capacitatea portantă* a acestuia. Rezultatele obținute în acest mod conduc la o proiectare mai judicioasă — dar pretind o analiză foarte exactă.

În fine, întrucît se poate ca un corp deformabil să înceteze de a-și mai juca rolul, nu datorită distrugerii sale, ci prin apariția de deformații

sau deplasări incompatibile cu acest rol, trebuie avut în vedere şi calculul *deformației admisibile*, ceea ce constituie verificarea la *rigiditate*.

Dacă soluția problemelor fundamentale este cunoscută, aceasta permite să se dea răspuns şi problemelor aplicative enumerate. Dar chestiunea *criteriilor* după care trebuie să apreciem dacă un corp rezistă sau nu sarcinii, este desigur independentă de faptul dacă dispunem sau nu de soluția matematică a problemei considerate.

Ne vom mărgini la a considera aici unele puncte de vedere referitoare la chestiunea rezistenței locale a corpurilor. Cunoscute sub numele de *criterii de rezistență*, acestea au, sub aspectul fundamentării lor, un pronunțat caracter fizic. Deşi nu aparțin în fapt teoriei elasticității, prezentăm aci pe scurt unele din aceste criterii, pentru a da o idee asupra chestiunii şi a preciza limitele de valabilitate ale soluțiilor pe care teoria elasticității le poate furniza.

Toate aceste criterii conduc la a stabili anumite combinații de componente ale stării elastice (în special componente ale tensiunii) şi anumite valori critice ale acestora. Dacă într-un punct valoarea critică nu este atinsă, corpul se află în acel punct în zona elastică ; dacă ea este atinsă sau depăşită, corpul trece în acel punct în zona plastică (în acest caz vorbim despre *criterii de plasticitate*) ; dacă corpul este casant, atunci apar fisuri şi alte indicii de distrugere (în acest caz vorbim despre *criterii de rezistență*).

Chestiunea prezintă interes nu numai din punctul de vedere al aplicațiilor, ci şi pentru stabilirea unor căi de generalizare la cazul tridimensional a noțiunii atît de simple de limită de plasticitate sau de limită de rezistență din cazul unidimensional (vezi § 0.2).

1° *Criteriul tensiunii normale maximale*. Se propune drept stare-limită, acea stare în care cea mai mare (în valoare absolută) dintre componentele normale ale tensiunii atinge o valoare critică dată. Acest punct de vedere îşi găseşte justificare mai ales la distrugerea prin separare (smulgere) a corpurilor casante supuse la întindere.

2° *Criteriul deformației maximale*. Se propune drept limită, atingerea unei anumite valori critice de către deformația de alungire. Pentru un corp izotrop, ținînd seama de legea lui Hooke sub forma (3.4.19) şi notînd cu σ_1 pe cea mai mare (în valoare absolută) dintre tensiunile principale, aceasta revine la a stabili anumite limite pentru „tensiunea redusă" $\sigma_1 - \nu\,(\sigma_2 + \sigma_3)$.

Aceste două criterii intră frecvent în contradicție cu datele experimentale, mai cu seamă pentru că ele nu pot ține seama de faptul că majoritatea materialelor rezistă în bune condițiuni la solicitări hidrostatice extrem de mari, rămînînd totuşi în zona elastică. Este de aceea firească trecerea la utilizarea unor criterii care să țină seama — sub diferite forme — nu de componentele tensiunii, ci de *diferențe* de astfel de componente ; aceasta elimină automat eventualele presiuni hidrostatice, aduce pe primul plan deviatorul tensiunii, şi leagă chestiunea rezistenței de chestiunea *distorsiunii*, şi nu de cea a deformației în ansamblul ei.

3° *Criteriul tensiunii tangențiale maximale* (H. Tresca, B. de Saint-Venant). Se stabilește drept limită atingerea unei valori critice c de către tensiunea tangențială maximală în punctul considerat [1]); ținînd seama de (2.6.11), aceasta conduce deci la o relație de forma

$$T_{max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \leqslant c.$$

Să punem condiția ca această relație să rămînă valabilă și în cazul întinderii epruvetei cilindrice, punctul de pornire al oricărui studiu al proprietăților mecanice ale materialelor. Întrucît în acest caz $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (vezi (3.4.1)), de aci decurge $c = 0{,}5\ \sigma_s$, și relația de mai sus devine

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant \sigma_s. \tag{1}$$

Acest criteriu presupune deci cunoscute în fiecare punct tensiunile principale (dar nu și direcțiile principale). El nu prezintă dezavantajul menționat relativ la criteriile precedente și este în linii mari confirmat de datele experimentale. Trebuie totuși subliniat faptul că el neglijează rolul componentei mediane σ_2 a tensiunii, precum și faptul că cercetarea experimentală la torsiune duce pentru constanta c nu la valoarea $0{,}5\ \sigma_s$, ci la valori cuprinse în genere între $0{,}55\ \sigma_s$ și $0{,}6\ \sigma_s$.

Necesitatea de a ține seama de *toate* componentele tensiunii a condus pe E. Beltrami la formularea unui criteriu care stabilește drept limită de rezistență, atingerea unei valori critice de către energia unitară de deformație acumulată în material. Acest criteriu este infirmat — ca și primele două — de comportarea materialelor sub presiune hidrostatică, dar deschide drumul spre formularea unui criteriu bazat pe evaluarea acelei părți a energiei de deformație care nu depinde de presiunea hidrostatică. Astfel, se ajunge la

4° *Criteriul energiei de distorsiune maximale* (M. Huber, R. von Mises, H. Hencky). Se stabilește drept limită atingerea unei valori critice c' de către energia unitară de distorsiune W^e din (3.7.25).

Această relație trebuind să rămînă valabilă și în cazul epruvetei cilindrice supuse la întindere, din (3.7.25) se deduce imediat $c' = 2\sigma_s^2$, și criteriul considerat se scrie

$$(s_{11} - s_{22})^2 + (s_{22} - s_{33})^2 + (s_{33} - s_{11})^2 + 6\ (s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2) \leqslant 2\,\sigma_s^2 \tag{2}$$

(unde mărimile s_{ij} pot fi evident înlocuite cu σ_{ij}).

Această formulă este simetrică și poate fi imediat transcrisă în axe principale. În cazul torsiunii sau alunecării pure (vezi (3.4.8)), se obține pentru starea-limită $c = \sigma_s/\sqrt{3} = 0{,}577\ \sigma_s$, ceea ce concordă mai bine cu rezultatele experimentale decît valoarea $c = 0{,}5\ \sigma_s$ obținută cu ajutorul criteriului tensiunilor tangențiale maximale (vezi (1) și (3.4.11)).

---

[1]) A nu se confunda cu c din § 3.4.

Din ultimele două criterii rezultă limpede că în cazul tridimensional *componentele tensiunii pot depăși considerabil limita de plasticitate* σ_c, — datorită prezenței componentelor hidrostatice — *fără ca prin aceasta corpul să iasă din zona elastică. Dar de îndată ce valorile critice din* (*1*) *sau* (*2*) *sînt depășite, este un nonsens a mai face uz de ecuațiile teoriei elasticității.*

Pentru detalii asupra criteriilor de rezistență menționate, precum și pentru studiul altor variante (în special cea a lui O. Mohr), vezi A. Nadai [1], (cap. 15 — în special § 13 — și cap. 16). Vezi de asemenea N. Beliaev [2] (cap. 8 și 38); M. Filonenko-Borodici [3]; M. Filonenko-Borodici et al. [1] (vol. 1, cap. 12); A. Iliușin și V. Lenskii [1], § 3.6; Iu. Rabotnov [2] (§§ 3.46 — 3.50; cap. 5; cap. 17). Vezi și I. Goldenblatt și V. Kopnov [1] (corpuri anizotrope). Rezultatele recente în această direcție sînt prezentate de R. Irwin [1]. Pentru importanța lor istorică, vezi și considerațiile lui A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], §§ 37 și 38 (inclusiv Notele finale).

Pentru problema foarte importantă a *oboselii* materialelor (rezistență la sarcini alternate, după un mare număr de cicluri), vezi A. Freudenthal [1], A. Freudenthal și E. Gumbel [1].

§ 4. DESPRE TEOREMELE DE EXISTENȚĂ

Prima întrebare ce se pune în legătură cu problemele fundamentale este următoarea : cum trebuie să fie domeniul, coeficienții elastici, forțele de volum, și datele la limită, pentru ca soluția sistemului de ecuații *să existe ?*

Această întrebare e departe de a proveni din dorința unei pure satisfacții logice : fără a i se da răspuns, nu putem ști dacă pentru un corp dat, solicitat într-un mod dat, starea descrisă de ecuațiile pe care le studiem este posibilă sau nu ; și în această din urmă eventualitate, este evident că orice metodă de „rezolvare" a ecuațiilor elasticității cu ajutorul unui algoritm oarecare, e un nonsens.

Amintim că în general problema teoremelor de existență este legată de cea a clasei de funcții, domenii etc., în care se caută soluția unei probleme. Începînd cu rezolvarea ecuației $a + x = b$ în numere întregi și pînă la teoria soluțiilor generalizate ale ecuațiilor cu derivate parțiale, această problemă stă pe primul plan al cercetării teoretice.

Cu titlu de exemplu, se poate observa că dacă $\mathscr{V}$ este mărginit, $F = 0$, și forțele superficiale (date pe *întreaga* frontieră) au rezultanta sau momentul rezultant diferite de zero, atunci corpul nu poate fi în echilibru.

În cazul problemei lui Dirichlet și al problemei mixte, acțiunea forțelor exterioare este echilibrată de apariția unor reacțiuni în reazime (acea parte a frontierei pe care deplasarea are valori prescrise). Întrucît în cazul problemei lui Neumann astfel de reacțiuni nu există, o condiție

necesară (nu și suficientă!) de existență a soluției pentru un domeniu mărginit și pentru $\boldsymbol{F} = 0$ este

$$\iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{\sigma}_n \, \mathrm{d}S = 0, \quad \iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n \, \mathrm{d}S = 0. \tag{1}$$

Evident, pentru $\mathscr{V}$ nemărginit, aceste condiții nu mai sînt necesare.

Imposibilitatea de a demonstra teorema de existență într-un anumit cadru poate proveni din metoda de lucru — dar poate constitui și un indiciu asupra faptului că pentru corpul dat, în condițiile de solicitare date, ecuațiile considerate *nu descriu corect* fenomenul. Vom da exemple edificatoare în acest sens în § 5.18, pag. 287 și 294.

Aci ne mărginim la a spune că pentru a obține soluții regulate care verifică ecuațiile (1.1)—(1.3) și condițiile la limită (2.1)—(2.4), este necesar ca frontierea domeniului să fie suficient de *regulată*, fără puncte sau linii singulare; de asemenea să nu existe puncte sau linii de aplicare a unor sarcini concentrate, sau de discontinuitate a proprietăților mecanice ale materialului. (Probleme de acest tip pot fi totuși uneori studiate cu ajutorul unor procese de trecere la limită, al prelungirii soluțiilor la traversarea suprafețelor de discontinuitate a proprietăților mecanice etc.)

Pentru clase mai generale de frontiere, sarcini etc., teoremele de existență pot fi demonstrate numai cu ajutorul mijloacelor analizei funcționale.

Problema teoremelor de existență este una din cele mai dificile ale teoriei. Chiar cazul cel mai simplu — echilibrul corpurilor izotrope și omogene — este de o considerabilă complexitate. Metodele de demonstrare au urmat în mare drumul istoric al studiului ecuației lui Laplace (funcția lui Green, metoda ecuațiilor integrale, principiul lui Dirichlet).

Din imensa bibliografie a chestiunii, vezi lucrările lui I. Fredholm [1] — [3]; A. Korn [1]— [3]; G. Lauricella [3]—[5]; N. Mushelișvili [5] (cap. 5); D. Șerman [1]—[5]; — pentru metoda ecuațiilor integrale (vezi în legătură cu aceasta și F. Odqvist [1]); H. Weyl [1] — pentru metoda funcției lui Green (incluzînd și critica punctului de vedere al lui Korn). Printre lucrările recente, vezi J. Ericksen [2], [3] (care stabilește raporturi noi între problema existenței și cea a unicității); G. Fichera [1], [2]; G. Grioli [3] (cap. 5 — unde chestiunile de existență și unicitate sînt considerate pentru cazul neliniar, cu ajutorul rezultatelor corespunzătoare din teoria liniară); și în special V. Kupradze [2], [3], vaste studii cuprinzînd și cazul dinamic, unele medii neomogene și anizotrope etc.

Lucrarea fundamentală a lui D. Hilbert [1] a deschis drumul spre utilizarea mijloacelor analizei funcționale; acestea au permis obținerea de rezultate definitive prin metode profunde și relativ simple, care conduc totodată la algoritme de calcul efectiv. O amplă expunere a chestiunii este dată în monografiile lui S. Mihlin [2]—[4], pentru lectura cărora sînt necesare unele rezultate ale lui K. Friedrichs [1] și S. Sobolev [2]. (Același punct de vedere a fost reluat ulterior de B. Naimark [1].) Vezi și D. Eidus [1], [2] (problema mixtă); L. Sobolev [1] (algoritmul lui Schwarz în problema lui Dirichlet) și lucrările legate de aceasta: S. Mihlin [3], § 36; S. Kogan [1]; E. Nikolskii [1] (pentru problema lui Neumann); vezi și — pentru o formă extrem de generală a algoritmului — I. Babuska [1]; în fine, H. Weyl (metoda proiecțiilor ortogonale) și generalizarea dată acestui punct de vedere de către S. Teleman [1].

Indicăm de asemenea un punct de vedere abstract-funcțional mai nou, în lucrărilor lui W. Prager și J. Synge [1], J. Synge [1], reexpus de C. Pearson [2], capitolul 6.

Aplicațiile și critica posibilităților diferitelor metode aproximative (a lui Ritz, a lui Galerkin, a celor mai mici pătrate etc.) sînt — dintr-un punct de vedere modern — strîns legate de chestiunea existenței soluțiilor, de posibilitatea aproximării și evaluării erorii etc.

Printre monografiile consacrate special metodelor aproximative, indicăm (în afara lucrărilor lui S. Mihlin deja citate) Chi Teh Wang [1] (cap. 6 și 7); L. Kantorovici și V. Krîlov [1], (cap. 4); H. Langhaar [2] (cu o analiză detailată a chestiunilor privitoare la ecuația lui Reissner — vezi mai jos, § 7); L. Leibenzon [2] (destul de imprecis din punct de vedere teoretic, dar conținînd un mare număr de exemple). Chestiunea convergenței diferitelor metode de tip Ritz, Galerkin etc., utilizate în asemenea probleme, este examinată de N. Polski [1], [2]. A se vedea încă și lucrările indicate în § 7, pag. 150, cu privire la metodele variaționale. Pentru diferite metode numerice, a se vedea B. A. Bondarenko [1]; D. Vainberg și A. Siniavski [1].

Trimitem încă la indicațiile din § 8, pag. 150—151, și pentru problema plană, la cele din § 6.20, pag. 481; § 6.21, pag. 487; § 6.25.

Atît din punctul de vedere clasic, cît și din cel abstract-funcțional, chestiunea teoremelor de existență și a metodelor aproximative depășește cadrul acestui volum.

§ 5. TEOREMA DE UNICITATE

Să presupunem că pe o cale oarecare am obținut un sistem de funcții u_i, ε_{ij}, σ_{ij} care satisfac atît ecuațiile (1.1)—(1.3), cît și anumite condiții la limită. Este firească întrebarea dacă aceasta este *singura* soluție posibilă a problemei. Un răspuns negativ ar însemna că sistemul considerat, împreună cu condițiile la limită însoțitoare, nu descrie *complet* fenomenul.

Problema unicității nu este banală. În special pentru corpuri care nu sînt masive (coloane zvelte, plăci plane și curbe), se poate ca, pentru anumite solicitări, două sau mai multe configurații de echilibru să fie posibile. Acest fenomen e legat de *pierderea stabilității* unei anumite configurații de echilibru.

Importanța teoretică și practică a teoremei de unicitate este foarte mare. Toate metodele ce duc la soluția unor probleme prin suprapunere de funcții astfel alese încît în definitiv să fie satisfăcute atît ecuațiile cît și condițiile la limită, se bazează tocmai pe valabilitatea ei. În particular, orice soluție găsită prin îmbinarea de soluții după metoda inversă, sau cu ajutorul așa-numitei metode semi-inverse (vezi § 6) va fi — în acest cadru — singura soluție posibilă. Chiar metodele analizei funcționale, care duc la construirea soluției ca sumă a unei serii de „funcții coordonate", au sens (printre altele) datorită acestei teoreme. În fine, există numeroase demonstrații de existență bazate pe aplicabilitatea alternativei lui Fredholm — așadar în ultimă instanță tot pe teorema de unicitate.

Teorema de unicitate: *primele trei probleme fundamentale ale teoriei elasticității liniare pentru domenii mărginite au soluție unică, dacă potențialul elastic este o formă patratică pozitiv-definită* (G. Kirchhoff [2] și [3], § 27.2).

Să presupunem că avem de-a face cu problema mixtă şi că această problemă ar avea *două* soluţii, notate respectiv cu (¹) şi (²). Ţinînd seama de teorema superpoziţiei efectelor (vezi § 2, pag. 129), *soluţia-diferenţă* care se obţine din (2.5), (2.6) pentru $a_1 = -a_2 = 1$, verifică ecuaţiile *omogene* ale elasticităţii, pentru date la limită *nule*. Notînd cu u_i, ε_{ij}, σ_{ij} componentele acestei stări-diferenţă, avem deci

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{1}$$

şi

$$\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}'} = \sigma_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}''} = 0. \tag{2}$$

Să evaluăm pentru această soluţie integrala

$$2\iiint\limits_{\mathscr{V}} \Phi \,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V. \tag{3}$$

Ţinînd seama de simetria tensorului tensiune şi de formula lui Gauss-Ostrogradskii (7.2.9), avem pe rînd

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\mathscr{V}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V &= \iiint\limits_{\mathscr{V}} \sigma_{ij}u_{i,j}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\mathscr{V}} [(\sigma_{ij}u_i)_{,j} - u_i\sigma_{ij,j}]\,\mathrm{d}V = \\ &= \iint\limits_{\mathscr{S}} \sigma_{ij}u_in_j\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\mathscr{V}} \sigma_{ij,j}u_i\,\mathrm{d}V,\end{aligned} \tag{4}$$

adică, în virtutea relaţiilor (2.3.3), (1) şi (2):

$$2\iiint\limits_{\mathscr{V}} \Phi\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\mathscr{S}} \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\mathscr{V}} \sigma_{ij,j}u_i\,\mathrm{d}V = 0. \tag{5}$$

Dacă Φ este continuă (pentru aceasta, este suficient ca $u_i \in C^1(\mathscr{V})$, $\lambda_{ij}^{..} \in C^0(\mathscr{V})$) şi pozitiv-definită, urmează $\Phi \equiv 0$, şi deci

$$\varepsilon_{ij} \equiv 0,\ \sigma_{ij} \equiv 0 \text{ în } \mathscr{V}. \tag{6}$$

Soluţia-diferenţă descrie deci o deplasare rigidă, şi avem

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)},\ \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}. \tag{7}$$

Eventuala deplasare rigidă este de asemenea nulă în cazul problemei Dirichlet şi al problemei mixte. Dimpotrivă, în problema lui Neumann, soluţia este unic determinată numai abstracţie făcînd de o roto-translaţie rigidă infinitezimală, caracterizată de 6 parametri. Putem asigura şi aci unicitatea, impunînd condiţii suplimentare care să permită reţinerea, *uneia* din soluţiile posibile. Aceste condiţii pot fi de exemplu de forma, apropiată de (4.1):

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V = 0. \tag{8}$$

Teorema de unicitate rămîne valabilă pentru *orice* condiţii la limită pentru care soluţia-diferenţă satisface egalitatea

$$[\sigma_n(u) \cdot u]|_{\mathscr{S}} = 0. \qquad (9)$$

Cu referire la a patra problemă fundamentală, aceasta impune anumite condiţii coeficienţilor a_{ij}, b_{ij}.

Teorema îşi păstrează valabilitatea pentru $\mathscr{V}$ nemărginit, pentru soluţii care satisfac anumite condiţii suplimentare la infinit (vezi M. Gurtin şi E. Sternberg [2]; R. Knops [1]).

Teorema de mai sus constituie în fond un caz particular de teoremă de unicitate pentru sisteme de ecuaţii eliptice oarecari, sisteme pentru care soluţia problemei omogene, cu anumite date la limită omogene, rezultă a fi nulă. (Vezi de ex. C. Miranda [1], cap. 1.) Caracterul de elipticitate al ecuaţiilor elasticităţii poate fi demonstrat pornind tocmai de la faptul că potenţialul elastic Φ este o formă patratică pozitiv-definită. (Vezi şi mai departe § 12.) Aceasta impune în general anumite condiţii coeficienţilor c_{ij}^{hk} (vezi § 3.7; vezi şi — într-un cadru mai general — M. Gurtin [1]).

În particular, din rezultatul din § 3.7, pag. 119, decurge următorul *corolar*: *primele trei probleme fundamentale ale elasticităţii liniare pentru corpuri izotrope (eventual neomogene), au soluţii unice.*

Teorema lui Kirchhoff a fost generalizată (pentru corpuri izotrope) de T. Boggio [1]. Recent, M. Gurtin şi E. Sternberg [1] au obţinut rezultate noi. Astfel, pentru problema lui Dirichlet, unicitatea este asigurată dacă $\mu \neq 0$, $\nu \notin \left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Rezultatele au fost extinse de aceiaşi autori, în [3], la cazul problemelor dinamice (vezi şi M. Gurtin şi R. Toupin [1]). Chestiunea a fost reluată de J. Bramble şi L. Payne [1] — [3], care ajung la concluzia că, pentru unele proprietăţi speciale ale frontierei, unicitatea este asigurată, dacă $\mu \neq 0$, şi $\nu \notin \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ (problema lui Dirichlet); $\nu \in \left]-1, 1-0{,}5\,K(1+K)^{-1}\right]$, unde K este o constantă a domeniului, nulă dacă $\mathscr{V}$ e stelat (problema lui Neumann); $\nu \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ (problema mixtă).

Menţionăm şi rezultatele speciale ale lui R. Knops [2], [3] şi extinderea teoremei de unicitate dată de E. Sternberg şi R. Eubanks [2] pentru cazul prezenţei de forţe concentrate.

Pentru corpuri visco-elastice, vezi lucrările lui W. Edelstein şi M. Gurtin [1], F. Odeh şi I. Tadjbaksh [1]. Problema unicităţii şi non-unicităţii (bifurcaţiei) soluţiilor în cazul teoriei neliniare este amănunţit studiată de R. Hill [2]—[5]. Vezi şi C. Truesdell şi R. Toupin [2], § 8.

Existenţa a diferite configuraţii de echilibru posibil pentru bare, plăci plane şi curbe etc., nu contrazice teorema de unicitate. Într-adevăr, configuraţia curbilinie de echilibru, caracteristică pentru fenomenul de *flambaj* care apare la depăşirea unei anumite sarcini critice nu poate fi descrisă de teoria liniară, deoarece unghiurile de rotaţie nu mai sînt mici şi de acelaşi ordin de mărime cu deformaţiile (vezi § 1.10, pag. 61). Teorema

de unicitate arată numai că nu pot exista două soluţii distincte *în cadrul teoriei liniare*.

Problema multiplicării configuraţiilor de echilibru are o mare însemnătate practică, întrucît copurile la care ea se observă (în special corpuri nemasive) sînt frecvent utilizate; fenomenul apare la sarcini cu mult sub cele ce produc trecerea în zona plastică sau distrugerea — şi el are totdeauna efecte catastrofale.

Problemele *stabilităţii* echilibrului elastic şi ale *flambajului* sînt studiate de N. Beliaev [2], capitolul 33 şi 34; V. Bolotin [1]; M. Filonenko-Borodici et al. [1], volumul 1, capitolul 14; volumul 2, capitolele 20 şi 21; A. Love [1], capitolele 18 şi 19; Iu. Panovko şi I. Gubanova [1], partea I; E. Popov [1]; S. Timoshenko şi J. Gere [1]. Vezi şi articolele lui A. Dinnik [2]; B. Galerkin [2], volumul 1; L. Leibenzon [2], volumul 1; studiile de sinteză ale lui J. Geckeler [1], capitolul 10; H. Langhaar [1]; H. Ziegler [1]. Printre lucrările mai recente, indicăm M. Beatty [1]; M. Biot [4], capitolele 3–5; J. Holden [1]; V. Manea [5]; C. Truesdell şi W. Noll [1], §§ 68 bis şi 89, — privitor la teoria generală, precum şi articolele lui L. Erşov şi D. Ivlev [1] şi A. Işlinskii [1]. Vezi şi indicaţiile din W. Prager [2], § 10.4.

În cadrul de valabilitate al teoremei de unicitate, fenomenul deformaţiei elastice este deci deplin descris de cele 15 ecuaţii (1.1)—(1.3): alte relaţii independente care să lege între ele mărimile ce caracterizează starea elastică, nu pot exista. Acest fapt justifică denumirea de *sistem complet* dată sistemului (1.1)—(1.3). În cadrul teoriei liniare, orice soluţie a acestui sistem pentru condiţii la limită de tip (2.1)—(2.3) (şi unele condiţii de tip (2.4)), este deci soluţia *unică* a problemei.

§ 6. PUNCTE DE VEDERE SIMPLIFICATOARE

Cu ipotezele din § 0.4, ne aflăm deja la acea limită dincolo de care noi presupuneri ar duce la o descriere cu totul deformată a fenomenului real. Şi totuşi, rezolvarea problemelor fundamentale ale teoriei elasticităţii rămîne dificilă şi nu a putut fi obţinută efectiv decît pentru destul de puţine cazuri.

Dificultăţile provin atît din marele număr de funcţii şi relaţii, cît şi din complexitatea condiţiilor la limită. Examinînd posibilitatea de a le depăşi, B. de Saint-Venant a fost condus la formularea a două puncte de vedere simplificatoare extrem de fertile: *metoda semiinversă şi principiul lui Saint-Venant*.

a) Metoda semiinversă

În perioada de elaborare a bazelor teoriei elasticităţii (începutul secolului al XIX-lea) fuseseră neglijate metodele mai simple ale lui Euler, Bernoulli şi alţii. Aceştia puseseră temeliile Rezistenţei Materialelor pornind nu de la relaţii generale verificate în masa corpului, ci de la anumite schematizări ale acestuia şi de la evaluarea (adesea inspirată de practică)

a mărimilor ce caracterizau starea sa. Desigur, puteau fi studiate astfel numai corpuri de formă destul de simplă (bare, plăci), supuse unor sarcini destul de simple, pentru a putea reduce problema la studiul comportării anumitor linii sau plane în care e presupusă concentrată toată masa corpului, pentru a „intui" aspectul anumitor componente ale deplasării sau tensiunii etc.

Saint-Venant a reluat această tehnică în modul următor. Să presupunem că datele de care dispunem ne permit să neglijăm unele componente ale stării elastice a corpului, sau să facem unele presupuneri asupra valorii lor. *Dacă aceste presupuneri simplificatoare sînt compatibile cu sistemul complet de ecuații și condiții la limită*, atunci numărul funcțiilor și al ecuațiilor poate fi redus în mod corespunzător. Soluția sistemului astfel redus, împreună cu funcțiile a căror valoare am stabilit-o dinainte din alte considerații, dă — în virtutea teoremei de unicitate — însăși soluția problemei.

Metoda a fost elaborată de Saint-Venant în studiul problemei torsiunii și încovoierii barelor cilindrice (vezi A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], notă finală la § 22). Aceasta a constituit prima aplicare importantă a ecuațiilor generale ale elasticității.

Faptul că relațiile astfel introduse trebuiesc verificate din punctul de vedere al compatibilității lor cu ecuațiile și cu condițiile la limită (și eventual corectate în urma acestei verificări) deosebește metoda semiinversă de metodele de simplificare curent folosite în rezistența materialelor.

Utilizarea de soluții eventual aproximative, parțial cunoscute, uneori cu precizarea și modificarea lor ulterioară, dă conținutul concret al metodei și o deosebește de simpla idee de rezolvare a ecuațiilor „din aproape în aproape".

Privitor la chestiunea metodelor inverse și semiinverse vezi și P. Nemenyi [2].

b) Principiul lui Saint-Venant

Se poate întîmpla ca soluția sistemului (1.1)—(1.3) să fie relativ ușor de găsit pentru anumite date la limită, și dimpotrivă, să nu poată fi obținută pentru alte date, numai cu puțin diferite de primele.

Ideea firească a dependenței continue a soluției față de condițiile la limită (vezi § 7.4) sugerează ca probabil faptul că modificări infinitezimale ale datelor la limită sînt permise; dar astfel de modificări nu ne sînt aci de mare utilitate.

Să presupunem însă că modificăm *finit* forțele superficiale aplicate pe o porțiune a frontierei, păstrînd totuși aceeași *rezultantă* și *moment rezultant*. Evident, o astfel de operație nu este în general permisă [2]).

---

[2]) Astfel, nu este indiferent dacă o sarcină de întindere e aplicată pe baza unei epruvete, pe suprafața ei laterală, sau aproape de cealaltă bază. Vectorii tensiune sînt vectori legați, și operația „torsor" nu are în teoria elasticității importanța exhaustivă din mecanica rigidului.

Experienţa arată însă că:

Un sistem de forţe static echivalent cu zero aplicat pe o porţiune a frontierei, de diametru comparabil cu cea mai mică dintre dimensiunile corpului, produce deplasări, deformaţii şi tensiuni apreciabile numai la distanţe de acelaşi ordin de mărime cu diametrul considerat.

În aceste condiţii, putem deci înlocui un sistem de sarcini superficiale cu alt sistem static echivalent lui, provocînd perturbări numai local sensibile ale stării elastice. Altfel spus, *principiul lui Saint-Venant poate fi privit ca un fel de teoremă de unicitate generalizată.*

Principiul a fost elaborat de către B. de Saint-Venant tot în studiul problemei torsiunii şi încovoierii barelor, presupunînd că dimensiunile bazei solicitate sînt mici în raport cu lungimea barei (vezi A. Clebsch şi B. de Saint-Venant [1], § 28, şi notele finale la §§ 22 şi 28).

Saint-Venant sugerează şi următoarea experienţă simplă: trasînd pe un cilindru de cauciuc un sistem de generatoare şi cercuri paralele şi strîngînd acest cilindru cu un cleşte (sistem static echivalent cu zero), obţinem tensiuni locale mari (putînd duce la secţionarea cilindrului), în timp ce la distanţe relativ mici de zona de aplicare a sarcinii, reţeaua de cercuri şi generatoare rămîne vizibil nedeformată.

O formulare a principiului, depăşind cadrul problemei cilindrului lung, este datorată lui J. Boussinesq [2]: „*Un sistem de forţe exterioare static echivalent cu zero acţionînd asupra unui corp elastic şi avînd punctele de aplicaţie situate în interiorul unei sfere date, nu produce deformaţii sensibile la distanţe de această sferă, suficient de mari în raport cu raza ei.*"

Nu există încă o „demonstraţie" a principiului — dar verificările experimentale par să-l confirme sistematic. (Vezi de ex. M. Frocht [1], vol. 2, § 1.16.) Pentru diferite încercări de demonstrare a principiului sub forma sa clasică, vezi de exemplu C. Biezeno şi R. Grammel [1], § 2.2, pct. 7; J. Goodier [1]; lord Kelvin şi P. Tait [1], pct. 728—729; M. Lévy [1]; S. Timoshenko şi J. Goodier [1], §§ 18 şi 47; O. Zanaboni [1].

R. von Mises [1] a dat o critică şi o formulare mai precisă a principiului; în particular, el a atras atenţia asupra faptului că, în cazul unui corp mărginit, pentru a se putea compara efectul unei sarcini static echivalente cu zero cu cel al unei sarcini ce nu posedă această proprietate, trebuie să considerăm cel puţin *două* regiuni solicitate pe frontieră. Ulterior, E. Sternberg [1] a dat o demonstraţie a principiului, formulat astfel: „Să presupunem că sarcinile care acţionează asupra unui corp elastic sînt aplicate numai asupra anumitor porţiuni ale frontierei, fiecare din acestea fiind interioară unei sfere de rază ρ, şi că densităţile acestor sarcini rămîn finite pentru $\rho \to 0$. În acest caz, tensiunile în orice punct fix interior corpului sînt de un ordin de mărime mai mic în raport cu ρ, pentru $\rho \to 0$, dacă sarcina pe fiecare porţiune solicitată a frontierei formează un sistem echivalent cu zero — decît în cazul în care sarcina nu posedă această proprietate." Mai precis, Sternberg demonstrează că, în timp ce în general deplasările, deformaţiile şi tensiunile tind spre zero ca ρ^2 pentru $\rho \to 0$, — ele tind spre zero ca ρ^3 dacă rezultanta pe regiunea de solicitare de pe fontieră este nulă, respectiv ca ρ^4 dacă momentul rezultant e şi el nul. Un raţionament similar conservă validitatea rezultatului chiar şi în prezenţa sarcinilor concentrate; în acest caz, toţi exponenţii amintiţi se micşorează cu 2.

Recent, R. Toupin [3] a reluat chestiunea, ținînd seama de analiza sugerată de C. Truesdell [3]. Punctul său de pornire e constituit de teoria corpurilor cilindrice, cu posibilități de generalizare pentru corpuri oarecari. Rezultatele sînt de tipul următor: energia (unitară) acumulată într-un punct la distanța z de baza pe care este aplicat un sistem de sarcini static echivalent cu zero descrește după o lege $W(z) \leqslant W_0 \exp [-(z-l)/z_c]$, unde z_c depinde de material și de forma cilindrului, iar l este lungimea cilindrului. (Material anizotrop.) Pentru „norma" tensorului **E** se obține o relație similară. (Corpuri izotrope.) Un studiu asemănător pentru cazul plan aparține lui J. Knowles [1]. În fine, H. Keller [1] obține evaluări oarecum analoge celor ale lui Sternberg, dar într-o formulare mai generală, și studiază și comportarea în vecinătatea punctelor singulare.

Mai sînt încă de menționat lucrările (contestate) ale lui G. Horway [1], [2] și W. Schumann [1], [2], precum și notele lui L. Donnell [1] și H. Matschinski [1]. Vezi de asemenea E. Deutsch [7].

Articolele de sinteză ale lui G. Djanelidze [3] și Z. Klebowski [1] furnizează o bogată bibliografie. Pentru indicații referitoare la cazul anizotrop, vezi E. Sternberg [4]. Rezultate pentru problema dinamică sînt date de B. Boley [2], [3]; V. Novojilov și L. Slepian [1]. O importantă generalizare la cazul corpurilor vîsco-elastice aparține lui E. Sternberg și S. Al-Khozaie [1].

Aplicarea principiului la corpuri care nu sînt masive cere o prudență specială: astfel de exemplu, într-o placă subțire plană sau curbă solicitată de un sistem de sarcini static echivalent cu zero aplicat pe suprafața *laterală*, se pot pune în evidență efecte ce se propagă în interior la mari distanțe. (A. Goldenveizer [1], § 6.11; V. Vlasov [3], § 12.6.) Pentru o analiză a principiului cu aplicație la astfel de corpuri, vezi P. Naghdi [1].

În cazul problemei antiplane, vom reveni asupra acestei chestiuni în § 5.10. (Pentru torsiunea barelor de secțiune variabilă, vezi și G. Polojii [1].) Pentru cazul problemei plane, vezi § 6.11.

Principiul lui Saint-Venant a condus la ideea mult mai generală a satisfacerii aproximative a condițiilor la limită (inclusiv a celor formulate altfel decît în tensiuni): verificare numai în unele puncte ale frontierei, verificare integrală, sau în medie patratică etc. Pentru unele exemple, vezi L. Leibenzon [2] („Metode variaționale", cap. 6).

Metoda semiinversă și principiul lui Saint-Venant, avînd inițial un cîmp de aplicare restrîns, ocupă acum, sub diferite forme, o poziție dominantă în toate problemele privitoare la rezolvarea efectivă a ecuațiilor elasticității.

§ 7. ECUAȚIILE VARIAȚIONALE ALE ELASTO-STATICII

Numeroase fenomene pot fi descrise atît prin ecuații diferențiale, cît și prin ecuații variaționale (adesea reprezentînd condiții de extremum pentru anumite integrale). Amintim în acest sens exemplul principiilor variaționale ale mecanicii analitice.

Aceasta conduce la studiul anumitor funcționale (de obicei, integrale ce depind de anumite funcții) și al ecuațiilor lui Euler corespunzătoare (vezi de ex. R. Courant și D. Hilbert [1], vol. 1, § 4.10).

Cele mai importante ecuații variaționale clasice ale teoriei elasticității sînt cele ale lui Lagrange și Castigliano. Vom studia aci ecuația lui E. Reissner [4], [8], [9], care le cuprinde drept cazuri particulare.

a) Ecuația variațională a lui Reissner

Să considerăm ecuațiile (1.5)—(1.8) unde, *pentru simplitate, vom scrie* ε_{ij} în loc de $\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$. Sistemul complet de ecuații este

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{1}$$

și

$$\sigma_{ij} = \partial\hat{\Phi}/\partial\varepsilon_{ij}, \tag{2'}$$

sau încă

$$\varepsilon_{ij} = \partial\hat{\Phi}/\partial\sigma_{ij}, \tag{2''}$$

unde F_i sînt funcții de punct, iar $\hat{\Phi}$ este o funcție cunoscută de derivatele lui u în (2′), respectiv de Σ în (2″) (eventual, și funcție de punct).

Ne limităm aci la cazul liniar ($\hat{\Phi}$ — funcție patratică și omogenă), dar amintim că ecuațiile (2′) sînt valabile și în cazul neliniarității fizice.

Ecuațiile (1), (2) trebuie integrate pentru valorile la limită

$$u_i|_{\mathscr{S}'} = g_i, \tag{3}$$

$$\sigma_{ni}|_{\mathscr{S}''} = f_i. \tag{4}$$

Să presupunem că nu cunoaștem cele 9 funcții u_i, σ_{ij} care verifică toate aceste relații, dar cunoaștem o *familie* de funcții $\tilde{u}_i$, $\tilde{\sigma}_{ij}$, care satisfac numai *unele* dintre ele [3]). Se cere să găsim o metodă pentru *a alege* dintre aceste funcții, pe acelea care satisfac *toate* relațiile (1)—(4).

Vom admite numai că toate funcțiile $\tilde{u}_i$, $\tilde{\sigma}_{ij}$ sînt destul de apropiate de soluția u_i, σ_{ij}, pentru ca să putem scrie

$$\tilde{u}_i = u_i + \delta u_i, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}, \tag{5}$$

unde variațiile δu_i, $\delta\sigma_{ij}$ sînt mici, și în nici un fel legate între ele.

Dacă am cunoaște o expresie depinzînd de u_i, σ_{ij} — așadar o *funcțională* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(u, \Sigma)$ — în așa fel încît pentru $\tilde{u}_i = u_i$, $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$,

[3]) Semnul $\sim$ are desigur cu totul alt sens aci decît în § 1.10.

ea să posede anumite proprietăți staționare, problema (1)—(4) ar fi redusă la o problemă de calculul variațiilor. Scriind pe $\mathfrak{J}$ sub forma

$$\widetilde{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}) = \mathfrak{J} + \delta\,\mathfrak{J} + \frac{1}{2}\,\delta^2\mathfrak{J}, \tag{6}$$

unde $\delta\mathfrak{J}$ este termenul liniar în δu_i, $\delta\sigma_{ij}$, iar $\frac{1}{2}\delta^2\mathfrak{J}$ este cel patratic, urmează că pentru $\widetilde{u}_i = u_i$, $\widetilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$ va trebui să avem $\delta\mathfrak{J} = 0$. Dacă punctul staționar este chiar un extremum, $\delta^2\mathfrak{J}$ va trebui să păstreze un semn constant în vecinătatea sa.

Să începem prin a căuta prima variație $\delta\mathfrak{J}$ sub forma — evident nulă pentru soluția problemei (1)—(4) —

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{J} = k_1 \iiint_{\mathscr{V}} [\,\sigma_{ij,j} + F_i\,]\,\delta u_i\,\mathrm{d}V + k_2 \iiint_{\mathscr{V}} [\,\varepsilon_{ij} - \partial\hat{\Phi}/\partial\sigma_{ij}\,]\,\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}V\, + \\ + k_3 \iint_{\mathscr{S}'} [\,u_i - g_i\,]\,\delta\sigma_{ni}\,\mathrm{d}S + k_4 \iint_{\mathscr{S}''} [\,\sigma_{ni} - f_i\,]\,\delta u_i\,\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{7}$$

unde k_i sînt coeficienți încă necunoscuți, și unde folosim parantezele drepte și acoladele pentru a nota factori în produse, rezervînd pe cît posibil parantezele rotunde pentru argumentele funcțiilor.

Să amintim relația (5.4) sub forma

$$\iiint_{\mathscr{V}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V = \iint_{\mathscr{S}'+\mathscr{S}''} \sigma_{ni}\,u_i\,\mathrm{d}S - \iiint_{\mathscr{V}} \sigma_{ij,j}u_i\,\mathrm{d}V, \tag{8}$$

și relațiile similare ce se obțin pentru perechile $(\delta\sigma_{ij},\ u_i)$; $(\sigma_{ij},\ \delta u_i)$; $(\delta\sigma_{ij},\ \delta u_i)$. Ținînd seama de simetria tensorului tensiune și de (3.6.5), avem

$$\sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij}\,\frac{1}{2}\,[(\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}] = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}, \tag{9}$$

astfel că relația (8) scrisă pentru $(\sigma_{ij},\ \delta u_i)$ devine

$$\iiint_{\mathscr{V}} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V = \iint_{\mathscr{S}'+\mathscr{S}''} \sigma_{ni}\,\delta u_i\,\mathrm{d}S - \iiint_{\mathscr{V}} \sigma_{ij,i}\,\delta u_i\,\mathrm{d}V. \tag{10}$$

Introducînd (10) în (7), obținem deci:

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{J} = \iiint_{\mathscr{V}} \{-k_1\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + k_1F_i\delta u_i + k_2\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} - k_2[\partial\hat{\Phi}/\partial\sigma_{ij}]\,\delta\sigma_{ij}\}\,\mathrm{d}V\, + \\ + \iint_{\mathscr{S}'} \{k_3\,[u_i - g_i]\,\delta\sigma_{ni} + k_1\,\sigma_{ni}\delta u_i\}\,\mathrm{d}S\, + \\ + \iint_{\mathscr{S}''} \{k_4[\,\sigma_{ni} - f_i\,]\,\delta u_i + k_1\,\sigma_{ni}\delta u_i\}\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{11}$$

Putem reduce aci unii termeni, și putem pune alți termeni sub forma unor expresii duale în $\delta\varepsilon_{ij}$ și $\delta\sigma_{ij}$ sau $\delta\sigma_{ni}$ și δu_i, dacă alegem $k_1=k_3=-1$, $k_2=k_4=1$. Cu aceasta, (11) devine

$$\delta\mathfrak{J}=\iiint_{\mathscr{V}}\{\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}-[\partial\widehat{\Phi}/\partial\sigma_{ij}]\delta\sigma_{ij}-F_i\delta u_i\}\,\mathrm{d}V-$$
$$-\iint_{\mathscr{S}'}[u_i\delta\sigma_{ni}+\sigma_{ni}\delta u_i]\,\mathrm{d}S+\iint_{\mathscr{S}'}g_i\delta\sigma_{ni}\,\mathrm{d}S-\iint_{\mathscr{S}''}f_i\delta u_i\,\mathrm{d}S, \tag{12}$$

ceea ce arată că funcționala $\mathfrak{J}$ trebuie aleasă sub forma

$$\mathfrak{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Sigma})=\iiint_{\mathscr{V}}[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\widehat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma})-F_iu_i]\,\mathrm{d}V-$$
$$-\iint_{\mathscr{S}'}\sigma_{ni}[u_i-g_i]\,\mathrm{d}S-\iint_{\mathscr{S}''}u_if_i\,\mathrm{d}S. \tag{13}$$

Într-adevăr, introducînd aci (5) și efectuînd calculele din (6), obținem evident pentru $\delta\mathfrak{J}$ expresia (12). (Desigur, mărimile F_i, f_i, g_i nu variază.)

Făcînd uz de (8), funcționala (13) mai poate fi scrisă sub forma

$$\mathfrak{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Sigma})=-\iiint_{\mathscr{V}}\{[\sigma_{ij,j}+F_i]u_i+\widehat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma})\}\,\mathrm{d}V+$$
$$+\iint_{\mathscr{S}'}\sigma_{ni}g_i\,\mathrm{d}S+\iint_{\mathscr{S}''}u_i[\sigma_{ni}-f_i]\,\mathrm{d}S. \tag{14}$$

Expresia $\mathfrak{J}$ astfel găsită este *funcționala lui Reissner*.

Pentru $\delta\mathfrak{J}$ avem, pe lîngă (12), și forma ce rezultă direct din (7) pentru valorile considerate ale coeficienților k_i:

$$\delta\mathfrak{J}=-\iiint_{\mathscr{V}}[\sigma_{ij,j}+F_i]\delta u_i\,\mathrm{d}V+\iiint_{\mathscr{V}}\{\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}-[\partial\widehat{\Phi}/\partial\sigma_{ij}]\delta\sigma_{ij}\}\,\mathrm{d}V-$$
$$-\iint_{\mathscr{S}'}[u_i-g_i]\delta\sigma_{ni}\,\mathrm{d}S+\iint_{\mathscr{S}''}[\sigma_{ni}-f_i]\delta u_i\,\mathrm{d}S. \tag{15}$$

Mai departe, efectuînd calculele necesare pentru scrierea termenului $\frac{1}{2}\,\delta^2\mathfrak{J}$ din (6) (inclusiv dezvoltarea în serie Taylor a funcției $\widehat{\Phi}\,(\boldsymbol{\Sigma}+\delta\boldsymbol{\Sigma})$), obținem din (13)

$$\delta^2\mathfrak{J}=\iiint\limits_{\mathscr{V}}\left\{2\,\delta\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}-\frac{\partial}{\partial\sigma_{ij}}\left[\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial\sigma_{hk}}\,\partial\sigma_{hk}\right]\partial\sigma_{ij}\right\}\mathrm{d}V-$$

$$-2\iint\limits_{\mathscr{S}'}\delta\sigma_{ni}\delta u_i\,\mathrm{d}S. \tag{16}$$

Or, întrucît $\widehat{\Phi}$ este o formă patratică și omogenă, avem

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_{ij}}\left[\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial\sigma_{hk}}\,\partial\sigma_{hk}\right]\delta\sigma_{ij}=2\,\hat{\Phi}(\delta\boldsymbol{\Sigma}). \tag{17}$$

Scriind acum relația (8) pentru mărimile $(\delta\sigma_{ij},\ \delta u_i)$, obținem

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}}\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V=\iint\limits_{\mathscr{S}'+\mathscr{S}''}\delta\sigma_{ni}\delta u_i\,\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\mathscr{V}}(\delta\sigma_{ij})_{,j}\,\delta u_i\,\mathrm{d}V, \tag{18}$$

astfel că introducînd acum (17), (18) în (16), căpătăm

$$\delta^2\mathfrak{J}=-2\iiint\limits_{\mathscr{V}}[(\delta\sigma_{ij})_{,j}\,\delta u_i+\hat{\Phi}(\delta\boldsymbol{\Sigma})]\mathrm{d}V+2\iint\limits_{\mathscr{S}''}\delta\sigma_{ni}\delta u_i\,\mathrm{d}S. \tag{19}$$

Acum este ușor de văzut că rezolvarea problemei (1)–(4) este echivalentă cu găsirea funcțiilor u_i, σ_{ij} pentru care $\mathfrak{J}$ ia o valoare staționară.

Într-adevăr, pentru orice funcții u_i, σ_{ij} care verifică (1)–(4), din (7) rezultă $\delta\mathfrak{J}=0$, *oricare* ar fi variațiile δu_i, $\delta\sigma_{ij}$. Reciproc, dacă funcțiile u_i, σ_{ij} dau funcționalei lui Reissner o valoare staționară (așadar $\delta\mathfrak{J}=0$) pentru *orice* variații δu_i, $\delta\sigma_{ij}$, atunci din (7) urmează că aceste funcții verifică (1)–(4).

Acest argument este desigur numai formal. El poate fi justificat cu ajutorul lemei fundamentale a calculului variațiilor (vezi de ex. E. Goursat [2], § 619; V. Smirnov [2], vol. 4, pct. 62) dacă $\tilde{u}_i\in C^2$, $\tilde{\sigma}_{ij}\in C^1$. Pentru funcționale mai particulare, raționamentul necesar este dat de I. Sokolnikoff [2], § 106.

Valoarea staționară a lui $\mathfrak{J}$ nu este cu necesitate un maxim sau un minim: din (19) se vede că $\delta^2\mathfrak{J}$ nu păstrează un semn constant.

Ecuația lui Reissner poate fi folosită fără a impune funcțiilor $\tilde{u}_i$, $\tilde{\sigma}_{ij}$ nici o condiție prealabilă; în particular, aceste funcții nu trebuie să fie în nici un fel legate între ele. Aceasta extinde cîmpul de aplicare al

metodei. Dar se înțelege că problema se simplifică dacă cel puțin unele din relațiile (1) —(4) sînt a priori satisfăcute, prin însăși alegerea funcțiilor $\widetilde{u}_i$ $\widetilde{\sigma}_{ij}$.

b) Principiul de minimum pentru deplasări

Să presupunem că *toate* funcțiile $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{\sigma}_{ij}$ verifică ecuațiile fizico-geometrice (2″), iar funcțiile $\widetilde{u}_i$ satisfac și condițiile la limită de tip Dirichlet (3). Aceasta revine la a spune că componentele tensiunii $\widetilde{\sigma}_{ij}$ sînt *definite* prin intermediul componentelor deplasării u_i, iar familia acestora din urmă este aleasă în așa fel, încît condițiile la limită în deplasări să fie a priori verificate. (Un astfel de cîmp de deplasări se zice a fi *cinematic admisibil.*) Despre ecuațiile de echilibru (1) și condițiile la limită în tensiuni (4) nu se face nici o presupunere.

Ținînd seama de relațiile (5) în (2″) și (3), obținem ușor

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial\sigma_{hk}}\left[\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial\sigma_{ij}}\right]\delta\sigma_{hk}, \tag{20}$$

$$\delta u_i|_{\mathscr{S}'} = 0. \tag{21}$$

Relațiile (2″) sînt echivalente — în cadrul teoriei liniare!— cu (2′), și deci componentele $\widetilde{\sigma}_{ij}$ pot fi privite ca explicitate prin intermediul derivatelor parțiale ale funcțiilor $\widetilde{u}_i$. Să transcriem toate mărimile ce apar în (13) prin intermediul componentelor $\widetilde{u}_i$, ținînd seama că $\sigma_{ij}(\widetilde{\mathbf{E}})\,\widetilde{\varepsilon}_{ij} = 2\widehat{\Phi}(\widetilde{\mathbf{E}})$, și că $[u_i - g_i]|_{\mathscr{S}'} = 0$. În acest caz, funcționala $\mathfrak{J}$ va depinde numai de componentele $\widetilde{u}_i$, și va lua forma

$$\widetilde{\mathfrak{J}}_u \equiv \mathfrak{J}(\widetilde{\mathbf{u}}) = \iiint\limits_{\mathscr{V}}[\widehat{\Phi}(\widetilde{\mathbf{E}}) - F_i\widetilde{u}_i]\,\mathrm{d}V - \iint\limits_{\mathscr{S}''} f_i\widetilde{u}_i\,\mathrm{d}S. \tag{22}$$

Ținînd seama de relațiile (2″) și (3) în expresia (15), avem

$$\delta\mathfrak{J}_u = -\iiint\limits_{\mathscr{V}}[\sigma_{ij,j} + F_i]\,\delta u_i\mathrm{d}V + \iint\limits_{\mathscr{S}''}[\sigma_{\nu i} - f_i]\,\delta u_i\,\mathrm{d}S. \tag{23}$$

Tot astfel, introducînd (3.7.11), (17) și (21) în (16), căpătăm

$$\delta^2\mathfrak{J}_u = 2\iiint\limits_{\mathscr{V}}\widehat{\Phi}(\delta\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{d}V > 0. \tag{24}$$

Prin urmare, soluția problemei (1)—(4) este nu numai o valoare staționară, ci chiar un *minimum* al funcționalei în deplasări $\widetilde{\mathfrak{J}}_u$.

Reciproc, dacă în mulțimea funcțiilor $\tilde{u}_i$ am găsit soluția u_i a problemei de extremum pentru funcționala $\tilde{\mathfrak{J}}_u$, atunci tensiunile σ_{ij} definite de această soluție prin intermediul relațiilor (2″) verifică atît ecuațiile de echilibru (1), cît și condițiile la limită în tensiuni (4).

În cazul particular $\mathcal{S} = \mathcal{S}''$ (condiții la limită formulate numai în tensiuni), sîntem conduși la *ecuația variațională a lui Lagrange*:

$$\delta \left[\iiint_{\mathcal{V}} \hat{\Phi}(\mathbf{E})\, \mathrm{d}V - \iiint_{\mathcal{V}} F_i u_i\, \mathrm{d}V - \iint_{\mathcal{S}} f_i u_i\, \mathrm{d}S \right] = 0. \tag{25}$$

Amintim că componentele lui $\mathbf{E}$ trebuie explicitate aci prin intermediul celor ale lui $\boldsymbol{u}$. Funcțiile $\tilde{u}_i$ nu trebuie să satisfacă nici o condiție prealabilă.

c) Principiul de maximum pentru tensiuni

Fie dat acum un sistem de funcții $\tilde{\sigma}_{ij}$ care verifică ecuațiile de echilibru (1) și condițiile la limită de tip Neumann (4). (Un astfel de cîmp de tensiuni se zice a fi *static admisibil.*)

Ținînd seama de relațiile (5) în (1) și (4), obținem desigur

$$(\delta \sigma_{ij})_{,j} = 0, \tag{26}$$

$$\delta \sigma_{ni}|_{\mathcal{S}''} = 0. \tag{27}$$

Introducînd (1) și (4) în (14), căpătăm o expresie care depinde numai de $\tilde{\sigma}_{ij}$:

$$\tilde{\mathfrak{J}}_\sigma \equiv \mathfrak{J}(\tilde{\mathbf{\Sigma}}) = - \iiint_{\mathcal{V}} \hat{\Phi}(\tilde{\mathbf{\Sigma}})\, \mathrm{d}V + \iint_{\mathcal{S}'} \tilde{\sigma}_{ni}\, g_i\, \mathrm{d}S. \tag{28}$$

Tot astfel, din (15) obținem

$$\delta \mathfrak{J}_\sigma = \iiint_{\mathcal{V}} [\varepsilon_{ij} - \partial \hat{\Phi} / \partial \sigma_{ij}]\, \delta \sigma_{ij}\, \mathrm{d}V - \iint_{\mathcal{S}'} [u_i - g_i]\, \delta \sigma_{ni}\, \mathrm{d}S. \tag{29}$$

În fine, introducînd (26), (27) în (19), deducem

$$\delta^2 \mathfrak{J}_\sigma = -2 \iiint_{\mathcal{V}} \hat{\Phi}(\delta \mathbf{\Sigma})\, \mathrm{d}V < 0. \tag{30}$$

Prin urmare, soluția problemei (1)—(4) este nu numai o valoare staționară, ci chiar un *maximum* al funcționalei în tensiuni $\tilde{\mathfrak{J}}_\sigma$.

Reciproc, dacă în mulțimea funcțiilor $\tilde{\sigma}_{ij}$ am găsit soluția σ_{ij} a problemei de extremum pentru funcționala $\tilde{\mathfrak{J}}_\sigma$, atunci sînt automat satisfăcute

relaţiile (2″), iar deplasările u_i definite prin intermediul acestor relaţii verifică şi condiţiile la limită (3).

În cazul $\mathscr{S} = \mathscr{S}'$ (condiţii la limită numai în deplasări), sîntem conduşi la *ecuaţia variaţională a lui Castigliano* :

$$\delta \left[\iiint\limits_{\mathscr{V}} \widehat{\Phi} (\Sigma) \, \mathrm{d} V - \iint\limits_{\mathscr{S}} \sigma_{ni} \, g_i \, \mathrm{d} S \right] = 0 \, . \tag{31}$$

Funcţiile $\widetilde{\sigma}_{ij}$ nu trebuie să satisfacă în acest caz nici o condiţie prealabilă.

OBSERVAŢIE. Expresia (22) — şi ecuaţia (25) ce derivă din ea — sînt identice cu cele ce se obţin în teoria ce are ca punct de pornire integrala energiei. Dimpotrivă, expresia (28) — şi ecuaţia (31) — nu au echivalent. Libertatea mai mare în alegerea funcţiilor $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{\sigma}_{ij}$ din punctul de vedere al proprietăţilor lor la limită constituie unul din avantajele metodei lui Reissner. Pentru comparaţie, vezi S. Mihlin [4], finele § 4.26.

Notînd cu $\mathfrak{J}$ valoarea funcţionalei lui Reissner pentru $\widetilde{u}_i = u_i$, $\widetilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$, conchidem desigur că pentru orice sistem de funcţii $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{\sigma}_{ij}$, avem

$$\widetilde{\mathfrak{J}}_\sigma \leqslant \mathfrak{J} \leqslant \widetilde{\mathfrak{J}}_u \, . \tag{32}$$

Metoda variaţională constă deci în descompunerea problemei în două etape : alegerea funcţiilor $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{\sigma}_{ij}$, şi rezolvarea problemei $\delta \mathfrak{J} = 0$ corespunzătoare. Rezolvarea acestei din urmă probleme echivalează cu o „triere" a funcţiilor $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{\sigma}_{ij}$, operaţie în urma căreia se reţin numai acelea dintre ele care verifică (1)—(4).

În cazul ecuaţiei lui Lagrange, această operaţie de triere asigură în mod automat verificarea ecuaţiilor de echilibru *şi* a condiţiilor la limită în tensiuni. În cazul ecuaţiei lui Castigliano, ea asigură verificarea condiţiilor la limită în deplasări, precum şi cea a ecuaţiilor fizico-geometrice (vezi şi Observaţia de mai sus). Întrucît sistemul (1), (2) este echivalent cu sistemul complet al ecuaţiilor elasticităţii, rezultă că verificarea ecuaţiei lui Castigliano trebuie să garanteze implicit verificarea condiţiilor lui Saint-Venant. Acest fapt a fost demonstrat de R. Southwell [1], [2] (vezi şi L. Leibenzon [2], „Metode variaţionale", § 1.8); mai recent pe aceeaşi temă, vezi K. Washizu [2].

d) Concluzii

În ce priveşte tehnica de rezolvare a problemei $\delta \mathfrak{J} = 0$, ne mărginim la cîteva indicaţii. Funcţiile u_i, σ_{ij} se caută sub forma de dezvoltări în serie de funcţii cu proprietăţi destul de simple („funcţii coordonate"), iar coeficienţii acestor dezvoltări se determină tocmai din condiţia $\delta \mathfrak{J} = 0$. În felul acesta, problema valorilor staţionare ale *funcţionalei* lui Reissner (sau Lagrange, sau Castigliano) este înlocuită printr-o problemă similară pentru o *funcţie* de o infinitate de variabile : coeficienţii de pe lîngă funcţiile

coordonate. În cazul teoriei liniare, aceasta conduce în ultimă instanță la rezolvarea unor sisteme infinite de ecuații algebrice liniare.

Pe această cale se pot obține *soluții aproximative*, precum și — demonstrînd convergența seriilor astfel introduse și studiind proprietățile sumelor lor — *teoreme de existență*.

Sub diferite forme, ecuațiile variaționale sînt examinate de C. Biezeno și R. Grammel [1], cap. 3; P. Papkovici [4], cap 14; I. Sokolnikoff [2], cap. 7; S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 6 și Anexa. În lucrări mai recente, vezi P. Germain [1], capitolul 8; C. Pearson [2], capitolul 7; W. Prager [2], § 8.6; C. Truesdell și W. Noll [1], § 88; C. Truesdell și R. Toupin [1], §§ 231—238. Vezi încă și monografiile indicate în § 4, pag. 136. Pentru anumite chestiuni speciale, vezi J. Radok [3] (probleme plane); D. Rüdiger [1], [2] (generalizarea punctului de vedere al lui Reissner); M. Gurtin [4] și Yu Chen [1] (elasto-dinamică); L. Kacianov [3] (plasticitate).

§ 8. SISTEMUL ECUAȚIILOR ÎN DEPLASĂRI

a) Corpuri neomogene și anizotrope

Să amintim ecuațiile statice sub forma (1.2) și ecuațiile geometrice sub forma (1.1). Introducînd (1.1) în legea lui Hooke (1.3), putem scrie sistemul complet de ecuații sub forma simbolică (vezi (2.4.11); „tens“ este un operator diferențial liniar de primul ordin):

$$\operatorname{div} \mathbf{\Sigma} + \boldsymbol{F} = 0, \qquad \mathbf{\Sigma} = \operatorname{tens} \boldsymbol{u}, \tag{1}$$

ceea ce echivalează cu relațiile (1.5)—(1.8).

Definind produsul a doi operatori prin aplicarea lor succesivă, obținem ecuațiile în deplasări sub forma

$$\operatorname{div} \operatorname{tens} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} = 0 \tag{2}$$

sau încă

$$\mathfrak{A} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}, \tag{3}$$

unde $\mathfrak{A} = -\operatorname{div} \operatorname{tens}$ este produsul celor doi operatori considerați.

Ținînd seama de (1.1)—(1.3) și de relațiile de simetrie pentru c_{ij}^{hk} și ε_{hk}, înmulțind cu versorii $\boldsymbol{i}_i$ ai axelor Ox_i, și sumînd, obținem pentru (3) forma

$$[c_{ij}^{hk} u_{h,k}]_{,j} \boldsymbol{i}_i + \boldsymbol{F} = 0, \tag{4}$$

ceea ce dă forma explicită a operatorului $\mathfrak{A}$, numit *operatorul lui Lamé* (pentru corpuri neomogene și anizotrope).

OBSERVAȚIA 1. Se poate demonstra că operatorul div este (în sensul teoriei operatorilor liniari în spații Hilbert) *conjugatul* operatorului tens pe mulțimea vectorilor ce satisfac una din condițiile la limită (2.1) — (2.3). De aci rezultă posibilitatea de a face uz în teoria elasticității de metoda numită „a proiecțiilor ortogonale“, inclusiv de a demonstra pe această

cale teoremele de existenţă pentru primele trei probleme fundamentale. (Vezi S. Mihlin [4], §§ 48–54; S. Teleman [1]; H. Weyl [2].) Această descompunere a operatorului $\mathfrak{A}$ este analogă cu descompunerea $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$, şi este uşor de transpus aci teoria corespunzătoare a ecuaţiei lui Laplace.

Pe de altă parte, se poate demonstra (făcînd uz de faptul că Φ este o formă patratică pozitiv-definită) că operatorul $\mathfrak{A}$ este pozitiv-definit pe aceleaşi mulţimi de vectori. De aci rezultă posibilitatea de a rezolva aceleaşi probleme (teoreme de existenţă şi metode aproximative, inclusiv convergenţa lor) prin metoda lui Ritz (vezi S. Mihlin [2]–[4]).

Acestea sînt principalele căi abstract-funcţionale spre studiul ecuaţiilor elasticităţii. În practică, ele apar adesea legate de unele din ecuaţiile din § 7.

Dacă $\mathscr{V}$ este omogen, structura operatorului $\mathfrak{A}$ se simplifică: ţinînd seama că $c_{ij,j}^{hk} \equiv 0$, ecuaţia (4) devine

$$c_{ij}^{hk} u_{h,jk} \boldsymbol{i}_i + \boldsymbol{F} = 0. \tag{5}$$

b) *Sistemul ecuaţiilor lui Lamé pentru corpuri omogene şi izotrope*

În acest caz este mai comod să stabilim direct ecuaţiile corespunzătoare. Anume, introducînd (3.3.18) în (1.2) şi utilizînd (1.1), obţinem pe rînd (observînd că $\theta = u_{j,j}$):

$$\sigma_{ij,j} = \lambda\theta_{,i} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji}.$$

Întrucît $(\lambda + \mu)/\mu = (1 - 2\nu)^{-1}$, sistemul (1.2) se poate scrie

$$u_{i,jj} + (1 - 2\nu)^{-1} u_{j,ji} + \mu^{-1} F_i = 0, \tag{6}$$

sau încă, sub formă vectorială:

$$\Delta \boldsymbol{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mu^{-1} \boldsymbol{F} = 0. \tag{7}$$

Acestea sînt *ecuaţiile lui Lamé* (pentru corpuri omogene şi izotrope), stabilite de către G. Lamé şi B. Clapeyron şi publicate în 1828. Pornind de la consideraţii asupra forţelor intermoleculare, ele fuseseră obţinute încă în 1821 de către L. Navier [1], dar numai în cadrul teoriei rariconstante ($\lambda = \mu$).

OBSERVAŢIA 2. Ecuaţiile (7) îşi pierd evident sensul pentru $\nu = 0{,}5$. Dar în acest caz, avem şi $\theta = \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ (vezi § 3.4, pag. 92), ceea ce reprezintă o nouă ecuaţie. Sistemul modificat ce se obţine pentru această stare-limită a fost intens studiat, inclusiv pentru cazul teoriei neliniare, al corpurilor neomogene etc. Vezi de exemplu J. Fuka [1], J. Golecki [1], L. Tolokonnikov [1].

Sistemul (7) este un sistem de trei ecuaţii cu derivate parţiale de al doilea ordin, liniar, cu coeficienţi constanţi. Comparînd ecuaţiile (7) cu (3), rezultă că pentru corpuri omogene şi izotrope avem

$$\mathfrak{A} = -\,\text{div tens} = -\,\mu\,[\Delta + (1-2\nu)^{-1}\,\text{grad div}]; \tag{8}$$

aşadar, operatorul lui Lamé are în acest caz o formă extrem de simplă.

Se pot da uşor unele forme echivalente ale ecuaţiilor (7). Anume, utilizînd operatorul „nabla'' al lui Hamilton, avem mai întîi

$$\text{div}\,\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\boldsymbol{u};\quad \text{grad}\,\varphi = \nabla\varphi;\quad \Delta\varphi = \text{div grad}\,\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi, \tag{9}$$

şi cu aceasta (7) ia forma

$$\mu\,[\nabla\cdot\nabla\,\boldsymbol{u} + (1-2\nu)^{-1}\,\nabla\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{F} = 0. \tag{10}$$

Ţinînd seama că grad div $\boldsymbol{u}$ = rot rot $\boldsymbol{u} + \Delta\,\boldsymbol{u}$, obţinem din (7)

$$\mu\left[\Delta\,\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}(1-\nu)^{-1}\,\text{rot rot}\,\boldsymbol{u}\right] + \frac{1}{2}(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}\boldsymbol{F} = 0. \tag{11}$$

În fine, scăzînd (11) din (7) amplificată cu μ, căpătăm

$$\mu\left[\text{grad div}\,\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}\,\text{rot rot}\,\boldsymbol{u}\right] + \frac{1}{2}(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}\boldsymbol{F} = 0. \tag{12}$$

Prezenţa aci a operatorului lui Laplace nu e întîmplătoare. Acest fapt va juca ulterior un rol esenţial. (Vezi mai departe §§ 10, 12 şi 7.4.)

§ 9. SISTEMUL ECUAŢIILOR ÎN TENSIUNI PENTRU CORPURI OMOGENE ŞI IZOTROPE

Ştim deja (vezi § 1) că ecuaţiile în tensiuni sînt alcătuite din ecuaţiile de echilibru (1.2) *şi* ecuaţiile de compatibilitate (1.9.12) transcrise în tensiuni prin intermediul legii lui Hooke (1.4). Vom considera aci numai cazul corpurilor izotrope şi omogene, şi prin urmare vom ţine seama de legea lui Hooke (3.4.18)

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\,\Theta\,\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} \tag{1}$$

în condiţiile (1.9.12), pe care le vom scrie (intervertind k cu j) sub forma

$$\varepsilon_{ij,hk} + \varepsilon_{hk,ij} - \varepsilon_{ih,jk} - \varepsilon_{jk,ih} = 0. \tag{2}$$

Aceasta dă ecuaţiile de compatibilitate sub forma

$$\sigma_{ij,hk} + \sigma_{hk,ij} - \sigma_{ih,jk} - \sigma_{jk,ih} =$$
$$= [\nu/(1+\nu)]\,[\delta_{ij}\,\Theta_{,hk} + \delta_{hk}\,\Theta_{,ij} - \delta_{ih}\,\Theta_{,jk} - \delta_{jk}\,\Theta_{,ih}]. \tag{3}$$

Aceste ecuaţii sînt foarte incomode — dar pot fi simplificate cu ajutorul ecuaţiilor statice (1.2). Într-adevăr, dacă în (3) luăm $h = k$, căpătăm mai întîi

$$\sigma_{ij,hh} + \sigma_{hh,ij} - \sigma_{ih,hj} - \sigma_{jh,hi} =$$
$$= [\nu/(1+\nu)]\,[\delta_{ij}\Theta_{,hh} + \delta_{hh}\Theta_{,ij} - \delta_{ih}\Theta_{,jh} - \delta_{jh}\Theta_{,ih}],$$

sau încă, după calcule elementare — în care se ţine seama de faptul că $\partial^2/\partial x_h \partial x_h = \Delta$, $\sigma_{hh} = \Theta$, $\delta_{hh} = 3$, precum şi de ecuaţiile (1.2) derivate în raport cu x_j şi x_i:

$$\Delta\sigma_{ij} + (1+\nu)^{-1}\Theta_{,ij} = \nu(1+\nu)^{-1}\delta_{ij}\,\Delta\Theta - F_{i,j} - F_{j,i}. \qquad (4)$$

Pentru a calcula pe $\Delta\Theta$, este suficient să luăm aci $i = j$, de unde

$$\Delta\Theta = -(1+\nu)(1-\nu)^{-1}F_{i,i}. \qquad (5)$$

Introducînd (5) în (4), obţinem ecuaţiile

$$\Delta\sigma_{ij} + (1+\nu)^{-1}\Theta_{,ij} = -\nu(1-\nu)^{-1}\,\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} - F_{i,j} - F_{j,i}, \qquad (6)$$

ceea ce se mai scrie şi sub forma

$$\sigma_{ij,hh} + (1+\nu)^{-1}\sigma_{hh,ij} = -\nu(1-\nu)^{-1}\,\delta_{ij}\,F_{h,h} - F_{i,j} - F_{j,i}. \qquad (7)$$

(Deşi oarecum inconsecventă, utilizarea simbolului Δ e comodă.)

Acestea sînt *ecuaţiile de compatibilitate* în tensiuni (pentru corpuri omogene şi izotrope), numite de obicei *ecuaţiile Beltrami-Michell*. Ele au fost obţinute de E. Beltrami [1] (pentru $\boldsymbol{F} = 0$), şi ulterior de J. Michell [1] (pentru $\boldsymbol{F} \neq 0$).

Sistemul ecuaţiilor în tensiuni pentru corpuri omogene şi izotrope este deci alcătuit din ecuaţiile (1.2) şi (6). Rezolvîndu-l, căpătăm valori ale deformaţiei pentru care ecuaţiile geometrice pot fi integrate. (Dacă $\mathscr{V}$ este multiplu conex, trebuie să verificăm şi condiţiile (1.9.17).)

Dacă ecuaţiile (6) sînt *identic* verificate (de ex., dacă $\boldsymbol{F}$ = const., iar tensiunile sînt funcţii *liniare* de coordonate), sistemul ecuaţiilor în tensiuni se reduce la ecuaţiile statice (1.2). Astfel de probleme se numesc „*elementare*". Unele din ele au fost examinate în § 3.4; asupra altora vom reveni în § 5.5. Vezi încă exemple în S. Timoshenko şi J. Goodier [1], capitolul 10.

§ 10. PROPRIETĂŢI GENERALE ALE SOLUŢIILOR

a) Reducerea la ecuaţii omogene

Sistemul (1.1)—(1.3), sau (8.7), sau (1.2) şi (9.6), de rezolvat cu condiţiile la limită (2.1)—(2.4), este un sistem neomogen. În practică, forţele de volum sînt adesea neglijabile, sarcinile pe frontieră jucînd rolul princi-

pal. Mai mult încă, se poate ajunge întotdeauna la studiul unui *sistem omogen*.

Într-adevăr, fie că am găsit o soluție *particulară* a sistemului neomogen. Dacă ea satisface și condițiile la limită, aceasta este însăși soluția — în virtutea teoremei de unicitate. În caz contrar, să o notăm cu indicele $(^p)$, și să căutăm soluția problemei sub forma

$$u_i = u_i^0 + u_i^p, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^p, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^p. \tag{1}$$

În virtutea liniarității ecuațiilor, rezultă (ca și în § 5) că funcțiile u_i^0, ε_{ij}^0, σ_{ij}^0 verifică ecuațiile (1.1)—(1.3) *omogene*. În virtutea liniarității condițiilor la limită, avem de exemplu din (2.3) și (1) :

$$\boldsymbol{u}^0|_{\mathscr{S}'} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{u}^p|_{\mathscr{S}'}, \quad \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}^0)|_{\mathscr{S}''} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}^p)|_{\mathscr{S}''}. \tag{2}$$

Prin urmare, dacă soluția $(^p)$ este cunoscută, problema se reduce la determinarea soluției $(^0)$ a ecuațiilor *omogene*, cu datele la limită *modificate* din (2).

Dacă cunoaștem un sistem de funcții ce verifică condițiile la limită, fără a verifica și ecuațiile problemei, un raționament analog conduce la o problemă cu ecuații neomogene, și condiții la limită omogene.

Soluția $(^p)$ are un mare grad de arbitrar — ce permite de altfel determinarea ei relativ simplă. De aci rezultă un grad de arbitrar similar în determinarea soluției $(^0)$ corespunzătoare, căci numai suma lor trebuie să fie unică.

Aceste raționamente rămîn valabile pentru corpuri neomogene și anizotrope.

EXEMPLE. 1° *Forța gravitațională.* Alegînd drept axă Ox_3 verticala ascendentă, avem $F_i = -\rho g \delta_{i3}$. Ecuațiile (9.6) sînt deci omogene. Alegînd drept soluție $(^p)$

$$\sigma_{33}^p = \rho g x_3, \quad \sigma_{11}^p = \sigma_{22}^p = \sigma_{12}^p = \sigma_{23}^p = \sigma_{31}^p = 0. \tag{3}$$

ecuațiile (1.2) și (9.6) sînt verificate. Determinînd — dacă este cazul — componentele corespunzătoare ale deplasării, și introducînd soluția particulară (3) în (2), obținem condițiile la limită modificate pentru problema cu forțe de volum nule.

2° *Forța inerțială datorată rotației în jurul unei axe.* Notînd cu Ox_3 axa de rotație și cu ω viteza unghiulară, corpul poate fi privit ca aflîndu-se în echilibru, sub acțiunea unei forțe de volum de componente :

$$F_1 = \rho\omega^2 x_1, \quad F_2 = \rho\omega^2 x_2, \quad F_3 = 0. \tag{4}$$

Introducînd (4) în ecuațiile lui Lamé (8.7), observăm că componentele soluției particulare pot fi căutate sub forma unor polinoame de grad trei. Alegînd

$$u_1^p = ax_1^3 + bx_1^2 x_2 + cx_1 x_2^2 + dx_2^3, \quad u_2^p = ex_1^3 + fx_1^2 x_2 + gx_1 x_2^2 + hx_2^3, \quad u_3^p = 0, \tag{5}$$

și introducînd în (8.7), constatăm că a treia ecuație este identic verificată, iar primele două dau 4 ecuații pentru cele 8 constante $a, b, \ldots, h$. Luînd de pildă $e = g = b = d = 0$, $a = h$, $c = f$, obținem

$$a = h = 0, \quad c = f = -\frac{1 - 2\nu}{4(1 - \nu)\mu}\rho\omega^2. \tag{6}$$

Introducînd (6) în (5), dispunem de soluția căutată, și putem scrie condițiile la limită modificate (2).

Exemplele de mai sus sugerează de a reprezenta în general $\boldsymbol{F}$ prin polinoame (dacă aceasta este posibil), și a căuta soluția particulară tot sub formă de polinoame. O soluție exactă a ecuațiilor lui Lamé neomogene va fi dată la finele § 7.9.

b) Biarmonicitatea componentelor stării elastice

În cele ce urmează, putem deci considera că *forțele de volum sînt nule.* (Vom lua $\boldsymbol{F} \neq 0$ numai dacă aceasta nu complică raționamentul, sau pune în evidență unele proprietăți importante.)

Pentru $\boldsymbol{F} = 0$ (sau chiar $\boldsymbol{F} = \text{const.}$), relația (9.5) se reduce la

$$\Delta\Theta = 0. \tag{7}$$

Ținînd seama de (3.3.22), urmează că avem și

$$\Delta\theta = 0. \tag{8}$$

Prin urmare, pentru forțe de volum constante (în particular: nule), *invarianții liniari ai tensiunii și deformației sînt funcții armonice.* Aplicînd operatorul lui Laplace în primul membru al ecuațiilor lui Lamé (8.7) omogene, precum și al ecuațiilor Beltrami-Michell (9.6) pentru $\boldsymbol{F} = \text{const.}$, deducem

$$\Delta\Delta u_i = 0, \tag{9}$$

$$\Delta\Delta\sigma_{ij} = 0. \tag{10}$$

Prin urmare, pentru forțe de volum constante (eventual nule), *componentele stării elastice sînt funcții biarmonice.*

Caracterul biarmonic al soluției este propriu corpurilor *omogene* și *izotrope.* Acest fapt este fundamental. El subliniază rolul ecuației biarmonice în teoria echilibrului corpurilor omogene și izotrope, rol analog celui al ecuației armonice în studiul fluidelor ideale incompresibile. El sugerează posibilitatea de a face uz de unele metode încetățenite în hidrodinamică, și pune totodată în evidență gradul de complexitate sporit al problemelor matematice ale teoriei elasticității, chiar în varianta sa cea mai simplă.

Totuși, existența unei relații de tipul celei din (9) nu este specifică corpurilor omogene și izotrope. Într-adevăr, limitîndu-ne pentru rațiuni de simplicitate la cazul corpurilor omogene, cu $\boldsymbol{F} = 0$, și introducînd operatorii

$$\mathfrak{D}_{ih} = c_{ij}^{hk}(\partial^2/\partial x_k \partial x_j), \tag{11}$$

putem transcrie ecuațiile (8.5) sub forma

$$\mathfrak{D}_{ih} u_h = 0. \tag{12}$$

Să examinăm sumar cazul $i, h, j, k = 1, 2$:

$$\mathfrak{D}_{11} u_1 + \mathfrak{D}_{12} u_2 = 0, \qquad \mathfrak{D}_{21} u_1 + \mathfrak{D}_{22} u_2 = 0. \tag{13}$$

Pentru a elimina pe u_1 sau u_2 din acest sistem, este suficient să „amplificăm" prima ecuație (13) cu $\mathfrak{T}_{22}$, pe cea de a doua cu $\mathfrak{T}_{12}$, și să le scădem membru cu membru. Întrucît c_{ij}^{hk} sînt constante — și deci operatorii $\mathfrak{T}_{ih}$ sînt permutabili — se obține ecuația de ordin patru $(\mathfrak{T}_{11}\mathfrak{T}_{22} - \mathfrak{T}_{21}\mathfrak{T}_{12}) u_1 = 0$, și o ecuație identică pentru u_2.

În cazul $i, j, h, k = 1, 2, 3$ s-ar deduce — după eliminarea lui u_3 — două ecuații de ordinul patru; eliminînd apoi pe u_2, nu se obține o ecuație de ordinul opt, ci numai una de ordinul șase, datorită faptului că toți termenii căpătați conțin in „factor" operatorul $\mathfrak{T}_{13}$.

În fapt, lucrurile se petrec ca și cum (13) ar fi un sistem *algebric*, a cărui soluție există dacă și numai dacă Det $[\mathfrak{T}_{ih}] = 0$. De aci rezultă că toate componentele u_h — și deci, după derivare, *orice* componentă $\mathfrak{v}$ a stării elastice — verifică ecuația liniară de ordinul șase, cu coeficienți constanți:

$$\text{Det}\ [\mathfrak{T}_{ih}]\ \mathfrak{v} = 0. \tag{14}$$

Rezultatul din (9), (10), deși *esențial* mai simplu, nu este decît un caz particular al acestui rezultat general, aparținînd la origine lui I. Fredholm [1]. (Vezi și E. Kröner [1].) Pentru anumite cazuri particulare, vezi indicațiile din § 7.4, pag. 529.

Folosind și formule ulterioare din (12.11) și făcînd uz și de (1.7.6), (1.8.10) și (1.8.11), se găsește în particular pentru cazul corpului omogen și izotrop $\Delta^3\mathfrak{v} = 0$ — ceea ce e mai puțin decît (9), (10).

c) *Potențiali*

Întrucît componentele deformației și tensiunii se obțin din cele ale deplasării prin operații aritmetice și de derivare, ne vom limita la studiul acestora din urmă.

O funcție (sau sistem de funcții) a cărei cunoaștere permite determinarea tuturor funcțiilor căutate într-o problemă dată, prin operații dintre care cea mai complicată este cea de derivare, poartă numele de *potențial* al problemei considerate [4]).

Privind componentele deplasării ca potențiali și ținînd seama de teorema lui E. Almansi [1], [2] și M. Nicolescu [1], care afirmă că orice funcție poliarmonică de ordin n poate fi reprezentată prin intermediul a n funcții armonice, conchidem că toate componentele stării elastice pot fi reprezentate (pentru $F = 0$) prin *potențiali armonici*.

Aparent, numărul minim de astfel de funcții armonice este de 6. În capitolul 7 vom vedea că problema poate fi redusă (pentru $F = 0$, $\nu \neq 0{,}25$) la cea a determinării a numai trei (și uneori două, sau chiar numai una) funcții armonice. În cazul particular al unor probleme în care intervin funcții de numai două variabile, aceasta deschide drumul spre utilizarea teoriei funcțiilor de o variabilă complexă în teoria elasticității (vezi cap. 5 și 6).

În unele împrejurări au fost determinate (istoricește, mai devreme) funcții (nu neapărat armonice) care permit prin operații de derivare deter-

---

[4]) A nu se confunda cu potențialul elastic Φ și nici cu potențialii newtonieni !

minarea numai a componentelor tensiunii. Astfel de funcții vor purta numele de *potențiali de tensiune*, spre deosebire de cele mai sus considerate, numite *potențiali de deplasare*. Evident, cunoașterea potențialilor de deplasare e preferabilă : cunoașterea numai a potențialilor de tensiune cere noi operații de integrare pentru găsirea deplasărilor.

Ținînd seama de noțiunea de soluție regulată definită la finele § 4.2, vom căuta numai astfel de potențiali pentru care soluția satisface condițiile (2.7)—și eventualele condiții de regularitate la infinit. Dimpotrivă, potențiali cu singularități pot fi utilizați pentru a construi soluții cu singularități (forțe concentrate, momente concentrate etc.)

§ 11. ECUAȚIILE MICILOR MIȘCĂRI ALE CORPURILOR ELASTICE

Rezultatele de pînă aci pot fi extinse și la studiul unor procese *care nu sînt pseudo-statice*. Făcînd abstracție de o eventuală deplasare rigidă de ansamblu, vom studia acele mișcări ale particulelor care duc la deplasări și deformații mici în raport cu poziția corpului privit ca solid rigid. Astfel de mișcări apar de obicei fie ca *oscilații* elastice (proprii sau forțate) în jurul unei anumite poziții, fie ca *unde* ce se propagă în corpul elastic (de ex. ca urmare a unui șoc).

Componentele deplasării, deformației, tensiunii, se definesc la fel ca în cazul static, dar depind și de timpul t.

Ecuațiile geometrice (1.1) rămîn intacte.

Ecuațiile statice (1.2) trebuie modificate prin considerarea termenilor inerțiali. În coordonate lagrangeene, punctul $\boldsymbol{x}$ ocupă la un moment dat t o poziție definită de valorile $x_i^* = x_i + u_i\,(x_1, x_2, x_3, t)$; pentru componentele *vitezei* sale găsim deci

$$v_i = \mathrm{d}x_i^*/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(x_i + u_i)/\mathrm{d}t = \mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t = \partial u_i/\partial t. \qquad (1')$$

Dacă am face uz de coordonate euleriene, am avea $u_i = u_i\,[x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), t]$ și deci

$$v_i = \mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t = \partial u_i/\partial t + (\partial u_i/\partial x_j^*)(\partial x_j^*/\partial t). \qquad (1'')$$

Dacă produsele din (1'') sînt suficient de mici față de termenul liniar (ceea ce este adevărat pentru viteze de antrenare suficient de mici ale rețelei de coordonate materializate $\mathrm{d}x_i^*/\mathrm{d}t$), atunci (1'') coincide cu (1'). Notînd prin puncte dispuse superior derivatele *parțiale* în raport cu timpul, putem lua deci

$$v_i \cong \dot{u}_i. \qquad (2)$$

Un raționament analog permite să obținem pentru componentele accelerației valorile $\ddot{u}_i$, astfel că *ecuațiile dinamice* (liniarizate) ale lui Cauchy iau forma

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho\ddot{u}_i = 0. \qquad (3)$$

(Acestea nu mai sînt ecuații numai în tensiuni !)

În ce privește legătura dintre tensiuni și deformații, raționamentele din capitolul 3 rămîn valabile—coeficienții elastici depinzînd însă și de caracterul și viteza procesului de deformație. Astfel, legea lui Hooke (3.3.18) rămîne valabilă, constantele λ și μ putînd diferi însă mult față de cazul static.

Condițiile de existență ale unui potențial elastic rămîn neschimbate : prezența termenului diferențial $\mathrm{d}K$ în (3.5.10) nu modifică condițiile în care $\delta\Phi$ este o diferențială.

Problemele fundamentale sînt pînă la un punct analoge cu cele formulate în § 2. Forțele de volum și funcțiile cunoscute ce intervin în datele la limită depind însă și de timp ; înafară de aceasta, trebuie să ținem seama și de *condițiile inițiale* ale problemei, constînd în cunoașterea poziției și vitezei punctelor corpului la un moment inițial $t = t_0$.

Chestiunea existenței soluției este de o extremă dificultate. Dimpotrivă, teorema de unicitate se demonstrează ușor. Anume, construind — ca și în § 5 — o soluție-diferență, se vede că ea satisface legea lui Hooke, ecuațiile geometrice, și ecuațiile dinamice (3) omogene. Pe frontieră se obține, la orice moment t,

$$[\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}]|_{\mathscr{S}} = 0. \tag{4}$$

În fine, la momentul inițial avem pentru soluția-diferență

$$\boldsymbol{u}|_{t=t_0} = \mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t|_{t=t_0} = 0. \tag{5}$$

Să evaluăm lucrul mecanic al forțelor exterioare în unitatea de timp. Întrucît problema este cu liniaritate geometrică, integrarea se efectuează pe $\mathscr{V}$, și avem

$$\dot{L} = \lim_{\delta t \to 0} \delta L / \delta t = \lim_{\delta t \to 0} \iiint_{\mathscr{V}} (\boldsymbol{F} + \delta \boldsymbol{F}) \cdot (\delta \boldsymbol{u} / \delta t)\, \mathrm{d}V +$$

$$+ \lim_{\delta t \to 0} \iint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{f} + \delta \boldsymbol{f}) \cdot (\delta \boldsymbol{u} / \delta t) \mathrm{d}S,$$

sau încă (vezi (3.6.1))

$$\dot{L} = \iiint_{\mathscr{V}} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, \mathrm{d}V + \iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, \mathrm{d}S. \tag{6}$$

Un calcul analog celui din (3.6.2) conduce la

$$\dot{L} = \iiint_{\mathscr{V}} (\sigma_{ij,j} + F_i)\, \dot{u}_i\, \mathrm{d}V + \iiint_{\mathscr{V}} \sigma_{ij}\, \dot{u}_{i,j}\, \mathrm{d}V, \tag{7}$$

de unde, ca în (3.6.3) – (3.6.7), și ținînd seama de (3), obținem

$$\dot{L} = \iiint_{\mathscr{V}} \rho\, \dot{u}_i\, \ddot{u}_i\, \mathrm{d}V + \iiint_{\mathscr{V}} \sigma_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}\, \mathrm{d}V. \tag{8}$$

Prima integrală din (8) se scrie $\dot{K}$, unde K este energia cinetică totală a corpului la momentul t:

$$K = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathscr{V}} \rho \, (\dot{u}_i)^2 \, \mathrm{d}V. \tag{9}$$

A doua integrală din (8) se poate pune sub forma

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} \sigma_{ij} \, \dot{\varepsilon}_{ij} \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_{\mathscr{V}} c_{ij}^{kh} \, \varepsilon_{hk} \, \dot{\varepsilon}_{ij} \, \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint\limits_{\mathscr{V}} \frac{1}{2} \, c_{ij}^{hk} \, \varepsilon_{hk} \, \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}V. \tag{10}$$

Notînd cu Ψ energia potențială totală a corpului, avem deci din (8) – (10): $\dot{L} = \dot{\Psi} + \dot{K}$, sau încă, integrînd în raport cu timpul de la t_0 la t:

$$L - L_0 = \Psi - \Psi_0 + K - K_0. \tag{11}$$

Întrucît forțele exterioare sînt nule pentru soluția-diferență, avem $L = L_0 = 0$. Tot astfel din (5) rezultă și $\Psi_0 = K_0 = 0$. Prin urmare, (11) se reduce la

$$\Psi + K = 0 \tag{12}$$

la orice moment t. Or, energia cinetică este o formă patratică pozitiv-definită. *Dacă* și potențialul elastic este o formă patratică pozitiv-definită, urmează de aci

$$\Psi = K = 0 \tag{13}$$

la orice moment t, astfel că problema se reduce la o problemă de statică, pentru care teorema de unicitate este deja demonstrată.

Cele spuse relativ la metodele directă, inversă și semiinversă, rămîn valabile. Cu privire la principiul lui Saint-Venant, vezi indicațiile din § 6, pag. 142. În același cadru ca în § 8, se obțin ecuațiile dinamice ale lui Lamé, de exemplu sub forma

$$\mu \, \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}} = 0. \tag{14}$$

Un sistem de ecuații numai în tensiuni nu poate fi construit, întrucît ecuațiile (3) conțin și componentele deplasării. Totuși există un analog al ecuațiilor Beltrami-Michell (vezi M. Iacovache [1]).

§ 12. STRUCTURA ECUAȚIILOR ELASTO-STATICII ȘI ELASTO-DINAMICII PENTRU CORPURI OMOGENE ȘI IZOTROPE

a) Clasificarea sistemelor de ecuații. Unde

Proprietățile soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale și chiar modul de a le studia, depind esențial de proprietățile coeficienților ecuației considerate. Astfel, pentru ecuații liniare (sau chiar cvasiliniare) de ordinul al doilea, sîntem conduși la a considera ecuații de tip eliptic, parabolic și hiperbolic — cărora le corespund probleme teoretice cu totul diferite.

Pentru chestiunea clasificării *sistemelor* de ecuații, vezi C. Miranda [1], § 7.56 (cu indicații bibliografice, inclusiv relativ la ecuațiile elasti-

cității), și I. Petrovski [1]. Aci ne vom mărgini la a expune acea parte a punctului de vedere al lui J. Hadamard [1], capitolele 2 și 6, ce conduce la concluzia că ecuațiile elasto-staticii formează un sistem *eliptic*, și la a pune în evidență tipurile de *unde* posibile în cazul elasto-dinamicii. Chestiunea este amănunțit examinată — cu aplicații speciale la problemele hidrodinamicii — de C. Iacob [5], capitolele 12 și 13. Vezi de asemenea R. Courant [1], §§ 1.7, 3.2 și 6.4; A. Freudenthal și H. Geiringer [1], §§ 55—61; P. Germain [1], capitolul 10 și §§ 16.5 și 16.8; E. Goursat [2], capitolul 25; J. Hadamard [2], capitolele 1 și 5; R. Hill [6], § 2; L. Schwartz [2], capitolul 7; V. Smirnov [2], volumul 4, pct. 126, 127, 141 și 161—165; N. Teodorescu și V. Olaru [1], vol. 2; C. Truesdell și R. Toupin [1], §§ 172—194; G. Valiron [2], §§ 16.284 și 16.285.

Ideea *clasificării* sistemelor de ecuații este legată de ideea de *suprafață caracteristică*, la rîndul ei legată de tehnica de raționament specifică teoremei Cauchy-Kovalevskaia (vezi de ex. V. Smirnov [2], vol 4, pct. 126 și 127).

Pentru început, să presupunem că avem de a face cu o singură ecuație cvasiliniară de ordinul al doilea

$$a_{ij}\, u_{,ij} + \ldots = 0 \tag{1}$$

(unde punctele înlocuiesc termeni ce depind de x_i, u, $u_{,i}$, dar nu de $u_{,ij}$), cu date Cauchy speciale pe hiperplanul $x_1 = 0$. Teorema Cauchy-Kovalevskaia permite construirea soluției în vecinătatea oricărui punct de pe acest hiperplan în care $a_{11} \neq 0$. Dacă datele Cauchy sînt formulate pe o hipersuprafață $\omega(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$, o schimbare de variabile în care se ia $x_1' = \omega$ conduce la condiția ca pe hipersuprafața $\omega = 0$, ecuația

$$a_{ij}\, \omega_{,i}\, \omega_{,j} = 0 \tag{2}$$

să nu posede soluții. Orice funcție ω care verifică (2) definește o *suprafață caracteristică* a ecuației (1). Pentru date Cauchy pe suprafețe caracteristice, teorema Cauchy-Kovalevskaia își pierde valabilitatea.

Din (1), (2) se vede că o ecuație de tip eliptic — așadar pentru care forma patratică $a_{ij}\,\alpha_i\,\alpha_j$ este pozitiv-definită — nu poate avea suprafețe caracteristice.

Să presupunem acum că o soluție u a ecuației (1) prezintă proprietăți de discontinuitate la traversarea unei suprafețe $f = 0$. Dacă $u \in C^1$, pe cele două fețe ale suprafeței $f = 0$ avem aceleași date Cauchy; dacă această suprafață *nu este* caracteristică, problema Cauchy corespunzătoare are o soluție analitică deplin determinată și unică în vecinătatea suprafeței, astfel încît discontinuități ale derivatelor sale *nu sînt posibile*. Prin urmare, a căuta discontinuitățile posibile ale soluțiilor de clasă C^1 ale ecuației (1), revine la a căuta soluțiile ecuației (2). O suprafață de discontinuitate la traversarea căreia primele $p-1$ derivate ale funcției rămîn continue, se numește *front de undă* (sau pe scurt *undă*) *de ordin p*. Pentru ecuațiile de ordinul al doilea, undele de ordin unu se numesc *unde de șoc*;

cele de ordinul al doilea se numesc *unde ordinare*. Bine înţeles, raţionamentul de mai sus privind rolul suprafeţelor caracteristice nu este valabil pentru undele de şoc; dimpotrivă, undele de ordin $p \geqslant 2$ pot fi căutate numai printre suprafeţele caracteristice.

Interpretînd una din variabilele independente drept variabilă-timp, orice suprafaţă $f = 0$ poate fi privită ca o suprafaţă mobilă într-un spaţiu corespunzînd variabilelor rămase. Se poate demonstra că viteza cu care această suprafaţă se mişcă — care se numeşte *viteză de propagare*, şi care nu are nimic comun cu o eventuală viteză de deplasare a particulelor materiale — are valoarea

$$v = -\dot{f} / \sqrt{\Sigma f_{,i}^2}. \tag{3}$$

Pentru orice undă ordinară, avem deci

$$v = -\dot{\omega}/\alpha, \qquad \alpha^2 = \sum_1^n \omega_{,i}^2. \tag{4}$$

Să considerăm acum un *sistem* de ecuaţii cvasiliniare de ordinul al doilea

$$a_{ij}^{hk} u_{j,hk} + \ldots = 0 \tag{5}$$

pentru m funcţii u_j. Acelaşi raţionament ca mai sus arată că, pentru date Cauchy pe $x_1 = 0$, teorema Cauchy-Kovalevskaia îşi păstrează valabilitatea dacă

$$\mathrm{Det}\ [a_{ij}^{11}] \neq 0 \tag{6}$$

pentru $x_1 = 0$. Pentru date Cauchy pe hipersuprafaţa $\omega(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$, aceeaşi schimbare de variabile independente conduce la un sistem de forma

$$a_{ij}^{hk} \omega_{,h} \omega_{,k} u_{j,x_1' x_1'} + \ldots = 0, \tag{7}$$

unde coeficienţii

$$A_{ij} = a_{ij}^{hk} \omega_{,h} \omega_{,k} \tag{8}$$

au rolul unor coeficienţi a_{ij}^{11} în noul sistem de coordonate. Condiţia (6) devine $\mathrm{Det}\ [A_{ij}] \neq 0$, şi deci ecuaţia ce defineşte suprafeţele caracteristice este

$$\mathrm{Det}\ [A_{ij}] = 0. \tag{9}$$

Dacă (9) *nu posedă* soluţii reale, sistemul se numeşte *de tip eliptic*.

b) Ecuaţiile lui Lamé dinamice şi statice

Să amintim acum ecuaţiile lui Lamé dinamice sub forma (11.14):

$$\mu u_{i,hh} + (\lambda + \mu) u_{h,hi} - \rho \ddot{u}_i + F_i = 0.$$

Acest sistem conține 3 funcții de 4 variabile independente x_1, x_2, x_3, t. Să-l transcriem sub forma direct comparabilă cu (5):

$$\mu\,\delta_{hk}\,\delta_{ij}\,u_{j,hk} + (\lambda+\mu)\,\delta_{hj}\,\delta_{ki}\,u_{j,hk} - \rho\,\delta_{ij}\,\ddot{u}_j + \ldots = 0\,, \tag{10}$$

astfel că avem (pentru i, j, h, $k = 1,2,3$):

$$a_{ij}^{hk} = \mu\,\delta_{hk}\,\delta_{ij} + (\lambda+\mu)\,\delta_{hj}\,\delta_{ki}\,, \qquad a_{ij}^{44} = -\rho\,\delta_{ij}\,. \tag{11}$$

Introducînd (11) în (8), obținem pentru i, $j = 1,2,3$ (indici referitori la numărul de ecuații și funcții, nu de variabile independente):

$$A_{ij} = (\lambda+\mu)\,\omega_{,i}\,\omega_{,j} + \delta_{ij}\left[\mu\sum_{1}^{3}\omega_{,h}^2 - \rho\,\dot{\omega}^2\right]. \tag{12}$$

Notînd $\omega_{,i} = \alpha_i$ și $\sum_{1}^{3}\omega_{,h}^2 = \alpha^2$, deducem din (9) și (12)

$$\text{Det}\,[A_{ij}] \equiv [(\lambda+2\mu)\,\alpha^2 - \rho\,\dot{\omega}^2]\,[\mu\alpha^2 - \rho\,\dot{\omega}^2]^2 = 0\,. \tag{13}$$

Suprafețele de discontinuitate de ordin 2 și superior posibile, vor fi deci soluții ale ecuației

$$(\lambda+2\mu)\,\alpha^2 - \rho\dot{\omega}^2 = 0\,, \tag{14}$$

sau ale ecuației

$$\mu\,\alpha^2 - \rho\,\dot{\omega}^2 = 0\,. \tag{15}$$

Vitezele de propagare respective vor fi egale cu

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,. \tag{16}$$

Așadar, într-un corp elastic omogen izotrop nemărginit, se pot propaga *numai* unde care sînt soluții ale ecuațiilor (14), (15), singurele viteze de propagare posibile fiind cele din (16). Dimpotrivă, în cazul corpurilor mărginite — în care un rol esențial îl joacă condițiile ce trebuie satisfăcute pe frontiera corpului și în care apar și unde *reflectate* — tabloul nu mai e nici pe departe atît de simplu.

Un studiu detaliat al comportării vectorului deplasare în vecinătatea suprafețelor caracteristice arată că în vecinătatea suprafețelor de tip (14), vectorul $\boldsymbol{u}$ este dirijat după normala la suprafața $\omega = 0$; dimpotrivă, în vecinătatea suprafețelor de tip (15), $\boldsymbol{u}$ e conținut în planul tangent la $\omega = 0$. În mod corespunzător, se spune că avem de-a face cu unde *longitudinale*, respectiv *transversale* (vezi de ex. V. Smirnov [2], vol. 4, pct. 165). Cantitățile (16) se numesc *vitezele sunetului* (longitudinală, respectiv transversală) în mediul elastic.

Dacă avem de-a face cu o bară cilindrică de tipul celei examinate în § 0.2 (vezi și § 3.4, pag. 90), putem să nu ținem seama în primă aproximație decît de deplasarea longitudinală u_3 și de componenta σ_{33}

a tensiunii (axa Ox_3 fiind aci paralelă cu generatoarele). Ecuaţiile (11.3) — pentru $F = 0$ — se reduc la o ecuaţie unică $\sigma_{33.3} - \rho \ddot{u}_3 = 0$, sau încă, ţinînd seama de (0.2.5):

$$E\, u_{3.33} - \rho \ddot{u}_3 = 0 . \tag{17}$$

Din (4) obţinem viteza de propagare a undelor longitudinale într-o bară cilindrică

$$c_0 = \sqrt{E/\rho}\,, \tag{18}$$

care poate fi măsurată cu mare precizie, şi permite determinarea lui E pe o cale cu totul diferită de cea descrisă în § 0.2.

Să calculăm — ca exemplu — vitezele c_1, c_2, c_0 pentru oţel. Ţinînd seama de valorile din tabela din § 3.4, pag. 95, precum şi de valoarea densităţii (a nu se confunda cu greutatea specifică !) $\rho = (7{,}8 \text{ g/cm}^3) : (981 \text{ cm/sec}^2)$, se găseşte

$$c_1 \cong 6100 \text{ m/sec}, \quad c_2 \cong 3300 \text{ m/sec}, \quad c_0 \cong 5050 \text{ m/sec}. \tag{19}$$

Să trecem acum la cazul ecuaţiilor lui Lamé statice. Pentru aceasta, e suficient ca în raţionamentele de mai sus să anulăm derivatele în raport cu timpul. Ecuaţia (13) este acum înlocuită cu

$$\mu^2 (\lambda + 2\mu)\, \alpha^6 = 0\,, \tag{20}$$

ceea ce arată că ecuaţiile elasto-staticii sînt de tip *eliptic*. (Ecuaţiile elasto-dinamicii sînt mai greu de caracterizat: vezi I. Petrovski [1], § 2.16, pct. 6.)

Cele de mai sus au o însemnătate considerabilă. Din ele rezultă că studiul matematic al problemei dinamice a teoriei elasticităţii este *principial* diferit de cel al problemei statice. În particular, se stabileşte astfel o legătură de esenţă între ecuaţiile elasto-staticii şi ecuaţia lui Laplace (cea mai simplă ecuaţie de tip eliptic) pe de o parte, ecuaţiile elasto-dinamicii şi cea a propagării undelor (cea mai simplă ecuaţie de tip hiperbolic normal) pe de altă parte. (Vezi şi mai departe, § 7.3.)

În cele ce urmează, ne vom fixa atenţia exclusiv asupra problemelor *staticii*, pentru care numeroase rezultate şi metode din teoria generală a ecuaţiilor de tip eliptic pot fi aplicate sau generalizate. Vom reveni asupra acestui punct de vedere în capitolul 7. Subliniem totuşi că legătura directă dintre ecuaţiile elasto-staticii şi ecuaţia lui Laplace deschide drumuri mai simple de studiu — valabile însă numai pentru corpurile omogene şi izotrope, în timp ce proprietăţile ce decurg din caracterul de elipticitate al sistemului de ecuaţii au o aplicabilitate mult mai largă.

c) Indicaţii bibliografice

Există probleme dinamice pentru care soluţia poate fi obţinută prin mijloace elementare. (Vezi de ex. M. Filonenko-Borodici [1], cap. 4; S. Timoshenko şi J. Goodier [1], cap. 15.) Dar deosebirile de principiu ne obligă să excludem chestiunile de dinamică din cele ce urmează.

Pentru informaţii asupra acestor probleme, vezi M. Biot [4], capitolul 5; E. Kolsky [1] (inclusiv rezultate privind mediul plastic; ediţia rusă are o bibliografie extinsă); A. Love [1], capitolele 12, 13, şi 20; C. Pearson [2], capitolul 9; F. Pfeiffer [1]; I. Sneddon şi D. Berry [1], capitolul E; K. Swainger [1]; O. Tedone [2], §§ 14 şi 15; E. Trefftz [3], capitolul 9. Problema existenţei şi unicităţii soluţiilor este studiată, într-un cadru foarte general, de V. Kupradze [1]—[3].

Articole de sinteză, cu bogate indicaţii bibliografice, aparţin lui J. Duval [1] (unde de şoc); V. Gogoladze [1] (cu prezentarea lucrărilor fundamentale ale lui V. Smirnov şi S. Sobolev); J. Goodier [4], §§ 10—12; R. Hill [6]; J. Miklowitz [1]; N. Zvolinski [1] (medii neomogene, medii-sandwich, difracţie). Teoria neliniară este analizată în detaliu de C. Truesdell [5] (vezi şi C. Truesdell şi W. Noll [1], §§ 71—78, 90 şi 102). Vezi de asemenea J. Craggs [1] şi N. Cristescu [1] (corpuri plastice); S. Hunter [1] (corpuri visco-elastice); M. Musgrave [1] (corpuri anizotrope).

Transformările integrale sînt folosite pentru studiul a diferite probleme concrete de către H. Carslaw şi J. Jaeger [1], capitolul 7; W. Nowacki [1] (inclusiv pentru medii visco-plastice şi pentru probleme de termo-elasticitate dinamică); I. Sneddon [1], capitolul 4 şi § 9.50.

Pentru problema propagării undelor elastice în bare şi plăci, vezi indicaţiile date în § 5.1, pag. 165 şi § 6.1, pag. 349.

Pentru chestiunile legate de seismologie, inclusiv chestiunea undelor ce se propagă în vecinătatea frontierei unei sfere sau a unui semi-spaţiu, vezi K. Bullen [1]; M. Ewing şi F. Press [1]; M. Hayes şi R. Rivlin [1] (teorie neliniară).

Pentru problemele privind în special oscilaţiile elastice, vezi V. Kupradze [1]; W. Nowacki [1], capitolul 12; Iu. Panovko şi I. Gubanova [1] (partea a doua).

CAPITOLUL 5

PROBLEMA ANTIPLANĂ

§ 1. GENERALITĂȚI

Din cele mai vechi timpuri au găsit utilizare corpuri ca bare, cabluri, lanțuri etc. Forma lor cilindrică a făcut posibilă calcularea stării lor de solicitare, prin reducerea datelor problemei la date relative la o linie geometrică simplă în care era presupus concentrat materialul. Problemele relative la astfel de corpuri pot fi numite *unidimensionale*. Studiul lor a stat la originile rezistenței materialelor și ulterior a constituit un adevărat „laborator de încercări" pentru metodele generale ale teoriei elasticității.

Ne vom ocupa aci de cele mai simple probleme din această categorie : *studiul micilor deplasări și micilor deformații ale barelor cilindrice zvelte, izotrope și omogene, cu suprafața laterală liberă.*

Probleme apropiate, ca studiul barelor necilindrice; studiul marilor deplasări ale barelor cilindrice; flambajul barelor; torsiunea și încovoierea barelor neomogene sau anizotrope; echilibrul barelor curbe, al barelor cu pereți subțiri, al barelor solicitate pe suprafața laterală, și altele, rămîn înafara acestui cadru.

Pentru studiul acestor chestiuni, vezi de exemplu N. Beliaev [2], capitolele 12–20, 30 și 31; Gh. Buzdugan [1], capitolele 2, 5, 6, 7 ; G. Djanelidze [4], [5]; J. Geckeler [1], capitolele 2–5 și 10; P. Germain [1], capitolul 9 și § 10.2; R.L'Hermite [1], capitolele 5–7; A. Love [1], capitolele 16, 18, 19 și 21; A. Lurie [4], capitolul 7; N. Mushelișvili [5], capitolul 7; E. Popov [1]; Iu. Rabotnov [2], capitolele 10 și 11; K. Solianik-Krasa [1]; G. Valov [1], [2]. Teoria modernă neliniară a corpurilor numite „orientate" (bare, plăci) e considerată în detaliu de J. Eisley [1]; J. Ericksen și C. Truesdell [1]; A. Green [1]; C. Truesdell și R. Toupin [1], §§ 60–64. Pentru studiul barelor cu pereți subțiri, vezi J. Nowinski [2]. Pentru structurile formate din bare, vezi J. Argyris [1].

Pentru problemele dinamice (propagarea undelor elastice în bare) vezi articolele de analiză ale lui H. Abramsohn et al. [1]; W. Green [1]; J. Miklowitz [2] (cele două din urmă avînd ca punct de plecare lucrările clasice ale lui L. Pochhammer [1], [2] și Ch. Chree [1]–[3], și mergînd pînă la rezultatele cele mai recente); R. Rosenfeld și J. Miklowitz [1]. Vezi încă și V. Uteșeva [1]; R. Rosenfeld și J. Miklowitz [2].

Din punct de vedere matematic, problemele unidimensionale sînt precedate de problemele elementare (vezi finele § 4.9). Asupra unora din ele ne vom opri în cele ce urmează. Pentru alte exemple, vezi I. Sokolnikoff [2], §§ 33–34; S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 10.

Timp îndelungat (la G. Galilei, J. Bernoulli, L. Euler) studiul problemelor privitoare la bare și alte corpuri similare, nu a fost legat de cel

al ecuațiilor elasticității. Primele încercări de a construi teoria barelor dintr-un punct de vedere riguros aparțin lui C. Coulomb, L. Navier, A. Cauchy. Dar abia B. de Saint-Venant [1], [2] (retipărit în [4]) a abordat cu succes chestiunea[1]). Pentru ansamblul acestor chestiuni, se păstrează și azi în literatură numele de problema lui *Saint-Venant*. Denumirea de *problemă antiplană* își va găsi justificarea în § 3, pag. 173.

Chiar și cele mai simple din problemele referitoare la barele cilindrice zvelte au mare importanță practică : arbori de transmisie, numeroase elemente de construcții (traverse, tuburi), în primă aproximație chiar un pod în ansamblul său, un baraj, o navă, un fuselaj sau o aripă de avion — pot fi privite ca corpuri cilindrice zvelte.

Problema antiplană permite abordarea, într-un cadru relativ simplu, a ecuațiilor teoriei, făcîndu-ne să înțelegem unele din proprietățile lor generale. În particular, ea permite utilizarea sistematică a metodei semiinverse și a principiului lui Saint-Venant.

În esență problema antiplană conduce la probleme Dirichlet sau Neumann pentru ecuația lui Laplace în două variabile. Dezvoltarea modernă a subiectului utilizează aparatul teoriei funcțiilor de o variabilă complexă — ceea ce a fost prevăzut încă de Saint-Venant, dar a luat proporțiile actuale grație rezultatelor lui N. Mushelișvili [5], capitolul 7 (pentru problema torsiunii) și R. Capildeo [1] și L. Milne-Thomson [1], [3] (problema încovoierii). Menționăm și importantele rezultate ale lui D. Șerman [7]—[9] pe linia utilizării ecuațiilor integrale. În legătură cu unele aspecte aplicative, este utilă consultarea unor cărți de rezistența materialelor : N. Beliaev [2]; Gh. Buzdugan [1]; M. Filonenko-Borodici et al. [1]; A. Iliușin și V. Lenskii [1]; R. L'Hermite [1]; Iu. Rabotnov [2]. Din literatura generală, vezi capitolele corespunzătoare în tratatele lui I. Sokolnikoff [2], S. Timoșenko și J. Goodier [1].

În cele ce urmează vom prezenta problema antiplană ca un ansamblu unitar. Acest punct de vedere (L. Solomon [8], [9]) o apropie totodată de studiul problemei plane. Vom face uz de ecuațiile în tensiuni, ceea ce prezintă avantaje clare în comparație cu ecuațiile în deplasări. Într-adevăr, ecuațiile de echilibru rămîn valabile pentru corpuri anizotrope, ne-omogene, chiar pentru corpuri în stare plastică. Iar aceasta deschide diferite perspective de generalizare, prin simpla înlocuire a ecuațiilor de compatibilitate cu relațiile corespunzătoare fiecărui caz de tratat. (Vezi de exemplu L. Milne-Thomson [3], cap. 6 și 7 ; vezi și R. Schile și R. Sierakowski [1]; E. Socs [1]; pentru problema plană, vezi punctul de vedere similar în § 6.6, pag. 388).

---

[1]) Lucrărilor lui Saint-Venant le-au urmat cercetări analoge asupra problemelor bidimensionale (plăci subțiri, plane și curbe), fiind astfel asimilate de teoria elasticității probleme a căror soluție era dată pînă atunci numai în cadrul rezistenței materialelor.

§ 2. FORMA ŞI SOLICITAREA BAREI CILINDRICE ZVELTE

a) Notaţii

Să considerăm o bară cilindrică omogenă şi izotropă, supusă acţiunii unui sistem de sarcini superficiale aplicate pe secţiunile de capăt (baze), şi avînd suprafaţa laterală liberă. Orice secţiune normală a barei constituie

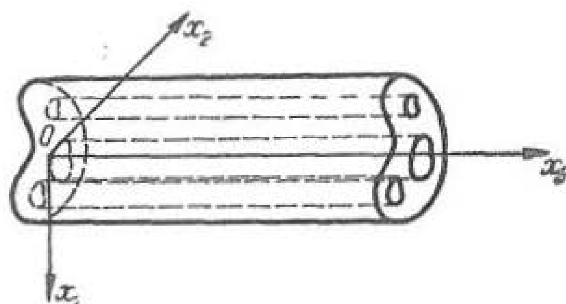


Fig. 5.2.1

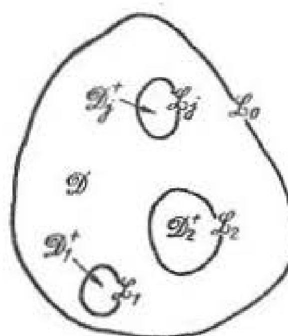


Fig. 5.2.2

un domeniu bidimensional $\mathscr{D}$, mărginit, de frontieră $\mathscr{L}$. Această secţiune se numeşte şi *profil*. (Vezi şi § A.3.) Dimensiunile bazelor sînt mici în raport cu lungimea barei : $d(\mathscr{D}) \ll l$. Forţele de volum sînt presupuse nule.

Axa Ox_3, este paralelă cu generatoarele ; originea O va fi situată pe una din baze, astfel că ecuaţiile acestora vor fi $x_3 = 0$ şi $x_3 = l$. Sistemul de axe este drept.

Toate secţiunile $x_3 =$ const. se vor nota — cînd nu e cazul să distingem — cu $\mathscr{D}$. Prin „origine'' şi „axe'' în $\mathscr{D}$, vom înţelege proiecţia originii şi a axelor pe domeniul $\mathscr{D}$.

b) Sarcina

Presupunerea $F = 0$ corespunde faptului că adesea efectul forţelor de volum (mai ales al forţei gravitaţionale) e neglijabil faţă de efectul solicitărilor pe baze.

După principiul lui Saint-Venant (vezi § 4.6), dacă înlocuim forţele date pe baze printr-un sistem static echivalent, starea elastică a barei zvelte se modifică numai în apropierea bazelor. Aşadar, depărtarea de baze joacă un rol egalizator, apropiind deplasările şi tensiunile de anumite valori-standard, care corespund unor *anumite* distribuţii a tensiunilor pe baze, şi permit rezolvarea exactă a ecuaţiilor elasticităţii. Structura acestor soluţii-standard depinde *în primul rînd* de forma domeniului $\mathscr{D}$.

În acest sens, vom *caracteriza* forțele superficiale nu cu ajutorul unei densități de sarcină (4.2.2) pe baze, ci prin rezultanta $\mathcal{R}$ și momentul rezultant $\mathcal{M}$ al acestei sarcini în raport cu un punct oarecare (x_1^r, x_2^r, l).

Vom ignora deci distribuția reală a sarcinii, de altfel greu de măsurat efectiv, și ne vom fixa atenția asupra *torsorului* ei. Prevenim că *în acest sens* vom vorbi despre bara acționată de o forță normală, de un cuplu etc.; acesta este un mod de a vorbi care nu indică de fel că am avea de-a face cu sarcini concentrate.

Să amintim aci unele proprietăți ale sistemelor de forțe (vezi de ex. V. Vâlcovici et al. [1], cap. 4; Ch. de la Vallée-Poussin [1], §§ 24, 25 și 185).

Un sistem de forțe poate fi redus la sistemul format dintr-o forță $\mathcal{R}$ egală cu rezultanta sistemului și aplicată într-un punct $\boldsymbol{x}$, și un cuplu de moment $\mathcal{M}$, egal cu momentul rezultant al sistemului în raport cu același punct $\boldsymbol{x}$ (centrul de reducere). Schimbînd punctul $\boldsymbol{x}$ cu $\boldsymbol{x}'$, rezultanta rămîne neschimbată, dar momentul rezultant se modifică cu cantitatea $+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\times\mathcal{R}$. Dacă $\boldsymbol{x}$ se deplasează pe suportul lui $\mathcal{R}$, momentul rezultant nu se schimbă.

Produsul scalar $\mathcal{R}\cdot\mathcal{M}$ nu depinde de alegerea centrului de reducere. Dacă $\mathcal{R}=0$, atunci nici $\mathcal{M}$ nu depinde de această alegere.

Există o dreaptă (*axa centrală* a sistemului) paralelă cu $\mathcal{R}$ și definită prin aceea că momentul $\mathcal{M}$ în raport cu orice punct $\boldsymbol{x}$ de pe această axă este paralel cu $\mathcal{R}$, și are modulul minim. Ecuațiile acestei drepte sînt evident

$$\frac{\mathcal{M}_1^0-(x_2\mathcal{R}_3-x_3\mathcal{R}_2)}{\mathcal{R}_1}=\frac{\mathcal{M}_2^0-(x_3\mathcal{R}_1-x_1\mathcal{R}_3)}{\mathcal{R}_2}=\frac{\mathcal{M}_3^0-(x_1\mathcal{R}_2-x_2\mathcal{R}_1)}{\mathcal{R}_3}, \quad (1)$$

unde $\mathcal{M}_1^0$, $\mathcal{M}_2^0$, $\mathcal{M}_3^0$ sînt componentele momentului rezultant față de originea O.

Dacă $\mathcal{R}\neq 0$, și dacă pentru un punct oarecare avem $\mathcal{R}\perp\mathcal{M}$, atunci pe axa centrală $\mathcal{M}=0$ (căci $\mathcal{R}\cdot\mathcal{M}=0$, și pe axa centrală $\mathcal{M}\parallel\mathcal{R}$). În acest caz, sistemul este deci static echivalent cu o forță aplicată într-un punct oarecare al axei centrale, și dirijată în lungul acesteia; axa centrală însăși poate fi acum definită ca loc al punctelor în raport cu care $\mathcal{M}=0$.

Cele de mai sus sugerează construcția următoare. Să descompunem fiecare forță ce acționează pe baza $x_3=l$, într-o componentă tangențială și una normală. Sistemul sarcinilor tangențiale are deci o rezultantă $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, 0)$ și un moment rezultant $(0,0,\mathcal{M}_3)$. Pe de altă parte, sistemul sarcinilor normale are o rezultantă $(0,0,\mathcal{R}_3)$ și un moment rezultant $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, 0)$. Pentru ambele sisteme, momentul rezultant este perpendicular pe rezultantă; deci, dacă rezultantele sînt diferite de zero, ambele sisteme sînt static echivalente cu cîte o forță dirijată în lungul unei drepte din planul bazei, respectiv perpendicular pe acest plan. (În general, aceste drepte nu sînt concurente.)

Din (1) pentru $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 0$, obținem ecuațiile axei centrale pentru sistemul sarcinilor normale:

$$\mathcal{M}_1^0 - x_2\mathcal{R}_3 = 0, \quad \mathcal{M}_2^0 + x_1\mathcal{R}_3 = 0 \tag{2}$$

(o paralelă la Ox_3, dusă prin punctul $-\mathcal{M}_2^0/\mathcal{R}_3, \mathcal{M}_1^0/\mathcal{R}_3$).

Pentru sistemul sarcinilor tangențiale găsim

$$\mathcal{R}_2x_1 - \mathcal{R}_1x_2 - \mathcal{M}_3^0 = 0, \quad x_3 = \text{const.} \tag{3}$$

(o dreaptă în planul secțiunii).

După cum vom vedea, problemele corespunzătoare acestor două sisteme de forțe sînt *esențial* diferite între ele.

Baza $x_3 = 0$ trebuie evident să fie supusă unor sarcini care, împreună cu cele de pe baza $x_3 = l$, să formeze un sistem echivalent cu zero.

Dacă baza $x_3 = l$ este solicitată de un sistem avînd rezultanta $\mathcal{R}$ și momentul rezultant $\mathcal{M}^0$ față de originea din planul ei, atunci pe baza $x_3 = 0$ trebuie să fie aplicat un sistem de forțe de rezultantă $-\mathcal{R}$ și de moment rezultant avînd componentele $(-\mathcal{M}_1^0 + l\mathcal{R}_2, -\mathcal{M}_2^0 - l\mathcal{R}_1, -\mathcal{M}_3^0)$ față de origine. Vom spune că baza $x_3 = 0$ este *fixată*[2]). Sînt frecvente cazurile în care ea este supusă la sarcini cu caracterul unor reacțiuni (de pildă baza $x_3 = 0$ fixată într-un corp masiv, rigid sau nu).

c) *Stări de deformație ale barei*

Ne vom fixa atenția asupra cantităților u_i, ε_{ij}, σ_{ij} considerate în secțiunile normale $x_3 = \text{const.}$ ale barei, pe care le vom numi pe scurt *secțiuni*. Cu ajutorul formulelor din capitolele 1–3 putem calcula deplasările, deformațiile și tensiunile în orice punct, după orice direcție, și pe orice element de suprafață.

În fiecare punct al unei secțiuni se pot pune în evidență cele trei componente ale deplasării; în vecinătatea fiecărui punct, se pot considera cele trei componente ale rotației locale. Întrucît $d(\mathscr{D}) \ll l$, este firesc să caracterizăm *comportarea de ansamblu a secțiunilor* prin *mediile* acestor mărimi. Aceste medii — notate cu un indice „m" — sînt integrale pe $\mathscr{D}$ ale mărimilor corespunzătoare, raportate la aria D.

Întrucît nu ne interesează deplasările rigide ale barei, ci numai deplasările și rotațiile secțiunilor *unele în raport cu altele* (deplasări și rotații *relative*), rezultă că va trebui să calculăm derivatele în raport cu x_3 ale mărimilor considerate. Derivarea în raport cu x_3 se poate efectua sub semnul integralelor în raport cu $dx_1\, dx_2$ (mărime ce se va nota dD).

Astfel sîntem conduși la a considera *patru stări distincte*.

---

[2]) Aceasta nu coincide cu noțiunea de porțiune fixă a frontierei, în sensul din § 4.2, punctul *b*. Vezi și mai departe § 5.6, pag. 186.

1° Dacă secțiunile se deplasează în medie unele față de altele în lungul axei Ox_3 a barei, așadar dacă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\frac{1}{D}\iint_{\mathscr{D}} u_3\,\mathrm{d}D = \varepsilon_{33}^{m} \neq 0, \tag{4}$$

vom spune că ele sînt supuse la *întindere* sau *compresiune*, după cum $\varepsilon_{33}^{m} > 0$ sau $\varepsilon_{33}^{m} < 0$.

Deplasarea în medie a secțiunilor unele față de altele după direcțiile Ox_1, respectiv Ox_2, impune considerarea integralelor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\frac{1}{D}\iint_{\mathscr{D}} u_1\,\mathrm{d}D, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\frac{1}{D}\iint_{\mathscr{D}} u_2\,\mathrm{d}D.$$

Aceste deplasări provin însă din suprapunerea a *două* fenomene. Pe de o parte, deplasarea u_1 (sau u_2) poate varia de la o secțiune la alta pentru că secțiunile *alunecă* unele față de altele, rămînînd paralele între ele; pe de altă parte ele se pot *roti* în jurul unor axe (paralele cu Ox_2, respectiv Ox_1). Cel dintîi este un fenomen de deformație. Dar cel de al doilea apare și în cazul unei deplasări rigide (rotația corpului în bloc conduce la derivate $u_{1,3}$ și $u_{2,3}$ diferite de zero și constante : vezi de exemplu (1.9.16)).

Astfel, sîntem conduși să considerăm descompunerile

$$u_{1,3} = \varepsilon_{13} + \omega_{13}, \quad u_{2,3} = \varepsilon_{23} + \omega_{23}$$

(vezi (1.5.6)); să reținem drept caracteristice ale anumitor stări ale secțiunilor alunecările medii : și să calculăm *derivatele* în raport cu x_3 ale rotațiilor medii. De aci decurg definițiile 2° și 3°.

2° Dacă secțiunile sînt supuse la deplasări medii relative (din care am eliminat eventuali termeni proveniți din rotațiile locale) nenule paralele cu axele Ox_1, respectiv Ox_2, adică dacă

$$\begin{aligned} \frac{1}{2D}\iint_{\mathscr{D}} (u_{1,3} + u_{3,1})\,\mathrm{d}D &= \varepsilon_{13}^{m} \neq 0, \\ \frac{1}{2D}\iint_{\mathscr{D}} (u_{2,3} + u_{3,2})\,\mathrm{d}D &= \varepsilon_{23}^{m} \neq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

atunci vom spune că ele sînt supuse la *alunecare* (sau *forfecare*).

3° Dacă secţiunile sînt supuse la rotiri medii relative în jurul unor axe paralele cu Ox_2, respectiv Ox_1, adică dacă

$$\frac{1}{2D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\iint_{\mathscr{D}}(u_{1,3}-u_{3,1})\,\mathrm{d}D=\omega^m_{13.3}\neq 0,$$
$$\frac{1}{2D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\iint_{\mathscr{D}}(u_{2,3}-u_{3,2})\,\mathrm{d}D=\omega^m_{23.3}\neq 0, \tag{6}$$

atunci vom spune că ele sînt supuse la *încovoiere*.

4° În fine, similar cu (6), dacă secţiunile se rotesc în medie unele faţă de altele în jurul unor axe paralele cu Ox_3, aşadar dacă

$$\frac{1}{2D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\iint_{\mathscr{D}}(u_{1,2}-u_{2,1})\,\mathrm{d}D=\omega^m_{12.3}\neq 0, \tag{7}$$

atunci vom spune că ele sînt supuse la *torsiune*.

În general, vom avea de calculat parametrii ε^m_{31}, $\omega^m_{12.3}$, $\omega^m_{31.3}$ şi $\omega^m_{32.3}$ — aşadar mărimile din (4), (5), (7), şi cantităţile din (6) cu semnul schimbat. Aceşti parametri pot fi priviţi drept caracteristice ale „ratelor” relative de deplasare şi rotire ale secţiunilor. Semnificaţia lor este ilustrată de figură :

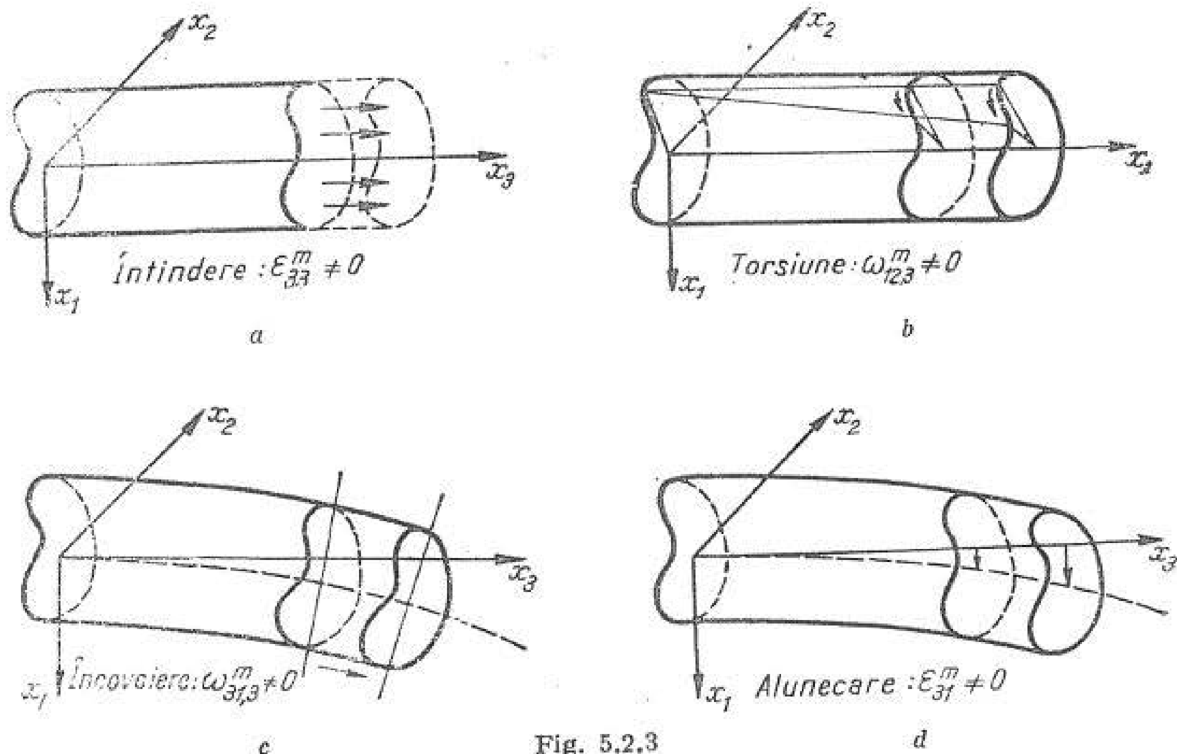


Fig. 5.2.3

În practică, aceste stări se întîlnesc *suprapuse*. Studiul lor separat are sens numai în cadrul unei teorii liniare. (Vezi § 4.2, pag. 129.)

§ 3. ECUAȚIILE PROBLEMEI ANTIPLANE

a) Ecuații și ipoteze de lucru

Începem prin a reaminti aci ecuațiile statice omogene (4.1.2)

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{1}$$

și ecuațiile de compatibilitate omogene ce rezultă din (4.9.6):

$$\Delta \sigma_{ij} + (1 + \nu)^{-1}\, \Theta_{,ij} = 0, \qquad (\Theta = \sigma_{kk}). \tag{2}$$

Vom face uz de legea lui Hooke sub forma (3.4.19):

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk})\right], \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} = \frac{1}{2\mu}\,\sigma_{ij}, \tag{3}$$

unde i, j, k iau valorile 1, 2, 3 sau permutări circulare ale lor.

Ecuațiile geometrice (4.1.1)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{4}$$

vor fi întotdeauna integrabile. Componentele rotației sînt date de (1.5.5)

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \tag{5}$$

În fine, amintim încă relațiile lui Cauchy (2.3.3)

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j. \tag{6}$$

Întrucît ne referim mereu la secțiuni normale, vom scrie simplu „tensiune într-un punct", subînțelegînd tensiunea *pe elementul de normală* Ox_3 ce conține acel punct.

Din (6) se obțin condițiile la limită. Pentru $x_3 = l$ avem

$$\sigma_{31} = f_1, \quad \sigma_{32} = f_2, \quad \sigma_{33} = f_3, \tag{7}$$

unde cunoaștem numai rezultanta și momentul rezultant corespunzător acestor sarcini.

Pe suprafața laterală avem $n_3 = 0$, sau, întrucît această suprafață este liberă:

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = 0, \;\; \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 = 0, \;\; \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0. \tag{8}$$

Pe baza $x_3 = 0$, condițiile sînt de același tip cu (7); în fapt, ele nu vor fi utilizate (vezi mai departe, § 10).

Problema antiplană constă în rezolvarea sistemului (1), (2) cu condițiile la limită (8) și cu cele ce vor rezulta din (7).

Configurația specială a corpului, și faptul că suprafața laterală este liberă, sugerează posibilitatea de a neglija anumite componente ale tensiunii. Astfel, pe direcții paralele cu Ox_1 sau Ox_2, este evident că pe frontieră avem $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$. Întrucît avem $d(\mathscr{D}) \ll l$, nu ne putem aștepta la apariția de astfel de componente ale tensiunii cu valori importante în interior. În schimb, componentele σ_{3i} nu pot fi neglijate, întrucît aceasta ar contrazice condițiile (7). De aci urmează, *ca ipoteză de lucru*, presupunerea — pe care o vom numi *ipoteza lui Clebsch* —:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0. \tag{9}$$

Din (2.5.14) se vede că starea prezumată este o *stare de tensiune antiplană.*

Ipoteza (9) echivalează cu admiterea unui anumit *model* al barei: se presupune că bara este alcătuită din fibre longitudinale, fibre care pot fi supuse la întindere și compresiune (întrucît σ_{33} nu este identic nulă), și care sînt solidare între ele în sens longitudinal (întrucît în genere σ_{31} și σ_{32} nu sînt identic nule, așadar fibrele nu pot aluneca liber unele pe celelalte). În schimb, se neglijează tensiunile normale (transversale) între fibre, precum și tensiunile de alunecare σ_{12} (în virtutea micii grosimi a barei și a absenței de sarcini pe suprafața laterală, care ar putea genera astfel de tensiuni).

Alegerea acestui model constituie desigur o simplificare a repartiției reale a tensiunilor — simplificare totuși mai puțin grosieră decît cele acceptate de rezistența materialelor.

A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], capitolul 2, au încercat să justifice relațiile (9). Dar cea mai puternică justificare a acestei ipoteze o constituie faptul că cu ajutorul ei se găsește soluția problemei — *unică* în virtutea teoremei lui Kirchhoff pentru un *anumit* sistem de sarcini static echivalent cu (7), și pe care, în virtutea principiului lui Saint-Venant, o putem accepta și pentru sistemul (7) dat. (Amintim că lucrările lui Saint-Venant sînt *anterioare* teoremei lui Kirchhoff.)

OBSERVAȚIE. Problema cilindrului zvelt solicitat la capete este numai *o realizare* a stării antiplane. Se pot da *definiții* ale acestei stări, ceva mai generale decît (9), utile mai cu seamă în cazul corpurilor anizotrope (vezi L. Milne-Thomson [3], § 2.01), și se pot considera probleme antiplane de altă natură (ibid., § 3.8).

b) Descompunerea sistemului de ecuații

Să examinăm acum sistematic urmările ipotezei (9).

Ținînd seama de ea în ecuațiile (1), obținem

$$\sigma_{31,3} = 0, \quad \sigma_{32,3} = 0, \quad \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0, \tag{10}$$

de unde conchidem că σ_{31} și σ_{32} sînt funcții numai de x_1, x_2, iar σ_{33} este o funcție liniară de x_3.

Întrucît acum avem $\Theta = \sigma_{33}$, trei din ecuaţiile (2) se reduc la

$$\sigma_{33,11} = 0, \quad \sigma_{33,22} = 0, \quad \sigma_{33,12} = 0, \tag{11}$$

de unde conchidem că σ_{33} este totodată liniară în x_1 şi x_2, şi nu conţine termen în $x_1 x_2$. Prin urmare, avem

$$\sigma_{33} = a_1 x_1 x_3 + a_2 x_2 x_3 + a_3 x_1 + a_4 x_2 + a_5 x_3 + a_6, \tag{12}$$

unde a_i sînt constante reale, încă necunoscute.

În locul termenilor în x_3 (nuli pe baza $x_3 = 0$), să punem în evidenţă termeni în $x_3 - l$ (nuli pe baza $x_3 = l$). Să punem în evidenţă şi coordonatele (x_1^0, x_2^0) ale centrului de greutate al secţiunilor. Cu aceasta (12) devine

$$\sigma_{33} = (x_3 - l)\,[\alpha_1(x_1 - x_1^0) + \alpha_2(x_2 - x_2^0)] + \beta_1(x_1 - x_1^0) + \beta_2(x_2 - x_2^0) + \beta_3, \tag{13}$$

unde termenul de forma $\alpha_3(x_3 - l)$ lipseşte : un astfel de termen ar corespunde unei sarcini nule pe baza $x_3 = l$, şi constante şi diferite de zero pe baza $x_3 = 0$, aşadar unei sarcini sub acţiunea căreia bara nu se poate afla în echilibru.

Ecuaţia (2) pentru $i = j = 3$ rezultă acum verificată identic.

Introducînd (13) în cele două ecuaţii (2) ce mai rămîn, precum şi în a treia ecuaţie (10), obţinem în definitiv un sistem de trei ecuaţii :

$$\begin{gathered} \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \alpha_1(x_1 - x_1^0) + \alpha_2(x_2 - x_2^0) = 0, \\ \Delta\sigma_{31} + (1+\nu)^{-1}\alpha_1 = 0, \quad \Delta\sigma_{32} + (1+\nu)^{-1}\alpha_2 = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

unde σ_{31}, σ_{32} sînt funcţii de x_1, x_2.

Sistemul complet (1), (2) a fost astfel descompus într-un sistem pentru σ_{33} — permiţînd determinarea sa sub forma elementară (13)— , şi sistemul (14).

Ecuaţiile fizico-geometrice se obţin introducînd relaţiile geometrice (4) în legea lui Hooke (3) şi ţinînd seama de ipoteza (9) :

$$\begin{gathered} u_{1,1} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{33}, \quad u_{2,2} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{33}, \quad u_{3,3} = \frac{1}{E}\sigma_{33}, \\ u_{1,2} + u_{2,1} = 0, \quad u_{2,3} + u_{3,2} = \frac{1}{\mu}\sigma_{32}, \quad u_{3,1} + u_{1,3} = \frac{1}{\mu}\sigma_{31}. \end{gathered} \tag{15}$$

Integrarea ecuaţiilor (15) este întotdeauna posibilă.

Condițiile la limită se obțin introducînd (9) în (8), și ținînd seama că sînt cunoscute rezultanta și momentul rezultant al funcțiilor (7). Din (8) se obține o singură condiție relativă la funcțiile din (14):

$$\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 = 0. \tag{16}$$

Întrucît funcțiile din (14), coeficienții, și condiția (16) sînt evident independente de x_3, rezultă că problema integrării sistemului (14) cu condiția la limită (16) poate fi studiată *în secțiunea $\mathscr{D}$ a barei*, iar condiția la limită (16) trebuie să fie verificată pe $\mathscr{L} = \mathrm{fr}\ \mathscr{D}$. (Dimpotrivă, variabila x_3 este prezentă în (15).)

Pentru a putea utiliza datele la limită (7), să calculăm rezultanta și momentul rezultant al tensiunilor ce apar pe baza $x_3 = l$, sau chiar, mai general, pe o secțiune oarecare $x_3 = \mathrm{const}$.

Vom nota componentele rezultantei cu

$$\mathscr{R}_i = \iint_{\mathscr{D}} \sigma_{3i}\, \mathrm{d}D, \quad i = 1, 2, 3; \tag{17}$$

componentele momentului rezultant în raport cu un centru de reducere (x_1^r, x_2^r, x_3^r) vor fi

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_1^r &= \iint_{\mathscr{D}} [(x_2 - x_2^r)\, \sigma_{33} - (x_3 - x_3^r)\, \sigma_{32}]\, \mathrm{d}D, \\
\mathscr{M}_2^r &= \iint_{\mathscr{D}} [(x_3 - x_3^r)\, \sigma_{31} - (x_1 - x_1^r)\, \sigma_{33}]\, \mathrm{d}D, \\
\mathscr{M}_3^r &= \iint_{\mathscr{D}} [(x_1 - x_1^r)\, \sigma_{32} - (x_2 - x_2^r)\, \sigma_{31}]\, \mathrm{d}D.
\end{aligned} \tag{18}$$

Aceste integrale se calculează ușor pe *orice* secțiune $\mathscr{D}$, întrucît σ_{31}, σ_{32} nu depind de x_3, iar termenul funcție de x_3 din σ_{33} iese în factor.

Vom alege *întotdeauna* centrul de reducere în chiar secțiunea pe care acționează tensiunile considerate. Luînd deci $x_3^r = x_3$ în (18) obținem

$$\begin{aligned}
&\mathscr{M}_1(x_3) = \iint_{\mathscr{D}} (x_2 - x_2^r)\, \sigma_{33}\, \mathrm{d}D, \quad \mathscr{M}_2(x_3) = -\iint_{\mathscr{D}} (x_1 - x_1^r)\, \sigma_{33}\, \mathrm{d}D, \\
&\mathscr{M}_3 = \iint_{\mathscr{D}} [(x_1 - x_1^r)\, \sigma_{32} - (x_2 - x_2^r)\, \sigma_{31}]\, \mathrm{d}D.
\end{aligned} \tag{19}$$

$\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{R}_2$ depind evident de σ_{31}, σ_{32}. Pentru determinarea lor, nu este însă necesară rezolvarea sistemului (14). Într-adevăr, înmulțind prima ecuație (14) cu x_1 și integrînd pe $\mathcal{D}$, avem

$$\iint_{\mathcal{D}} [(x_1 \sigma_{31})_{,1} + (x_2 \sigma_{32})_{,2} - \sigma_{31}] \, \mathrm{d}D + \alpha_1 \iint_{\mathcal{D}} x_1 (x_1 - x_1^0) \, \mathrm{d}D +$$

$$+ \alpha_2 \iint_{\mathcal{D}} x_1 (x_2 - x_2^0) \, \mathrm{d}D = 0. \quad (20)$$

Ținînd seama aci de formula lui Riemann-Ostrogradski (A.3.18), obținem o integrală care este nulă în virtutea condiției (16). Utilizînd formulele (A.3.6), (A.3.9) și (A.3.5), putem pune în evidență momentele centrale de inerție ale secțiunii. Cu aceasta, (20) și (17) dau

$$\mathcal{R}_1 = \alpha_1 I_{22} + \alpha_2 I_{12} . \quad (21)$$

Înmulțind prima ecuație (14) cu x_2 și integrînd pe $\mathcal{D}$, căpătăm, după calcule asemănătoare,

$$\mathcal{R}_2 = \alpha_1 I_{12} + \alpha_2 I_{11} . \quad (22)$$

Pentru a treia componentă din (17), obținem ușor — utilizînd (13), (A.3.4) și (A.3.5):

$$\mathcal{R}_3 = \beta_3 D . \quad (23)$$

Prin urmare, rezultanta tensiunilor pe *orice* secțiune este independentă de x_3, iar mărimile $\mathcal{R}_i$ sînt cunoscute din (7).

Nici pentru calcularea componentelor $\mathcal{M}_1(x_3)$ și $\mathcal{M}_2(x_3)$ nu este necesară rezolvarea sistemului (14). Introducînd (13) și (17) pentru $i = 3$ în expresia (19) a lui $\mathcal{M}_1(x_3)$, sîntem conduși la a calcula aceleași momente de inerție ca în (22); ținînd seama de (22), obținem

$$\mathcal{M}_1(x_3) = (x_3 - l) \mathcal{R}_2 + (\beta_1 I_{12} + \beta_2 I_{11}) - (x_2^r - x_2^0) \mathcal{R}_3 . \quad (24)$$

Tot astfel deducem și

$$\mathcal{M}_2(x_3) = -(x_3 - l) \mathcal{R}_1 - (\beta_1 I_{22} + \beta_2 I_{12}) + (x_1^r - x_1^0) \mathcal{R}_3 . \quad (25)$$

În fine, a treia formulă (19) se scrie

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3^0 - \mathcal{R}_2 x_1^r + \mathcal{R}_1 x_2^r, \quad \text{cu } \mathcal{M}_3^0 = \iint_{\mathcal{D}} (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) \, \mathrm{d}D. \quad (26)$$

Această relație exprimă numai legătura dintre componenta după Ox_3 a momentului rezultant pentru un centru de reducere oarecare, și momentul $\mathcal{M}_3^0$ față de originea $(0, 0, x_3)$. Dacă punctul (x_1^r, x_2^r, x_3) este situat pe axa centrală (2.3), avem $\mathcal{M}_3 = 0$, ceea ce era de așteptat.

Mărimile $\mathcal{M}_1(x_3)$, $\mathcal{M}_2(x_3)$ nu sînt cunoscute. Notînd însă

$$\mathcal{M}_1(l) = \mathcal{M}_1, \quad \mathcal{M}_2(l) = \mathcal{M}_2, \tag{27}$$

este limpede că $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ sînt componentele momentului rezultant al sarcinii f_i din (7), aşadar sînt mărimi cunoscute.

Cele cinci relaţii (21) – (25) permit determinarea constantelor $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Pentru aceasta este suficient să luăm $x_3 = l$ în (24) şi (25), şi să ţinem seama de (27).

Cu aceasta, 5 din cele 6 condiţii date sub formă integrală pe baza $x_3 = l$ sînt folosite, şi ele determină complet σ_{33} sub forma (13). Problema se reduce acum la rezolvarea sistemului (14) pentru tensiunile σ_{31} şi σ_{32}, care trebuie să satisfacă condiţia la limită (16), *şi* condiţia cu caracter integral (26). Aceste funcţii odată găsite, rămîne de integrat sistemul fizico-geometric (15).

§ 4. FORMA ECUAŢIILOR PROBLEMEI ANTIPLANE ÎN VARIABILE COMPLEXE CONJUGATE

a) Ecuaţiile problemei

Întrucît sistemul (3.14) nu depinde de variabila x_3, este firesc să introducem mărimi complexe definite în $\mathcal{D}$, şi să utilizăm sistematic, variabilele complexe conjugate $z, \bar{z}$. Noţiunile de care vom face uz sînt amănunţit prezentate în §§ A.4 – A.11.

Să considerăm deci variabilele complexe

$$z = x_1 + \mathrm{i}\, x_2, \quad \bar{z} = x_1 - \mathrm{i}\, x_2. \tag{1}$$

Pentru anumite puncte, ca de pildă centrul de greutate al secţiunii, sau centrul de reducere al sistemului de forţe, notăm

$$z_0 = x_1^0 + \mathrm{i}\, x_2^0, \quad z_r = x_1^r + \mathrm{i}\, x_2^r. \tag{2}$$

Pe orice curbă $\mathscr{C}$ din domeniul $\mathcal{D}$, avem desigur $z = z(s)$, unde s este abscisa curbilinie pe $\mathscr{C}$. Din (1) urmează evident (vezi şi (A.4.21)):

$$z'(s) = x_1'(s) + \mathrm{i}\, x_2'(s). \tag{3}$$

Vom considera în cele ce urmează constantele complexe

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \mathrm{i}\, \alpha_2, \quad & \beta &= \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2, \\ R &= \mathcal{R}_1 + \mathrm{i}\, \mathcal{R}_2, \quad & M &= \mathcal{M}_1 + \mathrm{i}\, \mathcal{M}_2, \end{aligned} \tag{4}$$

(unde R şi M se numesc *rezultanta complexă*, respectiv *momentul încovoietor complex* al sarcinii exterioare) şi funcţiile

$$M(x_3) = \mathcal{M}_1(x_3) + \mathrm{i}\,\mathcal{M}_2(x_3),$$
$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \sigma_{31}(x_1, x_2) + \mathrm{i}\,\sigma_{32}(x_1, x_2), \tag{5}$$
$$U(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, x_3) = u_1(x_1, x_2, x_3) + \mathrm{i}\,u_2(x_1, x_2, x_3),$$

numite respectiv *momentul complex*, *tensiunea tangenţială complexă* şi *deplasarea tangenţială complexă*.

Acum putem transcrie relaţiile din § 3 sub o formă mult mai compactă.

În primul rînd, formula (3.13) devine

$$\sigma_{33} = \mathrm{Re}\,\{[\alpha(x_3 - l) + \beta](\bar{\mathfrak{z}} - \bar{\mathfrak{z}}_0)\} + \beta_3, \tag{6}$$

sau încă

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(x_3 - l)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c) + \frac{1}{2}(\bar{\beta}\mathfrak{z} + \beta\bar{\mathfrak{z}} - 2d) + \beta_3, \tag{7}$$

unde am notat

$$2c = \bar{\alpha}\mathfrak{z}_0 + \alpha\bar{\mathfrak{z}}_0, \quad 2d = \bar{\beta}\mathfrak{z}_0 + \beta\bar{\mathfrak{z}}_0. \tag{8}$$

Coeficienţii din (6)–(8) sînt cunoscuţi cu ajutorul relaţiilor (3.21)–(3.27). Adunînd egalitatea (3.21) cu (3.22) înmulţită cu i, găsim

$$R = \alpha_1 I_{22} + \mathrm{i}\,\alpha_2 I_{11} + \mathrm{i}\,\bar{\alpha} I_{12},$$

sau încă

$$2R = (\alpha + \bar{\alpha}) I_{22} + (\alpha - \bar{\alpha}) I_{11} + 2\mathrm{i}\,\bar{\alpha} I_{12},$$

de unde, ţinînd seama de expresiile (A.7.25), deducem

$$2R = I_0\,\alpha + I\,\bar{\alpha}. \tag{9}$$

Tot astfel, din (3.24), (3.25) obţinem pentru o secţiune x_3 oarecare

$$2\mathrm{i}M(x_3) = 2(x_3 - l)R + I_0\beta + I\bar{\beta} - 2(\mathfrak{z}_r - \mathfrak{z}_0)\mathcal{R}_3, \tag{10}$$

de unde pe baza $x_3 = l$:

$$2\mathrm{i}M = I_0\beta + I\bar{\beta} - 2(\mathfrak{z}_r - \mathfrak{z}_0)\mathcal{R}_3. \tag{11}$$

Scriind relaţia complex conjugată cu (9), se obţine un sistem în α, $\bar{\alpha}$, a cărui soluţie este

$$\alpha = (2/\delta)(I_0 R - I\bar{R}), \tag{12}$$

unde

$$\delta = I_0^2 - I\bar{I} = 4(I_{11}I_{22} - I_{12}^2). \tag{13}$$

Izolînd în relaţia (11) termenul $l_0 \beta + l \bar{\beta}$, deducem o formulă analogă cu (9): prin urmare, constanta β se obţine din (12), înlocuind R prin $\mathrm{i} M + (\mathfrak{z}_r - \mathfrak{z}_0) \mathcal{R}_3$:

$$\beta = (2/\delta)\,\mathrm{i}\,(l_0 M + l \bar{M}) + (2/\delta)\,[l_0 (\mathfrak{z}_r - \mathfrak{z}_0) - l (\bar{\mathfrak{z}}_r - \bar{\mathfrak{z}}_0)]\, \mathcal{R}_3 \,. \tag{14}$$

În particular, dacă $\mathcal{R}_3 = 0$, sau dacă centrul de reducere este ales în centrul de greutate al bazei ($\mathfrak{z}_r = \mathfrak{z}_0$), relaţia (14) devine

$$\beta = (2/\delta)\,\mathrm{i}\,(l_0 M + l \bar{M}) \,. \tag{15}$$

Împreună cu (3.23), relaţiile (12) şi (14) dau efectiv coeficienţii ce intervin în expresia (7) a componentei σ_{33}.

Toate aceste relaţii sînt independente de constantele elastice ale materialului.

Să trecem la ecuaţiile (3.14). Făcînd uz de definiţiile (4), (5) şi de formulele (A.4.5)–(A.4.7), obţinem sistemul

$$\begin{aligned} & T_{,\mathfrak{z}} + \bar{T}_{,\bar{\mathfrak{z}}} + \frac{1}{2}\,[\bar{\alpha}\,(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0) + \alpha\,(\bar{\mathfrak{z}} - \bar{\mathfrak{z}}_0)] = 0 \,, \\ & T_{,\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}} + \frac{1}{4}\,(1 + \nu)^{-1}\, \alpha = 0 \,, \end{aligned} \tag{16}$$

unde cea dintîi este ecuaţia reală de echilibru, iar cea de-a doua, ecuaţia (complexă) de compatibilitate a problemei.

Ţinînd seama de formulele (A.3.12) şi (3), şi folosind notaţia $\mathfrak{z}|_{\mathscr{L}} = \mathfrak{t}$, condiţia la limită (3.16) (care trebuie înţeleasă în sensul din § 1.1) devine

$$T(\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{t}})\, \bar{\mathfrak{t}}'(s) - \overline{T(\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{t}})}\, \mathfrak{t}'(s) = 0. \tag{17}$$

În fine, singura din condiţiile pe baze care intervin în studiul sistemului (3.14), şi anume condiţia (3.26), ia forma

$$2\,\mathscr{M}_3 = \mathrm{i} \iint_{\mathscr{D}} [\bar{T}\,(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_r) - T\,(\bar{\mathfrak{z}} - \bar{\mathfrak{z}}_r)]\, \mathrm{d}D. \tag{18}$$

Problema se reduce deci la rezolvarea sistemului (16) cu condiţia la limită (17) şi condiţia (18) — care are rolul unei condiţii de normare. Nu putem afirma deocamdată nimic asupra existenţei sau unicităţii soluţiei acestei probleme. Avertizăm numai că sistemul (16) omogen (pentru $\alpha = 0$), cu condiţia la limită de asemenea omogenă (17), *posedă* soluţii nenule.

Să trecem în fine la ecuaţiile fizico-geometrice (3.15). Se observă uşor că componentele u_1, u_2 satisfac ecuaţiile Cauchy-Riemann (A.5.4).

Întrucît ele sînt de clasă C^2, rezultă că ele sînt funcții armonice conjugate, astfel că a treia relație (5) se scrie

$$u_1(x_1, x_2, x_3) + \mathrm{i}\, u_2(x_1, x_2, x_3) = U(\mathfrak{z}, x_3). \tag{19}$$

Din primele două ecuații (3.15) obținem, utilizînd (A.4.5) sau (A.4.6) :

$$U_{,\mathfrak{z}} + \overline{U}_{,\bar{\mathfrak{z}}} = -2(\nu/E)\,\sigma_{33}. \tag{20}$$

Introducînd aci expresia (7) și ținînd seama de (19), putem separa în primul membru un termen funcție de $\mathfrak{z}$ și x_3, iar în cel de al doilea, un termen funcție de $\bar{\mathfrak{z}}$ și x_3:

$$U_{,\mathfrak{z}} + (\nu/E)\,[(x_3 - l)\,\bar{\alpha} + \bar{\beta}]\,\mathfrak{z} - (\nu/E)\,[(x_3 - l)\,c + d - \beta_3] =$$
$$= -\overline{U}_{,\bar{\mathfrak{z}}} - (\nu/E)\,[(x_3 - l)\,\alpha + \beta]\,\bar{\mathfrak{z}} + (\nu/E)\,[(x_3 - l)\,c + d - \beta_3].$$

Valoarea comună a acestor două expresii trebuie să fie o funcție $g(x_3)$, care satisface condiția $g(x_3) = -\overline{g(x_3)}$, așadar este de forma $\mathrm{i}\, f(x_3)$, unde $f(x_3)$ este o funcție reală, necunoscută încă.

În felul acesta, relația (19) se scrie

$$U_{,\bar{\mathfrak{z}}} = 0, \tag{21}$$

iar relația (20) se înlocuiește cu

$$U_{,\mathfrak{z}} = -(\nu/E)\,[(x_3 - l)\,\bar{\alpha} + \bar{\beta}]\,\mathfrak{z} + (\nu/E)\,[(x_3 - l)\,c + d - \beta_3] + \mathrm{i}\, f(x_3). \tag{22}$$

Mai departe, înmulțind a cincea ecuație (3.15) cu i și adunînd-o cu cea de a șasea, obținem

$$U_{,3} = -2\,u_{3,\bar{\mathfrak{z}}} + \mu^{-1}\,T. \tag{23}$$

În sfîrșit, a treia ecuație (3.15) se scrie

$$u_{3,3} = (1/2E)\,(x_3 - l)\,(\bar{\alpha}\,\mathfrak{z} + \alpha\,\bar{\mathfrak{z}} - 2c) + (1/2E)\,(\bar{\beta}\,\mathfrak{z} + \beta\,\bar{\mathfrak{z}} - 2d) + \beta_3/E. \tag{24}$$

Dispunem deci de sistemul ecuațiilor fizico-geometrice sub forma (21)—(24); primele trei din aceste ecuații dau derivatele parțiale ale funcției U în raport cu variabilele $\mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{z}}$, x_3.

b) *Comportarea secțiunilor*

Putem trece acum la caracterizarea comportării de ansamblu a secțiunilor, cu ajutorul criteriilor (2.4)—(2.7). Avem mai întîi

$$\varepsilon_{31} + \mathrm{i}\,\varepsilon_{32} = (1/2\mu)\,T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}), \qquad \varepsilon_{33} = (1/E)\,\sigma_{33}, \tag{25}$$

astfel că, utilizînd (3.17) și (4), obținem

$$\varepsilon_{31}^{m} + \mathrm{i}\,\varepsilon_{32}^{m} = (1/2\,\mu)\,(R/D), \qquad \varepsilon_{33}^{m} = (1/E)\,(\mathcal{R}_3/D)\,. \tag{26}$$

Mai departe, din (A.4.5), avem evident

$$\omega_{31} + \mathrm{i}\omega_{32} = \frac{1}{2}\,[(u_{3,1} - u_{1,3}) + \mathrm{i}\,(u_{3,2} - u_{2,3})] = u_{3,\bar{\mathfrak{z}}} - \frac{1}{2}\,U_{,3}\,,$$

de unde, ținînd seama de (23):

$$\omega_{31} + \mathrm{i}\,\omega_{32} = 2\,u_{3,\bar{\mathfrak{z}}} - (1/2\,\mu)\,T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})\,. \tag{27}$$

Întrucît T nu depinde de x_3, din (27) și (24) avem pe rînd

$$(\omega_{31} + \mathrm{i}\,\omega_{32})_{,3} = 2u_{3,3\bar{\mathfrak{z}}} = (\alpha/E)\,(x_3 - l) + (\beta/E)\,;$$

întrucît aceasta este o mărime constantă pe orice secțiune, ea este egală cu media ei:

$$(\omega_{31}^{m} + \mathrm{i}\,\omega_{32}^{m})_{,3} = (\alpha/E)\,(x_3 - l) + (\beta/E). \tag{29}$$

În fine, formula (A.4.5) permite să scriem

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}\,(u_{1,2} - u_{2,1}) = -\,\mathrm{Im}\,U_{,\mathfrak{z}}\,. \tag{30}$$

Ținînd seama de (22), derivînd în raport cu x_3 și integrînd pe $\mathcal{D}$, căpătăm de aci

$$\omega_{12,3}^{m} = (\nu/E)\,\mathrm{Im}\,(\bar{\alpha}\,\mathfrak{z}_0) - f'(x_3)\,. \tag{31}$$

Formulele (26), (29) și (31) caracterizează starea secțiunilor, chiar fără rezolvarea prealabilă a problemei (cu excepția relației (31), în care intervine $f(x_3)$). Starea de întindere-compresiune depinde numai de existența unei componente $\mathcal{R}_3 \neq 0$, iar cea de alunecare, de existența unei componente $R \neq 0$. Starea de încovoiere depinde de cantitățile α și β, și prin urmare de R, M și $\mathcal{R}_3$. Starea de torsiune poate fi cunoscută numai cunoscînd funcția $f(x_3)$ (vezi mai departe § 8, pag. 201).

Starea de întindere-compresiune, starea de alunecare și acea componentă a stării de încovoiere care depinde numai de M și $\mathcal{R}_3$, nu variază în lungul barei.

Pusă sub această formă, problema antiplană se rezolvă într-un mod unitar. Cazul $T \equiv 0$ este elementar. Dimpotrivă cazul $T \not\equiv 0$ este neelementar și necesită rezolvarea efectivă a sistemului (16).

§ 5. BARA CILINDRICĂ ACȚIONATĂ PE BAZE DE SARCINI NORMALE

În acest cadru intră problema *întinderii* (cea a *compresiunii* diferă de ea numai printr-o schimbare sistematică a semnelor) și *problema încovoierii pure*.

Avem de integrat ecuațiile (4.16) cu condiția la limită (4.17) pe $\mathscr{L} = \mathrm{fr}\,\mathscr{D}$ și cu condiția integrală (4.18) — iar apoi ecuațiile (4.21)—(4.24).

Bara este solicitată pe baza $x_3 = l$ de o sarcină normală, așadar

$$R = \mathscr{M}_3 = 0\,. \tag{1}$$

De aci (vezi și § 2, pag. 169) rezultă că reacțiunile ce apar pe baza fixată sînt static echivalente tot cu o sarcină normală.

Introducînd (1) în (4.12), obținem

$$\alpha = 0\,. \tag{2}$$

Întrucît atît ecuațiile (4.16), cît și condițiile (4.17) și (4.18) sînt în acest caz omogene, sîntem îndemnați să alegem (vezi și (3.26)):

$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) \equiv 0\,. \tag{3}$$

Prin urmare, singura componentă nenulă a tensiunii rămîne

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\bar{\beta}\,\mathfrak{z} + \beta\,\bar{\mathfrak{z}} - 2\,d) + \beta_3 \tag{4}$$

(vezi (4.7)), unde β, β_3, d sînt cunoscute din (4.14), (3.23) și (4.8).

Să trecem la ecuațiile (4.21)—(4.24), unde introducem (2)—(4):

$$U_{,\bar{\mathfrak{z}}} = 0\,, \tag{5}$$

$$U_{,\mathfrak{z}} = -(\nu/E)\,\bar{\beta}\,\mathfrak{z} + (\nu/E)\,(d - \beta_3) + \mathrm{i}\,f(x_3)\,, \tag{6}$$

$$U_{,3} = -2\,u_{3,\mathfrak{z}}\,, \tag{7}$$

$$u_{3,3} = (1/2E)\,(\bar{\beta}\,\mathfrak{z} + \beta\,\bar{\mathfrak{z}} - 2\,d) + (\beta_3/E)\,. \tag{8}$$

Calculînd din (6) și (7) derivata mixtă $U_{,3\mathfrak{z}}$ și egalînd valorile obținute, căpătăm $\mathrm{i}f'(x_3) = -2\,u_{3,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}$.

De aci urmează

$$f'(x_3) = \Delta\,u_3 = 0\,, \tag{9}$$

de unde deducem mai întîi, notînd cu C o constantă reală:

$$f(x_3) = C\,. \tag{10}$$

Integrînd ecuația (8) în raport cu x_3, obținem

$$u_3 = (1/2E)(\bar{\beta}\mathfrak{z} + \beta\bar{\mathfrak{z}} - 2d)\,x_3 + (\beta_3/E)\,x_3 + w_1(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}), \tag{11}$$

unde w_1 este o funcție reală necunoscută. Din a doua ecuație (9) conchidem că w_1 este armonică, și deci poate fi scrisă ca

$$w_1(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = w_2(\mathfrak{z}) + \overline{w_2(\mathfrak{z})}. \tag{12}$$

În felul acesta, ecuația (7) devine acum

$$U_{,3} = -(\beta/E)\,x_3 - 2\overline{w_2'(\mathfrak{z})},$$

de unde, întrucît U nu depinde de $\bar{\mathfrak{z}}$, urmează $-2\overline{w_2'(\mathfrak{z})} = B - \mathrm{i}A$, și deci ($A$, B, H, K fiind constante reale):

$$2\,w_2(\mathfrak{z}) = -(B + \mathrm{i}A)\,\mathfrak{z} + H + \mathrm{i}K. \tag{13}$$

Introducînd (12) și (13) în (11), obținem

$$u_3 = (1/2E)(\bar{\beta}\mathfrak{z} + \beta\bar{\mathfrak{z}} - 2d)\,x_3 + (\beta_3/E)\,x_3 - \mathrm{Re}\,[(B + \mathrm{i}A)\mathfrak{z}] + H. \tag{14}$$

Ecuațiile (5)—(7) dau acum explicit cele trei derivate:

$$\begin{gathered} U_{,\bar{\mathfrak{z}}} = 0; \quad U_{,\mathfrak{z}} = -(\nu/E)\,\bar{\beta}\,\mathfrak{z} + (\nu/E)(d - \beta_3) + \mathrm{i}C; \\ U_{,3} = -(\beta/E)\,x_3 + B - \mathrm{i}A. \end{gathered} \tag{15}$$

Integrînd în raport cu $\mathfrak{z}$, respectiv x_3, obținem de aci

$$U = -(\nu/2E)\,\bar{\beta}\,\mathfrak{z}^2 + (\nu/E)(d - \beta_3)\,\mathfrak{z} + \mathrm{i}C\mathfrak{z} + U_1(x_3),$$

$$U = -(1/2E)\,\beta x_3^2 + (B - \mathrm{i}A)\,x_3 + U_2(\mathfrak{z}),$$

și deci notînd cu F, G două constante reale:

$$\begin{aligned} U = -(1/2E)\,[\beta x_3^2 + \nu\bar{\beta}\,\mathfrak{z}^2 - 2\nu(d - \beta_3)\,\mathfrak{z}] + (B - \mathrm{i}A)\,x_3 + \\ + \mathrm{i}C\mathfrak{z} + F + \mathrm{i}G. \end{aligned} \tag{16}$$

Notînd cu u_1', u_2', u_3' acea parte a componentelor deplasării care depinde de cele 6 constante reale A, B, C, F, G, H obținem

$$\begin{gathered} u_1' = -Cx_2 + Bx_3 + F, \quad u_2' = Cx_1 - Ax_3 + G, \\ u_3' = -Bx_1 + Ax_2 + H, \end{gathered} \tag{17}$$

așadar o deplasare rigidă definită de vectorul de rotație (A, B, C) și de cel de translație (F, G, H). Pentru determinarea acestor constante, sînt necesare date suplimentare asupra poziției barei (de pildă, puncte și direcții care rămîn fixe în procesul de deformație).

Făcînd abstracție de aceste componente, obținem în definitiv

$$\begin{aligned} U &= -(1/2E)\,[\beta x_3^2 + \nu\bar{\beta}\,\mathfrak{z}^2 - 2\nu\,(d-\beta_3)\,\mathfrak{z}]\,, \\ u_3 &= (1/2E)\,(\bar{\beta}\,\mathfrak{z} + \beta\,\bar{\mathfrak{z}} - 2\,d)\,x_3 + (\beta_3/E)\,x_3\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Formulele (4) și (18) rezolvă complet, în axe oarecari, problema barei de secțiune oarecare, solicitate pe baze de o sarcină *normală*.

§ 6. ANALIZA STĂRII ELASTICE A BAREI ACȚIONATE PE BAZE DE SARCINI NORMALE

a) Comportarea secțiunilor

Vom începe prin a utiliza formulele (4.26), (4.29) și (4.31). Pentru a înțelege mai bine fenomenul, vom determina și rotirile fiecărei secțiuni în parte, ținînd seama și de deplasarea rigidă (așadar utilizînd formulele (5.14), (5.16), și nu formulele (5.18)).

Întrucît avem $R = \mathcal{M}_3 = 0$ și $T \equiv 0$, din (4.26) deducem

$$\varepsilon_{31}^m + \mathrm{i}\,\varepsilon_{32}^m = 0\,, \quad \varepsilon_{33}^m = \mathcal{R}_3/ED\,. \tag{1}$$

Mai departe, introducînd (5.14) în (4.27) avem

$$\omega_{31} + \mathrm{i}\,\omega_{32} = (\beta/E)\,x_3 - B + \mathrm{i}\,A\,, \tag{2}$$

astfel că (vezi și (4.29))

$$\omega_{31,3}^m + \mathrm{i}\,\omega_{32,3}^m = \beta/E\,. \tag{3}$$

În fine, ținînd seama de (5.16) în (4.30), deducem

$$\omega_{12} = -(\mathrm{i}\nu/2E)\,(\bar{\beta}\,\mathfrak{z} - \beta\,\bar{\mathfrak{z}}) - C\,, \tag{4}$$

astfel că

$$\omega_{12,3}^m = 0\,. \tag{5}$$

Constantele A, B, C, intervin în expresiile ce caracterizează rotațiile secțiunilor, dar nu și în cele ce caracterizează rotațiile lor *relative*.

Secțiunile nu sînt supuse nici la alunecări, nici la torsiune (cu toate că $\omega_{12} \neq 0$, și chiar $\omega_{12}^m \neq 0$).

Dacă $\mathcal{R}_3 \neq 0$, secțiunile sînt supuse la întindere, iar dacă $\beta \neq 0$, la încovoiere. Ambele stări sînt independente de x_3, așadar toate secțiunile se comportă la fel unele față de altele.

b) *Sarcină static echivalentă cu o forță unică* $\mathcal{R}_3$

În acest caz avem

$$R = M = \mathcal{M}_3 = 0\,, \quad \mathcal{R}_3 \neq 0\,, \tag{6}$$

forța $\mathcal{R}_3$ fiind aplicată într-un punct $\mathfrak{z}_r$.

Din (4.12), (4.14) și (3.23) avem deci

$$\alpha = 0, \ \beta = (2/\delta)\,[I_0(\mathfrak{z}_r - \mathfrak{z}_0) - I(\bar{\mathfrak{z}}_r - \bar{\mathfrak{z}}_0)]\,\mathcal{R}_3\,, \ \beta_3 = \mathcal{R}_3/D\,, \tag{7}$$

astfel că unica componentă nenulă a tensiunii este determinată. Din (5.4) obținem în general

$$\sigma_{33} = \left[\frac{I_{11}(x_1^r - x_1^0) - I_{12}(x_2^r - x_2^0)}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2}(x_1 - x_1^0) - \right.$$

$$\left. - \frac{I_{12}(x_1^r - x_1^0) - I_{22}(x_2^r - x_2^0)}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2}(x_2 - x_2^0) + \frac{1}{D}\right]\mathcal{R}_3\,, \tag{8}$$

iar în cazul particular al axelor centrale principale ($x_1^0 = x_2^0 = I_{12} = 0$, $I_{11} = I_1$, $I_{22} = I_2$):

$$\sigma_{33} = \left[\frac{x_1^r}{I_2}x_1 + \frac{x_2^r}{I_1}x_2 + \frac{1}{D}\right]\mathcal{R}_3\,. \tag{9}$$

După cum rezultă din (1) și (3), secțiunile sînt supuse la întindere și încovoiere.

Dacă $\mathfrak{z}_r = \mathfrak{z}_0$, atunci $\beta = 0$, și bara este supusă la *întindere pură*. În acest caz, din (5.4), (5.18) și (7) deducem — în axe centrale:

$$\sigma_{33} = \frac{\mathcal{R}_3}{D}, \quad u_1 = -\frac{\nu\mathcal{R}_3}{ED}x_1\,, \quad u_2 = -\frac{\nu\mathcal{R}_3}{ED}x_2\,, \quad u_3 = \frac{\mathcal{R}_3}{ED}x_3. \tag{10}$$

c) *Sarcină static echivalentă cu un cuplu de moment* M

În acest caz avem

$$R = \mathcal{R}_3 = \mathcal{M}_3 = 0\,, \quad M \neq 0\,, \tag{11}$$

unde M nu depinde de alegerea centrului de reducere.

Din (4.12), (4.15) și (3.23) avem acum

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = (2/\delta)\,\mathrm{i}(I_0 M + I\overline{M})\,, \quad \beta_3 = 0\,, \tag{12}$$

ceea ce determină unica componentă nenulă σ_{33} a tensiunii.

Din (5.4) și (5.18) obținem acum

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\bar{\beta}\,\mathfrak{z} + \beta\,\bar{\mathfrak{z}} - 2d) \tag{13}$$

şi încă, abstracţie făcînd de roto-translaţia rigidă (5.17):

$$U = -\frac{1}{2E}(\beta x_3^2 + \nu\bar{\beta}\mathfrak{z}^2 - 2\nu d\mathfrak{z}), \quad u_3 = \frac{1}{2E}(\beta\mathfrak{z} + \beta\bar{\mathfrak{z}} - 2d)x_3. \quad (14)$$

Întrucît $\mathcal{R}_3 = 0$, din (1)—(5) rezultă că secţiunile sînt supuse numai la rotiri relative în jurul unor axe normale pe Ox_3. Din această cauză, bara solicitată de sarcini de torsor (11) este în stare de *încovoiere pură*.

(Încovoierea apare şi sub acţiunea unei forţe $\mathcal{R}_3$ aplicate excentric, dar în acest caz ea este însoţită de întindere.)

În cazul încovoierii pure, rotaţiile locale nu sînt funcţii de punct pe secţiune. Există rotaţii locale (şi chiar rotaţii medii) nenule şi în jurul unor axe paralele cu Ox_3 — dar rotaţiile medii relative sînt nule.

Din a doua formulă (14) rezultă că *secţiunile plane rămîn plane după deformaţie*: orice secţiune $x_3 = \widetilde{x}_3$ trece după deformaţie în planul $x_3 = \widetilde{x}_3 + u_3(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, \widetilde{x}_3)$. Ipoteza secţiunilor plane — cunoscută din rezistenţa materialelor — se confirmă deci. (Din (10) se vede că ea este valabilă şi în cazul întinderii pure.)

Pentru a găsi constantele A, B, C, F, G, H, sînt necesare date suplimentare asupra deplasării barei în ansamblu.

Astfel de pildă, dacă presupunem că origina O nu se deplasează, şi vecinătatea ei nu se roteşte, atunci, luînd $\mathfrak{z} = x_3 = 0$, deducem din (14) şi (5.17) că $F = G = H = 0$, iar din (2) şi (4) urmează că $A = B = C = 0$.

Din (14) urmează evident că punctele bazei $x_3 = 0$ nu sînt fixe, întrucît avem $U \neq 0$. Presupunerea de mai sus revine la a considera deci că baza $x_3 = 0$ este fixată „în medie", ea nedeplasîndu-se înafara planului ei, şi nerotindu-se în ansamblu. (A se revedea şi § 2, pag. 169.)

Pe viitor vom presupune întotdeauna $A = B = C = F = G = H = 0$.

Pentru a obţine componentele tensiunii şi deplasării sub formă reală, să facem uz de valoarea lui β din (12). În axe oarecare obţinem de pildă

$$\sigma_{33} = -\frac{I_{12}\mathcal{M}_1 + I_{11}\mathcal{M}_2}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2}(x_1 - x_1^0) + \frac{I_{12}\mathcal{M}_2 + I_{22}\mathcal{M}_1}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2}(x_2 - x_2^0). \quad (15)$$

d) Elemente geometrice esenţiale. Rigidităţi la încovoiere

În cele ce urmează, ne vom situa în cadrul teoriei clasice a încovoierii pure pentru bara raportată la axele centrale principale de inerţie ale lui $\mathcal{D}$ (aşadar $\mathfrak{z}_0 = d = 0$, $I_{12} = 0$). Proprietăţile geometrice despre care vom vorbi nu depind desigur de alegerea axelor.

Din (12) obţinem mai întîi

$$\beta = -(\mathcal{M}_2/I_2) + i(\mathcal{M}_1/I_1). \quad (16)$$

Formula (15) devine aci

$$\sigma_{33} = -(\mathcal{M}_2/I_2)x_1 + (\mathcal{M}_1/I_1)\,x_2, \tag{17}$$

iar (14) se reduce — după calcule elementare — la

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}_2/EI_2)\,[x_3^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)] - \nu(\mathcal{M}_1/EI_1)\,x_1x_2,\\ u_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}_1/EI_1)\,[x_3^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)] + \nu(\mathcal{M}_2/EI_2)\,x_1x_2,\\ u_3 &= [-(\mathcal{M}_2/EI_2)x_1 + (\mathcal{M}_1/EI_1)x_2]\,x_3. \end{aligned} \tag{18}$$

De aci se obțin ușor componentele stării elastice în cazul particular al momentului dirijat după una din axe ($\mathcal{M}_1 = 0$ sau $\mathcal{M}_2 = 0$).

Întrucît avem $d(\mathscr{D}) \ll l$, caracterul deplasării în ansamblul ei este strîns legat de caracterul deplasării liniei centrelor de greutate. Luînd în (18) $x_1 = x_2 = 0$, obținem pentru aceasta

$$u_1^0 = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_2/EI_2)x_3^2, \quad u_2^0 = -\frac{1}{2}(\mathcal{M}_1/EI_1)x_3^2, \quad u_3^0 = 0. \tag{19}$$

Locul punctelor în care trec după deformație centrele de greutate ale secțiunilor se numește *linie elastică*. Dacă $C = 0$, secțiunile nu se rotesc (în medie) în jurul tangentei la această linie (vezi (4)).

Scriind ecuațiile (19) în coordonate (x_1, x_2, x_3), adică punînd $u_1^0 = x_1$, $u_2^0 = x_2$ (de fapt x_1^*, x_2^*), obținem

$$x_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_2/EI_2)\,x_3^2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(\mathcal{M}_1/EI_1)\,x_3^2, \tag{20}$$

de unde se vede că $x_2/x_1 = \text{const.}$, așadar că linia elastică este o curbă plană. Planul în care ea este situată poartă numele de *plan de încovoiere*, și ecuația sa (precum și a urmei sale pe orice secțiune) este evident

$$(\mathcal{M}_1/I_1)\,x_1 + (\mathcal{M}_2/I_2)\,x_2 = 0. \tag{21}$$

Din (17) deducem că există un al doilea plan important

$$(\mathcal{M}_2/I_2)\,x_1 - (\mathcal{M}_1/I_1)\,x_2 = 0, \tag{22}$$

pe care $\sigma_{33} = 0$. Din a treia ecuație (3.15) urmează că pe planul (22) avem și $\varepsilon_{33} = 0$. Acest plan este perpendicular pe planul de încovoiere, și se numește *plan neutru*.

Dat fiind că axa Ox_2 este orizontală și axa Ox_1 este verticala descendentă (vezi fig. 5.6.1), în cazul unei sarcini echivalente cu un cuplu $\mathcal{M}_2 > 0$ dirijat după Ox_2, planul de încovoiere este planul vertical; din (19) rezultă $u_1^0 > 0$, așadar centrele de curbură în lungul liniei elastice sînt îndreptate spre direcția valorilor x_1 pozitive. Dimpotrivă, dacă $\mathcal{M}_2 = 0$, $\mathcal{M}_1 > 0$, planul de încovoiere este planul orizontal și $u_2^0 < 0$, ceea ce înseamnă că centrele de curbură sînt îndreptate spre direcția valorilor x_2 negative.

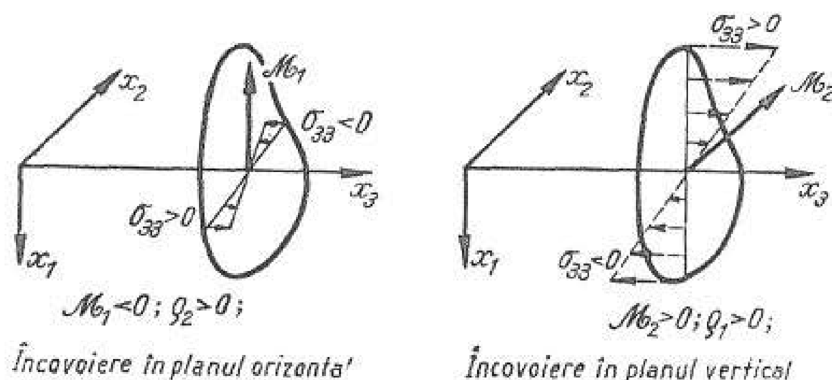


Fig. 5.6.1

Amintim (vezi de ex. G. Vrănceanu [1], vol. 2, § 14.1) că raza de curbură ρ_c şi torsiunea τ_c ale unei curbe în spaţiu sînt date de formulele

$$\rho_c^{-2} = (A^2 + B^2 + C^2)/\mathrm{d}s^6, \qquad \tau_c = -(A^2 + B^2 + C^2)/\Delta,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x_1 & \mathrm{d}x_2 & \mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}^2x_1 & \mathrm{d}^2x_2 & \mathrm{d}^2x_3 \\ \mathrm{d}^3x_1 & \mathrm{d}^3x_2 & \mathrm{d}^3x_3 \end{vmatrix}, \tag{23}$$

unde A, B, C, sînt minorii formaţi cu elementele primelor două linii ale determinantului Δ. Ţinînd seama de (20), obţinem acum

$$A = (\mathcal{M}_1/EI_1)(\mathrm{d}x_3)^3, \quad B = -(\mathcal{M}_2/EI_2)(\mathrm{d}x_3)^3, \quad C = 0, \tag{24}$$

şi deci

$$\rho_c^{-2} = [(\mathcal{M}_1/EI_1)^2 + (\mathcal{M}_2/EI_2)^2](\mathrm{d}x_3/\mathrm{d}s)^6. \tag{25}$$

Întrucît avem

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2} = \sqrt{1 + [(\mathcal{M}_1/EI_1)^2 + (\mathcal{M}_2/EI_2)^2]\,x_3^2}\,\mathrm{d}x_3, \tag{26}$$

vom nota

$$\rho_0^{-2} = (\mathcal{M}_1/EI_1)^2 + (\mathcal{M}_2/EI_2)^2, \tag{27}$$

şi vom transcrie (25) sub forma

$$\rho_c^{-1} = \rho_0^{-1}(1 + \rho_0^{-2}x_3^2)^{-3/2}. \tag{28}$$

Atîta timp cît deplasările nu sînt foarte mari, avem evident $x_3/\rho_0 \ll 1$. Prin urmare, avem $\rho_c \cong \rho_0$, şi, în primă aproximaţie, linia elastică este un *arc de cerc*. Aceeaşi valoare a razei de curbură se obţine din (25) dacă admitem $x_3 \cong s$, ceea ce este permis în cadrul teoriei liniare.

Valoarea torsiunii τ_c rezultă nulă (ceea ce era de aşteptat), chiar independent de presupunerea $x_3 \cong s$.

Vom nota raza de curbură a liniei elastice cu ρ_1 în cazul în care planul de încovoiere este planul vertical Ox_1x_3 (aşadar pentru $\mathcal{M}_1 = 0$, $\mathcal{M}_2 \neq 0$), şi cu ρ_2 în cazul încovoierii în planul orizontal Ox_2x_3 ($\mathcal{M}_1 \neq 0$, $\mathcal{M}_2 = 0$). Atribuind acestor raze semnul corespunzător direcţiei pozitive sau negative a axelor spre care este orientată concavitatea liniei elastice, obţinem din (27) relaţiile importante:

$$\rho_1^{-1} = \mathcal{M}_2/EI_2, \quad \rho_2^{-1} = -\mathcal{M}_1/EI_1, \quad \rho_0^{-2} = \rho_1^{-2} + \rho_2^{-2}. \tag{29}$$

(Intervertirea axelor Ox_1 şi Ox_2 în orice formulă în care intervin momentele, se face ţinînd seama şi de necesitatea de a schimba semnele — datorită faptului că sistemele $Ox_1x_2x_3$ şi $Ox_2x_1x_3$ nu sînt de aceeaşi orientare.)

Să clarificăm semnificaţia primelor două relaţii (29). Cantităţile ρ_1, ρ_2 sînt parametri cu caracter *global*, ce caracterizează comportarea de ansamblu a barei. Ei sînt determinaţi ca *produse* de factori E (depinzînd de material), I_1 sau I_2 (depinzînd sub formă globală de configuraţia geometrică a secţiunii), şi $\mathcal{M}_1$ sau $\mathcal{M}_2$ (depinzînd de asemenea sub formă globală de sarcină). Acest fapt permite evaluarea *separată* a rolului sarcinii, materialului, şi geometriei secţiunii.

Cu cît razele ρ_1, ρ_2 sînt mai mari, cu atît bara este mai rigidă (vezi (19)). Mai departe, din (29) se vede că cu cît I_1, I_2 sînt mai mari, cu atît — pentru o sarcină şi un material dat — bara se va depărta mai puţin de la configuraţia iniţială (rectilinie). De aceea, mărimile I_1 şi I_2 se vor numi ***rigidităţi geometrice la încovoiere pură***. Mărimile EI_1 şi EI_2 se vor numi ***rigidităţi la încovoiere pură***.

O relaţie analogă cu (29) apare în studiul problemei torsiunii pure (vezi (13.15)). În problema încovoierii în consolă apare analogul nemijlocit (9.14) al relaţiilor (29), precum şi o relaţie mai complicată, dar cu semnificaţie înrudită (vezi (19.10) şi (19.17)). În fine, relaţii de acelaşi tip se întîlnesc şi în problema ştanţei rigide (vezi (10.8.5) şi (10.8.8)).

Ţinînd seama de formulele (29), obţinem acum din (17)

$$\sigma_{33} = -E(\rho_1^{-1} x_1 + \rho_2^{-1} x_2), \tag{30}$$

iar din (18)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \rho_1^{-1}[x_3^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)] + \nu \rho_2^{-1} x_1x_2, \\ u_2 &= \frac{1}{2} \rho_2^{-1} [x_3^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)] + \nu\rho_1^{-1} x_1x_2, \\ u_3 &= -(\rho_1^{-1} x_1 + \rho_2^{-1} x_2) x_3. \end{aligned} \tag{31}$$

Pentru ecuaţiile liniei elastice avem din (19)

$$u_1^0 = \frac{1}{2} \rho_1^{-1}x_3^2, \quad u_2^0 = \frac{1}{2} \rho_2^{-1} x_3^2. \tag{32}$$

În fine, din (21) și (22) obținem pentru

planul de încovoiere:

$$\rho_2^{-1} x_1 - \rho_1^{-1} x_2 = 0, \tag{33}$$

planul neutru:

$$\rho_1^{-1} x_1 + \rho_2^{-1} x_2 = 0. \tag{34}$$

Planul neutru împarte bara în două domenii: unul în care avem $\sigma_{33} > 0$, $\varepsilon_{33} > 0$, și celălalt în care avem $\sigma_{33} < 0$, $\varepsilon_{33} < 0$ — așadar unul în care există tensiuni de întindere și fibrele longitudinale se lungesc, și celălalt în care există tensiuni de compresiune, și aceste fibre se scurtează [3]).

Notînd cu p distanța de la un punct de coordonate x_1, x_2 la urma planului neutru (34) pe $\mathscr{D}$ avem (vezi de ex. G. Vrănceanu [1], vol. 1, § 2.6):

$$p = \pm (\rho_2 x_1 + \rho_1 x_2)/\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}. \tag{35}$$

Ținînd seama de a treia relație (29), obținem din (30) și (35):

$$\sigma_{33} = -E(\rho_2 x_1 + \rho_1 x_2)/\rho_1\rho_2 = -Ep\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}/\rho_1\,\rho_2 = -Ep/\rho_0. \tag{36}$$

Am reținut aci semnul minus, pentru ca (36) să generalizeze relațiile ce derivă din (30) pentru $\mathscr{M}_1 = 0$ sau $\mathscr{M}_2 = 0$:

$$\sigma_{33} = -E\,x_1/\rho_1, \text{ respectiv } \sigma_{33} = -E\,x_2/\rho_2. \tag{37}$$

Tensiunea într-un punct oarecare e deci proporțională cu distanța la planul neutru, cu curbura liniei elastice, și cu modulul lui Young.

De aci rezultă două concluzii practice importante. Pe de o parte, punctele cele mai solicitate sînt cele mai depărtate de planul neutru — și aceasta dă o regulă simplă pentru a se evita apariția de tensiuni prea mari. Pe de altă parte materialul situat în apropierea planului neutru „nu lucrează" și deci este indicată utilizarea de profile care *îndepărtează* materialul de acest plan. (Vezi și § 9, pag. 208 și § 16, pag. 266).

Pentru o bară de oțel ($E \cong 2{,}15 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\sigma_s \cong 2 \cdot 10^3$ kgf/cm²), conchidem că trebuie să avem $\rho_0 \gg 10^3 p$. Întrucît în general p este de ordinul de mărime a cîțiva cm, cel mult cîțiva dm, rezultă că ρ_0 este de ordinul zecilor sau sutelor de metri. (Vezi și cele spuse după (28).)

Din a treia formulă (31) rezultă că o secțiune plană $x_3 = \widetilde{x}_3$ trece după deformație tot într-un plan:

$$x_3 = (1 - \rho_1^{-1} x_1 - \rho_2^{-1} x_2)\,\widetilde{x}_3. \tag{38}$$

Remarcînd că parametrii directori ai tangentei la linia elastică (32) în punctul în care ea înțeapă planul $x_3 = \widetilde{x}_3$ au valorile $\rho_1^{-1}\widetilde{x}_3$, $\rho_2^{-1}\widetilde{x}_3$, 1, și transcriind (38) sub forma

$$(\rho_1^{-1}\widetilde{x}_3)\,x_1 + (\rho_2^{-1}\widetilde{x}_3)\,x_2 + x_3 = \widetilde{x}_3, \tag{39}$$

[3]) Acest fapt a fost pus la baza studiului problemei încovoierii de către E. Mariotte [1].

deducem că secțiunile normale trec după deformație în plane perpendiculare pe linia elastică. Aceasta era de așteptat, întrucît axele $Ox_1x_2x_3$ sînt axe principale.

Soluția exactă a problemei confirmă deci ipotezele formulate de J. Bernoulli [1]: ipoteza secțiunilor plane, normale pe linia elastică, și ipoteza încovoierii în arc de cerc a liniei elastice. (Pentru domeniul de validitate al acestei soluții vezi și A. Kornecki [1].)

e) *Încovoiere dreaptă și încovoiere oblică*

S-ar putea crede că încovoierea în lungul unei axe principale de inerție nu diferă calitativ de încovoierea după o direcție oarecare (compară de exemplu (36) cu (37)). Dar în fapt, aceste axe au un rol esențial.

Să notăm momentul încovoietor complex cu

$$M = \mathscr{M}_1 + i\mathscr{M}_2 = |M| \exp(i\psi). \qquad (40)$$

Din (27) obținem

$$\rho_0^{-2} = (|M|^2/E^2)\ [(\cos^2\psi)/I_1^2 + (\sin^2\psi)/I_2^2]. \qquad (41)$$

Extremele acestei funcții se obțin pentru

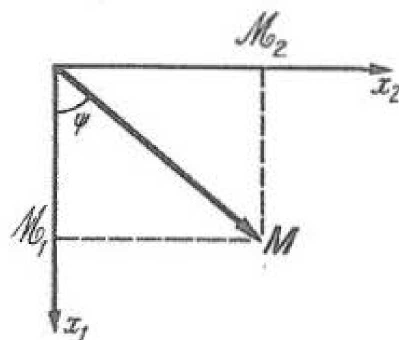


Fig. 5.6.2

$$\partial\rho_0^{-2}/\partial\psi = (|M|^2/E^2)\ [I_2^{-2} - I_1^{-2}] \sin 2\psi = 0, \qquad (42)$$

așadar pentru valorile $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$, ale unghiului ψ.

Să alegem notația axelor în așa fel încît să avem $I_1 \leqslant I_2$. Din expresia

$$\partial^2\rho_0^{-2}/\partial\psi^2 = 2(|M|^2/E^2)\ [I_2^{-2} - I_1^{-2}] \cos 2\psi, \qquad (43)$$

deducem

$$\partial^2\rho_0^{-2}/\partial\psi^2\Big|_{\psi=0} < 0, \qquad \partial^2\rho_0^{-2}/\partial\psi^2\Big|_{\psi=\frac{1}{2}\pi} > 0, \qquad (44)$$

de unde rezultă că pentru momentul M dirijat în lungul axei Ox_2 $\left(\text{așadar } \psi = \frac{1}{2}\pi\right)$ curbura ρ_0^{-1} atinge valoarea sa *minimă*; iar pentru M dirijat în lungul axei Ox_1 (așadar $\psi = 0$) ea atinge valoarea *maximă*.

Vom numi *plan al sarcinii*, acel plan a cărui urmă pe secțiune este *perpendiculară* pe M. (Denumirea provine din faptul că cuplul de moment M poate fi privit ca realizat cu ajutorul unor cupluri elementare, compuse

fiecare din cîte două forțe egale și opuse, dirijate paralel cu Ox_3, și aplicate în două puncte situate pe o linie perpendiculară pe M.) Astfel de pildă, dacă $\mathcal{M}_1 = 0$, $\mathcal{M}_2 \neq 0$, planul sarcinii este dirijat după Ox_1; iar dacă $\mathcal{M}_1 \neq 0$, $\mathcal{M}_2 = 0$, el este dirijat după Ox_2.

Rezultă deci că, dacă planul sarcinii este dirijat după axa Ox_1 în raport cu care momentul de inerție este *minim* ($I_1 \leqslant I_2$), atunci curbura atinge valoarea sa *minimă*; dimpotrivă, dacă planul sarcinii este dirijat după axa Ox_2, în raport cu care momentul de inerție este *maxim*, curbura atinge și ea valoarea sa *maximă*.

Din (31) și (36) urmează că, cu cît raza de curbură este mai mare (așadar bara este mai rigidă), cu atît tensiunile și deplasările sînt mai mici. Întrucît bara rezistă în condiții optime pentru planul sarcinii dirijat după Ox_1, iar în acest caz ($\mathcal{M}_1 = 0$) rezultă din (21) că planul de încovoiere este planul $x_2 = 0$, așadar planul Ox_1x_3 — acesta va purta numele de *plan de rigiditate* al barei; planul Ox_2x_3 se va numi *plan de flexibilitate*.

În concluzie: bara rezistă global în condiții optime la sarcini dirijate (global) după axa în raport cu care momentul de inerție este *minim*, așadar — în axele particulare alese — la sarcini $\mathcal{M}_1 = 0$, $\mathcal{M}_2 \neq 0$. (Desigur, cele de mai sus își pierd sensul dacă $I_1 = I_2$.)

Ne rămîne să cercetăm comportarea barei sub acțiunea momentelor dirijate *nu* după axele principale.

Întrucît planul ce conține vectorul M are ecuația

$$\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_1 = x_2/x_1, \tag{45}$$

urmează că planul sarcinii are ecuația

$$\mathcal{M}_1 x_1 + \mathcal{M}_2 x_2 = 0, \tag{46}$$

sau încă, ținînd seama de (29), ecuația

$$I_1 \rho_2^{-1}\, x_1 - I_2 \rho_1^{-1}\, x_2 = 0. \tag{47}$$

Ținînd seama de valorile pantelor x_2/x_1 ce se obțin din (46) pentru planul sarcinii, și din (21) pentru planul de încovoiere, obținem pentru tangenta[4]) unghiului φ dintre cel dintîi și acesta din urmă, valoarea

$$\operatorname{tg}\varphi = \left[-\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} + \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2}\frac{I_2}{I_1}\right] : \left[1 + \left(\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2}\right)^2 \frac{I_2}{I_1}\right]. \tag{48}$$

Ținînd seama că din (40) urmează $\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2 = \operatorname{ctg}\,\psi$, și notînd $I_1/I_2 = \eta$, unde $\eta \leqslant 1$, obținem deci

$$\operatorname{tg}\,\varphi = [(1-\eta)\operatorname{tg}\psi] : [1 + \eta\, \operatorname{tg}^2\psi], \tag{49}$$

---

[4]) E preferabil să calculăm tangenta, întrucît cosinusul nu informează asupra *semnului* unghiului.

de unde

$$\frac{d}{d\psi}(\mathrm{tg}\varphi) = [(1-\eta)\,(1+\mathrm{tg}^2\psi)\,\,(1-\eta\,\mathrm{tg}^2\psi)] : [1+\eta\,\mathrm{tg}^2\psi]^2. \qquad (50)$$

Eliminînd cazul banal $\eta = 1$, rezultă că unghiul φ se anulează numai pentru valorile $\psi = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$. Prin urmare, bara se încovoaie în planul sarcinii *dacă și numai dacă acesta trece prin una din axele principale de inerție ale secțiunii*. Condițiile optime sînt realizate atunci cînd acesta este planul de rigiditate $\left(\psi = \frac{1}{2}\pi \text{ sau } \frac{3}{2}\pi\right)$. Condițiile cele mai defavorabile survin cînd acesta este planul de flexibilitate ($\psi = 0$ sau π).

Încovoierea *în* aceste plane se numește *încovoiere dreaptă*. Încovoierea *în afara* acestor plane, cînd planul de încovoiere *nu coincide* cu planul sarcinii, se numește *încovoiere oblică*.

Semnul mărimii $\mathrm{tg}\varphi$ este același cu al mărimii $\mathrm{tg}\psi$. Din (49), (50) obținem următorul tablou de variație al funcției $\mathrm{tg}\varphi$ pentru $\psi \in [0, \pi]$:

ψ	0	$\frac{1}{4}\pi$		$\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{\sqrt{\eta}}$		$\frac{1}{2}\pi$		$\mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)$		$\frac{3}{4}\pi$	π
$\mathrm{tg}\psi$	0	1		$1/\sqrt{\eta}$		$\pm\infty$		$-1/\sqrt{\eta}$		-1	0
$\mathrm{tg}\varphi$	0	↗		$\frac{1}{2}(1-\eta)/\sqrt{\eta}$		↘ 0 ↘		$-\frac{1}{2}(1-\eta)/\sqrt{\eta}$		↗	0
$\frac{d}{d\psi}\mathrm{tg}\varphi$	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+

Unghiul φ este pozitiv pentru ψ situat în primul (sau al treilea) cadran, și negativ pentru ψ situat în al doilea (sau al patrulea) cadran.

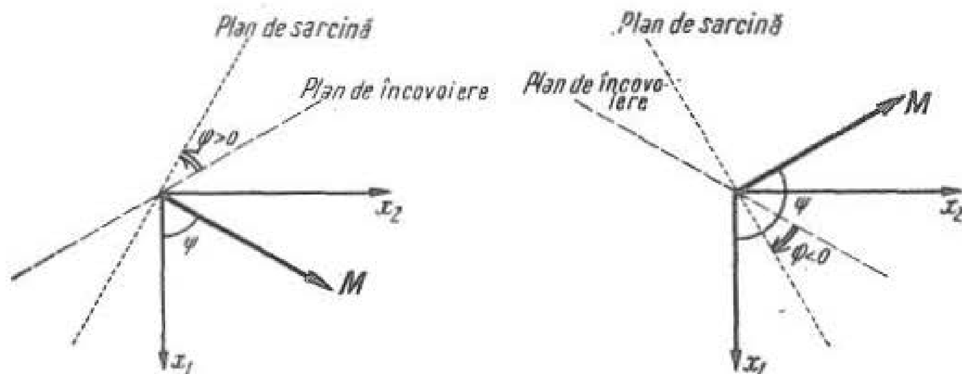


Fig. 5.6.3

Aceasta înseamnă că planul de încovoiere este situat întotdeauna *între* planul sarcinii și planul de flexibilitate. Cu alte cuvinte, planul de încovoiere se abate de la poziția sa optimă *mai repede* decît se abate planul sarcinii de la poziția sa cea mai indicată. De aceea, apar deplasări mari *pe alte direcții* decît cea corespunzătoare planului sarcinii.

Pentru o conică de ecuație $F(x_1, x_2) = 0$, ecuația diametrului conjugat cu o direcție dată m este

$$F_{,1} + mF_{,2} = 0 \tag{51}$$

(vezi de ex. G. Vrănceanu [1], vol. 1, § 4.2). Alegînd

$$F(x_1, x_2) \equiv x_1^2/I_2 + x_2^2/I_1 - 1 = 0, \tag{52}$$

așadar considerînd elipsa de inerție a secțiunii raportată la axele principale, și luînd $m = -\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2$ (panta urmei planului sarcinii), obținem pentru diametrul conjugat ecuația

$$x_1/I_2 - (\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2)\ (x_2/I_1) = 0, \tag{53}$$

așadar tocmai ecuația (22) a planului neutru.

Urma planului neutru și urma planului sarcinii sînt deci diametri conjugați ai elipsei centrale de inerție a secțiunii. Or, diametrul conjugat cu o direcție dată este locul geometric al mijloacelor coardelor conicei, paralele cu acea direcție. Dacă elipsa de inerție este construită, acest rezultat dă un mijloc simplu de a construi planul neutru (și deci și planul de încovoiere), pentru un plan al sarcinii dat.

Să determinăm acum tensiunea σ_{33}, curbura ρ_0^{-1} și linia elastică, punînd în evidență un termen principal corespunzător încovoierii în planul de rigiditate. Folosind din nou notațiile $M = |M| \exp(\mathrm{i}\psi)$, și $\eta = I_1/I_2$, obținem din (17), (19) și (27)

$$\begin{gathered} \sigma_{33} = -(|M|/I_2)\ (x_1 \sin\psi - \eta^{-1} x_2 \cos\psi), \\ U_0 = u_1^0 + \mathrm{i}u_2^0 = \frac{1}{2}(|M|/EI_2)\, x_3^2 (\sin\psi - \mathrm{i}\eta^{-1}\cos\psi), \\ |\rho_0^{-1}| = (|M|/EI_2)\sqrt{\sin^2\psi + \eta^{-2}\cos^2\psi}. \end{gathered} \tag{54}$$

Chiar pentru valori mici ale diferenței $\psi - \frac{1}{2}\pi$, tensiunea și curbura cresc sensibil față de cazul $\psi = \frac{1}{2}\pi$; în plus, apare și o componentă u_2^0 a deplasării.

Aceste modificări sînt cu atît mai importante, cu cît η este mai mic.

Din cele de mai sus rezultă că dacă sarcina este aplicată în planul de rigiditate, fenomenul de deformație depinde numai de rigiditatea geometrică maximă I_2, și deci I_1 (așadar și η) poate fi oricît de mic. Secțiuni cu η mic permit mari economii de material. Totuși, valoarea η trebuie aleasă suficient de mare, pentru ca în cazul unor abateri ale sarcinii de la planul de rigiditate, tensiunile și deplasările ce rezultă din (54) să nu depășească limitele admisibile.

f) *Aplicarea principiului lui Saint-Venant*

Soluția (5.4), (5.18) este soluția *exactă*, dacă repartiția de tensiuni pe $x_3 = l$ *coincide* cu (5.4), și dacă baza $x_3 = 0$ este fixată în așa fel încît să avem (vezi (5.18)):

$$U(\mathfrak{z}, 0) = -(1/2E)\,[\nu\bar{\beta}\mathfrak{z}^2 - 2\nu(d - \beta_3)\,\mathfrak{z}], \qquad u_3(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, 0) = 0. \tag{55}$$

Prin urmare, dacă baza $x_3 = 0$ este fixată într-un mod care nu permite deplasările tangențiale din (55), soluția își pierde valabilitatea.

Principiul lui Saint-Venant permite să afirmăm că, dacă repartiția de sarcini dată pe baza $x_3 = l$ nu coincide cu (5.4), dar are aceeași rezultantă și același moment rezultant, starea elastică reală diferă sensibil de starea (5.4), (5.18) numai în vecinătatea imediată a bazei $x_3 = l$.

Întrucît pentru deplasări nu dispunem de un echivalent al principiului lui Saint-Venant, abaterile de la starea (5.4), (5.18) pot fi importante, dacă condițiile (55) nu sînt satisfăcute. Cu alte cuvinte, modul concret în care ne dăm tensiunile pe baza $x_3 = l$ nu are mare însemnătate, soluția tinzînd spre o anumită soluție-standard, funcție de configurația secțiunii, de constantele elastice, și de torsorul sarcinii. În schimb, repartiția efectivă a deplasărilor pe baza $x_3 = 0$ poate influența sensibil starea elastică. Toate aceste fapte se pot verifica experimental.

§7. BARA ACȚIONATĂ PE BAZE DE SARCINI NORMALE. EXEMPLE

Problema întinderii (compresiunii) pure nu necesită comentarii. Menționăm numai că soluția (6.10) pentru $\mathcal{R}_3 > 0$ își păstrează valabilitatea atîta timp cît $\sigma_{33} < \sigma_s$, în timp ce pentru $\mathcal{R}_3 < 0$, fenomenul de flambaj apare de obicei cu mult înainte ca limita σ_e să fie atinsă.

În problema încovoierii pure, singurele calcule necesare sînt cele cerute de determinarea ariei, a centrului de greutate, a momentelor de inerție ale secțiunii, și a torsorului sarcinii. Reducerea la axe centrale principale este necesară nu atît pentru simplificarea formulelor, cît pentru a determina planul de rigiditate.

a) *Cornier*

Fie o bară de secțiune dată în figura 5.7.1. Din (A.3.4) — (A.3.6) obținem pe rînd

$D = 66$ cm², $x_1^0 = -3{,}96$ cm, $x_2^0 = 6{,}46$ cm;

$J_{11} = 5\,368$ cm⁴, $J_{22} = 2\,298$ cm⁴, $J_{12} = -621$ cm⁴.

(În calculul lui J_{12} trebuie să ținem seama de semnul integrandului pe diferitele porțiuni ale lui $\mathcal{D}$.) Raportînd secțiunea la axe centrale, paralele cu cele date, obținem din (A.3.9)

$$I_{11} = 2\,618\ \text{cm}^4,\quad I_{22} = 1\,265\ \text{cm}^4,\quad I_{12} = 1\,065\ \text{cm}^4.$$

Pentru a determina axele centrale principale de inerţie, obţinem din (A.7.29) valoarea $\operatorname{tg} 2\vartheta = -1{,}574$, de unde $\vartheta = -28°47'$ sau $\vartheta = 61°13'$. Alegînd a doua soluţie, poziţia axelor va fi cea din figură.

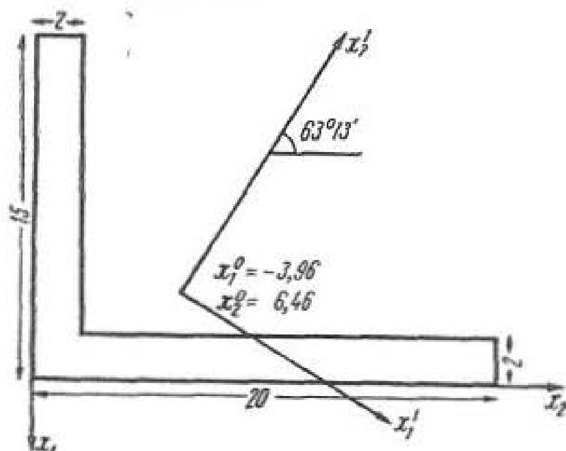


Fig. 5.7.1

Făcînd uz şi de (A.7.27) sau (A.7.28), obţinem $I_1 \cong 680$ cm⁴, $I_2 \cong 3200$ cm⁴ (ceea ce justifică alegerea făcută mai sus între cele două valori ale unghiului ϑ).

Ca verificare, putem calcula *în aceste axe* momentul I_{12}, care trebuie să rezulte nul. Direcţia optimă de aplicare a sarcinii este deci în lungul axei x_1^1. Pentru o sarcină dirijată într-un mod oarecare efectuăm descompunerea momentului în componentele $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, şi facem uz de formulele din § 6.

b) Dreptunghi

Examinăm acest caz simplu, pentru a da o imagine clară asupra modificării secţiunilor. Laturile unei secţiuni $x_3 = c$ au, înainte de deformaţie, ecuaţiile

$$x_2 = \pm b,\ x_3 = c; \qquad x_1 = \pm a,\ x_3 = c. \tag{1}$$

După deformaţie, aceste laturi se transformă în virtutea relaţiilor (6.31), în curbele

$$\begin{aligned} x_2 &= \pm b + \frac{1}{2}\rho_2^{-1}[c^2 + \nu(b^2 - x_1^2)] \pm \nu\rho_1^{-1} b x_1, \quad x_3 = (1 - \rho_1^{-1}x_1 - \rho_2^{-1}x_2)c, \\ x_1 &= \pm a + \frac{1}{2}\rho_1^{-1}[c^2 + \nu(a^2 - x_2^2)] \pm \nu\rho_2^{-1} a x_2, \quad x_3 = (1 - \rho_1^{-1}x_1 - \rho_2^{-1}x_2)c. \end{aligned} \tag{2}$$

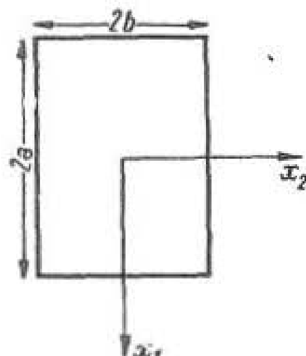


Fig. 5.7.2

Să presupunem că încovoierea se desfăşoară în planul vertical Ox_1x_3, aşadar că $\rho_2^{-1} = 0$. Proiectînd curbele (2) pe planul Ox_1x_2, obţinem ecuaţiile

$$x_2 = \pm(1 + \nu\rho_1^{-1}x_1)b, \quad x_1 = \pm a + \frac{1}{2}\rho_1^{-1}[c^2 + \nu(a^2 - x_2^2)]. \tag{3}$$

Primele două sînt ecuaţiile a două drepte, de pante

$$x_2/x_1 = \pm \nu\rho_1^{-1} b. \tag{4}$$

Pentru $\mathcal{M}_2 > 0$, avem $\rho_1 > 0$, şi din (4) rezultă că laturile verticale se îndepărtează în partea de jos a barei (cadranele 1 şi 4), şi se apropie în cea de sus — ceea ce era de aşteptat, întrucît partea de jos este comprimată, iar cea de sus, întinsă. Pantele acestor drepte sînt cu atît mai mari în valoare absolută, cu cît ρ_1^{-1} este mai mare (aşadar cu cît rigiditatea barei

este mai mică și deplasările mai mari), și cu cît b este mai mare (așadar cu cît secțiunea barei este mai lată). Dreapta $x_2 = 0$ rămîne nedeformată — așadar secțiunea nu se rotește în planul ei.

Laturile orizontale ale dreptunghiului se transformă în două arce de parabolă, de curbură aproximativ egală cu

$$\partial^2 x_1/\partial x_2^2 = -\nu\rho_1^{-1}, \tag{5}$$

așadar avînd concavitatea îndreptată spre axa Ox_1 negativă, în sus. Termenul $\frac{1}{2}\rho_1^{-1}c^2$ din ultimele două ecuații (3) corespunde unei translații de ansamblu (funcție de x_3) a întregii secțiuni în jos, egală cu deplasarea u_1^0 a liniei elastice din (6.32).

Suprafețele superioară și inferioară ale barei sînt inițial dreptunghiuri situate în planele $x_1 = \pm a$. După deformație, ele se transformă în suprafețele

$$x = \pm a + \frac{1}{2}\rho_1^{-1}[x_3^2 + \nu(a^2 - x_2^2)], \tag{6}$$

așadar în niște paraboloizi hiperbolici, cu aspectul caracteristic de șea. Acesta este motivul pentru care, cu toate că linia elastică are concavitatea îndreptată în jos, laturile inițial orizontale ale secțiunii dreptunghiulare au, după deformație, concavitatea dirijată în sus.

Presupunînd acum că încovoierea se face în planul orizontal Ox_2x_3, vom lua $\rho_1^{-1} = 0$ în (2), și vom ajunge la concluzii analoge, intervertind axele x_1 și x_2.

Forma finală a laturilor secțiunilor pentru $\rho_1^{-1} \neq 0$, $\rho_2^{-1} \neq 0$ se obține din cea din primul caz, dacă adăugăm valorii x_2 din (3) termenul $\frac{1}{2}\rho_2^{-1}[c^2 + \nu(b^2 - x_1^2)]$, iar valorii x_1, termenul $\pm\nu\rho_2^{-1}ax_2$. Toate laturile devin arce de parabolă. Apariția termenului $\frac{1}{2}\rho_2^{-1}c^2$ în expresia lui x_2 corespunde deplasării u_2^0 a liniei elastice din (6.32).

Prin urmare, secțiunea se deplasează în ansamblu cu cantitățile $u_1^0(x_3)$ pe direcția Ox_1 și $u_2^0(x_3)$ pe direcția Ox_2, iar laturile sale se deformează prin suprapunerea unei rotații de tipul caracterizat prin (4), cu o deformare în arc de parabolă de tipul caracterizat în (5). În această deplasare, secțiunile nu se rotesc în ansamblul lor unele față de altele în jurul liniei elastice.

c) *Rolul variației raportului* $\eta = I_1/I_2$

Pentru un dreptunghi de laturi $2a$, $2b$, se obțin ușor valorile

$$I_1 = \frac{4}{3}ab^3, \quad I_2 = \frac{4}{3}a^3b. \tag{7}$$

Calculînd momentele centrale principale de inerție pentru secțiunile din figura de mai jos, căpătăm

pentru pătrat:	$I_1 = 4\,000\ \text{cm}^4$,	$I_2 = 4\,000\ \text{cm}^4$;
pentru dreptunghi:	$I_1 = 360\ \text{cm}^4$,	$I_2 = 4\,000\ \text{cm}^4$;
pentru secțiunea în I:	$I_1 \cong 590\ \text{cm}^4$,	$I_2 \cong 3\,990\ \text{cm}^4$;

Momentul de inerţie maxim I_2 este aproximativ acelaşi în cele trei cazuri, astfel că trei bare avînd secţiunile considerate şi fiind acţionate de acelaşi moment $\mathcal{M}_2$, au aceeaşi linie elastică (vezi şi § 6, pag. 194). Dar întrucît ariile celor trei secţiuni sînt de 219 cm², de 120 cm², respectiv de 98,4 cm², economia de material în ultimul caz se dovedeşte a fi considerabilă. Mai mult: tensiunile şi deformaţiile maxime rezultă mai mici decît cele

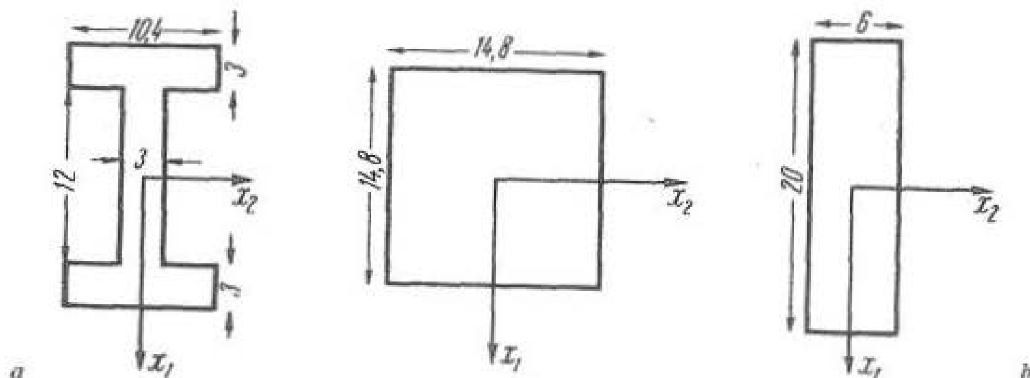


Fig. 5.7.3

atinse în cazul secţiunii dreptunghiulare; totodată, raportul η este mai mare decît în acest ultim caz, şi de aceea secţiunea în I rezistă mai bine în eventualitatea încovoierii oblice.

Acest exemplu arată avantajele alungirii secţiunii pe direcţii perpendiculare pe planul neutru, şi a îndepărtării materialului de acest plan.

d) Încovoierea oblică a barei de secţiune dreptunghiulară

Fie o bară de oţel ($E \cong 2 \cdot 10^6$ kgf/cm²), de secţiune dreptunghiulară (vezi fig. 5.7.3), cu $I_1 = 360$ cm⁴, $I_2 = 4\,000$ cm⁴, $\eta = 0{,}09$, solicitată de o sarcină de intensitate $|M| = 8$ tone-metri $= 0{,}8 \cdot 10^6$ kgf·cm. Formulele (6.54) şi (6.49) devin aci

$$\begin{gathered}\sigma_{33} = -200\,[x_1 \sin\psi - (100/9)x_2 \cos\psi],\\ U_0 = (1/20000)\, x_3^2\, [\sin\psi - (100/9)\, \mathrm{i} \cos\psi],\\ |\rho_0^{-1}| = (1/10\,000) \sqrt{\sin^2\psi + (100/9)^2 \cos^2\psi},\\ \mathrm{tg}\varphi = (1 - 0{,}09)\, \mathrm{tg}\psi : (1 + 0{,}09\ \mathrm{tg}^2\psi).\end{gathered} \tag{8}$$

Abaterea maximă a planului de încovoiere de la planul sarcinii se obţine pentru $\psi \cong 73°$, şi este egală cu $\varphi \cong 56°$. Dar chiar pentru o abatere moderată, dată de ex. de unghiul $\psi = 84°50'$ (abatere de $5°10' = 0{,}09$ rad), obţinem din (8) valorile

$$\begin{gathered}\sigma_{33} = -200\ (0{,}996\, x_1 - x_2),\ \ U_0 = (1/20\,000) x_3^2\, (0{,}996 - \mathrm{i}),\\ |\rho_0^{-1}| = 1{,}4/10\,000,\ \ \mathrm{tg}\varphi = 0{,}835,\ \ \varphi = 39°50'.\end{gathered} \tag{9}$$

Prin urmare, pentru o înclinare a planului sarcinii cu $5°10'$, faţă de planul de rigiditate, apare o componentă u_2^0 a deplasării aproximativ *egală* cu componenta u_1^0 (ceea ce

corespunde faptului că planul de încovoiere este înclinat de un unghi egal cu $\frac{1}{2}\pi - \psi +$ $+ \varphi \cong 45°$ față de planul de rigiditate (vezi prima fig. 5.6.3); curbura liniei elastice crește cu cca. 40%; iar tensiunea în punctul de maximă solicitare ($x_1 = 10$, $x_2 = -3$) crește cu cca. 30% (de la 2 000 la 2 600 kgf/cm², ceea ce pentru anumite tipuri de oțel poate însemna tocmai depășirea limitei de plasticitate).

Aceste efecte (cu atît mai pronunțate, cu cît η este mai mic) se datoresc apariției componentei $\mathcal{M}_1 = 0{,}72$ tone-metri, care la prima vedere ar părea neglijabilă față de componenta $\mathcal{M}_2 = 7{,}97$ tone-metri. Această neglijare nu este permisă, întrucît componenta $\mathcal{M}_1$ acționează tocmai după direcția cea mai defavorabilă.

În particular, considerațiile de mai sus arată că nu orice modificare a secțiunii *prin adăugire de material* duce la *ameliorarea* calităților mecanice ale barei: o atare modificare poate face ca planul sarcinii (care rămîne neschimbat) să nu mai coincidă cu planul de rigiditate, și astfel să facă să apară deplasări și tensiuni uneori catastrofale.

§ 8. BARA ACȚIONATĂ PE BAZA $x_3 = l$ DE SARCINI TANGENȚIALE

În această formulare sînt cuprinse problemele clasice ale *torsiunii* și *încovoierii în consolă*, ambele cu caracter neelementar. Le vom studia împreună, cu ajutorul celor expuse în § 4, și urmărind analogia cu cele spuse în §§ 5—7.

Rezultatele inițiale în această direcție aparțin lui R. Capildeo [1], care a obținut primul soluția prin intermediul unei singure funcții de o variabilă complexă, definită în $\mathcal{D}$. Acest punct de vedere a fost reluat pe altă linie și a căpătat o mare dezvoltare datorită lucrărilor lui L. Milne-Thomson [1], [3].

Avem deci de integrat ecuațiile în tensiuni (4.16) cu condiția la limită (4.17) pe $\mathcal{L} = \operatorname{fr} \mathcal{D}$, și cu condiția integrală (4.18) — și apoi ecuațiile fizico-geometrice (4.21)—(4.24). Bara este solicitată pe baza $x_3 = l$ de o sarcină *tangențială*, așadar cu

$$M = \mathcal{R}_3 = 0. \tag{1}$$

De aci (vezi și § 2, pag. 169) rezultă că, oricare ar fi modul în care este fixată baza $x_3 = 0$, reacțiunile ce apar pe ea sînt static echivalente cu o sarcină tangențială, *plus* eventual un cuplu generat de o sarcină (reacțiune) normală.

Desigur, presupunerea $T \equiv 0$ din (5.3) nu mai poate fi utilizată (vezi (3.17) și (4.18)). Prin urmare, spre deosebire de cazul elementar al sarcinii normale, avem acum de rezolvat efectiv sistemul (4.16).

a) Ecuațiile în tensiuni

Introducînd ipoteza (1) în (4.14) și (3.23), obținem

$$\beta = \beta_3 = 0, \tag{2}$$

astfel că din (4.7) urmează

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(x_3 - l)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c). \tag{3}$$

Constantele α, c sînt cunoscute din (4.12) și (4.8) în funcție de unii parametri globali ai secțiunii și ai sarcinii.

Să transcriem acum sistemul de ecuații (4.16) sub forma

$$T_{,\mathfrak{z}} + \bar{T}_{,\bar{\mathfrak{z}}} + \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c) = 0, \qquad T_{,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} + \frac{1}{4}(1+\nu)^{-1}\alpha = 0. \tag{4}$$

Integrînd[5]) a doua din aceste ecuații în raport cu $\bar{\mathfrak{z}}$, obținem

$$T_{,\mathfrak{z}} = -\frac{1}{4}(1+\nu)^{-1}\alpha\bar{\mathfrak{z}} + T_1(\mathfrak{z}), \tag{5}$$

unde $T_1(\mathfrak{z})$ este o funcție deocamdată arbitrară. Introducînd (5) în prima ecuație (4), obținem

$$T_1(\mathfrak{z}) + \overline{T_1(\mathfrak{z})} + \frac{1}{4}(1+\nu)^{-1}(1+2\nu)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}}) - c = 0. \tag{6}$$

Separînd aci în primul membru o funcție numai de $\mathfrak{z}$, iar în cel de al doilea, o funcție numai de $\bar{\mathfrak{z}}$ (compară și cu (4.20)–(4.22)), deducem

$$T_1(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{4}(1+\nu)^{-1}(1+2\nu)\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \frac{1}{2}c + i\mu\tau, \tag{7}$$

unde μ este constanta lui Coulomb (introdusă aci pentru simetrizarea formulelor finale), iar τ este o constantă reală. (Spre deosebire de raționamentul din § 4, variabila x_3 nu apare aci.)

Introducînd acum (7) în (5) și integrînd în raport cu $\mathfrak{z}$, căpătăm

$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = -\frac{1}{4(1+\nu)}\alpha\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 + \frac{1}{2}c\mathfrak{z} + i\mu\tau\mathfrak{z} + \overline{T_2(\mathfrak{z})}, \tag{8}$$

unde $\overline{T_2(\mathfrak{z})}$ este o funcție deocamdată arbitrară de $\bar{\mathfrak{z}}$.

Întrucît $T = \sigma_{31} + i\sigma_{32}$ este o funcție uniformă și de clasă $C^1(\mathscr{D})$, funcția T_2 rezultă a fi monogenă și uniformă, deci *olomorfă* în $\mathscr{D}$. (Singularități pe $\mathscr{L}$ — de exemplu puncte critice algebrice — pot evident apare.) Notînd $T_2(\mathfrak{z}) = \mu\Phi(\mathfrak{z})$, unde $\Phi(\mathfrak{z})$ este olomorfă în $\mathscr{D}$, și amintind că orice funcție olomorfă posedă o primitivă, vom considera funcția definită de

$$\varphi'(\mathfrak{z}) = \Phi(\mathfrak{z}) = \mu^{-1}T_2(\mathfrak{z}), \quad \varphi(\mathfrak{z}) = p(x_1, x_2) + iq(x_1, x_2). \tag{9}$$

Cu ajutorul ei, relația (8) ia forma definitivă

$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c\right)\mathfrak{z} - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 - \frac{1}{4(1+\nu)}\alpha\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} + \mu\overline{\varphi'(\mathfrak{z})}, \tag{10}$$

---

[5]) Vezi § A.4, pag. 704.

sau încă, dacă e mai comodă utilizarea constantelor E, ν:

$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \mu\left[\left(\mathrm{i}\tau + \frac{1+\nu}{E}c\right)\mathfrak{z} - \frac{1+2\nu}{4E}\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 - \frac{1}{2E}\alpha\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} + \overline{\varphi'(\mathfrak{z})}\right]. \quad (11)$$

Vom numi funcția $\varphi(\mathfrak{z})$ — *funcția lui Capildeo și Milne-Thomson.* În expresia tensiunii tangențiale complexe $T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ intervin constantele cunoscute α, c, și constanta necunoscută τ, pentru determinarea căreia vom face uz de valoarea încă neutilizată a momentului $\mathscr{M}_3$. În acest scop, vom scrie (4.18) sub forma

$$\mathscr{M}_3 = \mathscr{M}_3^0 + \frac{1}{2}\mathrm{i}(R\,\bar{\mathfrak{z}}_r - \bar{R}\,\mathfrak{z}_r), \quad (12)$$

unde

$$\mathscr{M}_3^0 = \frac{1}{2}\mathrm{i}\iint\limits_{\mathscr{D}}(\bar{T}\,\mathfrak{z} - T\,\bar{\mathfrak{z}})\,\mathrm{d}D, \quad (13)$$

sau încă, făcînd uz de expresia (10) a tensiunii $T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$:

$$\mathscr{M}_3^0 = \mu\tau\iint\limits_{\mathscr{D}}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}D - \frac{1-2\nu}{8(1+\nu)}\,\mathrm{Im}\left[\alpha\iint\limits_{\mathscr{D}}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}^2\,\mathrm{d}D\right] -$$

$$- \mu\,\mathrm{Im}\iint\limits_{\mathscr{D}}\mathfrak{z}\varphi'(\mathfrak{z})\,\mathrm{d}D, \quad (14)$$

unde primele două integrale depind numai de geometria lui $\mathscr{D}$. Cea de a treia integrală depinde de φ, și deci de τ (vezi (10)). Prin urmare, (14) poate fi privită ca o relație din care se determină τ, după ce $\varphi(\mathfrak{z})$ este deja determinată (în funcție τ ca parametru). În § 19 vom da formule principial mai simple pentru găsirea lui τ.

OBSERVAȚIE. Putem reveni acum la formula (4.31) pentru $\omega_{12,3}^m$. Întrucît $u_{3,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}$ este o cantitate reală, din (4.23) și (4.30) obținem

$$\omega_{12,3} = -\,\mathrm{Im}\,U_{,3\mathfrak{z}} = -\,(1/\mu)\,\mathrm{Im}\,T_{,\mathfrak{z}}, \quad (15)$$

de unde, utilizînd (5) și (7):

$$\omega_{12,3}^m = -\,(1/\mu\,D)\,\mathrm{Im}\iint\limits_{\mathscr{D}}\left[-\frac{1}{4(1+\nu)}\alpha\bar{\mathfrak{z}} - \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \frac{1}{2}c + \mathrm{i}\mu\tau\right]\mathrm{d}D,$$

și deci

$$\omega_{12,3}^m = -\,\tau + (\nu/E)\,\mathrm{Im}\,(\bar{\alpha}\,\mathfrak{z}_0). \quad (16)$$

Aceasta înlocuiește formula (4.31). Starea elastică a secțiunilor e deci caracterizată de formulele (4.26), (4.29) și (16). Primele două au caracter elementar. După cum va rezulta din § 19, constanta τ depinde de asemenea numai de constantele elastice, de sarcină, și (de data aceasta sub o formă neelementară) de configurația geometrică a lui $\mathscr{D}$.

b) Ecuațiile fizico-geometrice

Pentru determinarea componentelor deplasării, ne rămîn de integrat ecuațiile (4.21)—(4.24), unde vom introduce (3) și (10). Obținem :

$$U_{,\bar{\mathfrak{z}}} = 0, \tag{17}$$

$$U_{,\mathfrak{z}} = -\frac{\nu}{E}(x_3 - l)\,\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \frac{\nu}{E}(x_3 - l)\,c + \mathrm{i}f(x_3), \tag{18}$$

$$U_{,3} = -2u_{3,\bar{\mathfrak{z}}} + \left(\mathrm{i}\tau + \frac{c}{2\mu}\right)\mathfrak{z} - \frac{1+2\nu}{8\mu(1+\nu)}\,\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 - \frac{1}{4\mu(1+\nu)}\,\alpha\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} + \overline{\varphi'(\mathfrak{z})}, \tag{19}$$

$$u_{3,3} = \frac{1}{2E}(x_3 - l)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c). \tag{20}$$

Calculînd derivata $U_{,3\bar{\mathfrak{z}}}$ din (18) și din (19), egalînd valorile obținute, și ținînd seama că $(1+\nu)/E = 1/2\mu$, căpătăm

$$2u_{3,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = -(1/2E)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c) + \mathrm{i}\tau - \mathrm{i}f'(x_3),$$

de unde, întrucît în primul membru avem o cantitate reală :

$$f(x_3) = \tau x_3 + C, \quad u_{3,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = -(1/4E)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c), \tag{21}$$

unde C este o constantă reală.

Integrînd ecuația (20) în raport cu x_3, obținem

$$u_3(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, x_3) = (1/4E)(x_3^2 - 2lx_3)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c) + w_1(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}), \tag{22}$$

unde w_1 este o funcție reală ; a doua relație (21) dă acum

$$w_{1,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = -(1/4E)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c), \tag{23}$$

de unde prin integrare în raport cu $\mathfrak{z}$ și $\bar{\mathfrak{z}}$, obținem

$$w_1(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = -(1/8E)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 4c)\,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} + w_2(\mathfrak{z}) + \overline{w_3(\mathfrak{z})}. \tag{24}$$

Întrucît atît w_1 cît și paranteza din membrul al doilea din (24) sînt cantități reale, deducem că $w_2 \equiv w_3$, astfel că (22) devine

$$u_3 = (1/4E)(x_3^2 - 2lx_3)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c) - (1/8E)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 4c)\,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} + w_2(\mathfrak{z}) + \overline{w_2(\mathfrak{z})}. \tag{25}$$

Ecuațiile (17)–(19) iau acum forma

$$U_{,\bar{\mathfrak{z}}} = 0, \tag{26}$$

$$U_{,\mathfrak{z}} = -\frac{\nu}{E}(x_3 - l)\,\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \frac{\nu}{E}(x_3 - l)\,c + \mathrm{i}\tau x_3 + \mathrm{i}C, \tag{27}$$

$$U_{,3} = -\frac{1}{2E}(x_3^2 - 2lx_3)\,\alpha + \mathrm{i}\tau\mathfrak{z} + \frac{\nu}{E}c\mathfrak{z} - \frac{\nu}{2E}\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 + \left[\overline{\varphi'(\mathfrak{z})} - 2\,\overline{w_2'(\mathfrak{z})}\right]. \tag{28}$$

Ținînd seama de (26) în (28), rezultă că paranteza dreaptă — funcție de $\bar{\mathfrak{z}}$ — se reduce la o constantă complexă $B - \mathrm{i}A$, de unde deducem

$$2w_2(\mathfrak{z}) = \varphi(\mathfrak{z}) - (B + \mathrm{i}A)\,\mathfrak{z} + H + \mathrm{i}K, \tag{29}$$

astfel că (25) devine în definitiv

$$u_3 = \operatorname{Re}\varphi(\mathfrak{z}) + \frac{x_3^2 - 2lx_3}{4E}(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c) - \frac{1}{8E}(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 4c)\,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} - \operatorname{Re}\left[(B + \mathrm{i}A)\,\mathfrak{z}\right] + H. \tag{30}$$

Totodată, ținînd seama de (29) în (28), putem integra ecuațiile (26)–(28), de unde căpătăm pe rînd

$$U(\mathfrak{z}, x_3) = -\frac{x_3^3 - 3lx_3^2}{6E}\alpha + \mathrm{i}\tau\mathfrak{z}\,x_3 + \frac{\nu}{E}c\mathfrak{z}\,x_3 - \frac{\nu}{2E}\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 x_3 + (B - \mathrm{i}A)\,x_3 + U_1(\mathfrak{z}),$$

$$U(\mathfrak{z}, x_3) = -\frac{\nu}{2E}(x_3 - l)\,\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 + \frac{\nu}{E}(x_3 - l)\,c\mathfrak{z} + \mathrm{i}\tau\mathfrak{z}\,x_3 + \mathrm{i}C\mathfrak{z} + U_2(x_3),$$

ceea ce e posibil dacă și numai dacă

$$U_1(\mathfrak{z}) - \frac{\nu}{2E}l\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 + \frac{\nu}{E}lc\mathfrak{z} - \mathrm{i}C\mathfrak{z} = U_2(x_3) + \frac{x_3^3 - 3lx_3^2}{6E}\alpha - (B - \mathrm{i}A)\,x_3 \equiv F + \mathrm{i}G,$$

de unde conchidem în definitiv

$$U(\mathfrak{z}, x_3) = -\frac{x_3^3 - 3lx_3^2}{6E}\alpha - \frac{\nu}{2E}(x_3 - l)(\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 - 2c\mathfrak{z}) + \mathrm{i}\tau\mathfrak{z}\,x_3 + (B - \mathrm{i}A)\,x_3 + \mathrm{i}C\mathfrak{z} + F + \mathrm{i}G. \tag{31}$$

Termenii care depind de constantele A, B, C, F, G, H sînt identici cu cei din (5.14) şi (5.16), şi corespund deci unei roto-translaţii rigide a barei în ansamblu (vezi (5.17)). Făcînd abstracţie de ei, obţinem componentele deplasării sub forma

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\alpha}{2E}\left(\frac{1}{3}x_3^3 - lx_3^2\right) - \frac{\nu}{2E}(x_3 - l)(\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 - 2c\mathfrak{z}) + \mathrm{i}\tau\mathfrak{z}\,x_3, \\ u_3 &= \operatorname{Re}\varphi(\mathfrak{z}) + \frac{x_3^2 - 2lx_3}{4E}(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 2c) - \frac{1}{8E}(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 4c)\,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}. \end{aligned} \tag{32}$$

Formulele (3), (10) şi (32), împreună cu relaţiile (4.12), (4.8) şi (14) care dau valorile constantelor α, c, τ, rezolvă problema: funcţia lui Capildeo şi Milne-Thomson se dovedeşte a fi un *potenţial de deplasare* (şi deci şi de tensiune) al problemei. Aceste formule concentrează acum întreaga dificultate asupra determinării funcţiei $\varphi(\mathfrak{z})$ din condiţia la limită (4.17) şi condiţia de normare (4.18), singurele rămase încă nefolosite.

Pentru a fixa constantele A, B, C, F, G, H sînt necesare date suplimentare. Din punct de vedere practic, este important să exprimăm exact condiţiile de fixare ale barei — condiţii care depind adesea de natura materialelor barei şi corpului în care ea este fixată, precum şi de felul în care este realizată fixarea (sudură, nituire etc.). Eventuale greşeli în această chestiune nu alterează valorile deformaţiei şi tensiunii, dar pot conduce la valori cu totul eronate ale componentelor deplasării.

§ 9. ANALIZA STĂRII ELASTICE A BAREI ACŢIONATE PE BAZA $x_3 = l$ DE SARCINI TANGENŢIALE

a) Comportarea secţiunilor

Ca şi în § 6, începem prin a face uz de relaţiile generale (4.26), (4.29) şi (4.31) — înlocuită acum prin (8.16). Întrucît avem $M = \mathcal{R}_3 = 0$, din (4.26) deducem

$$\overset{m}{\varepsilon}_{31} + \mathrm{i}\overset{m}{\varepsilon}_{32} = (1/2\mu)\,(R/D), \qquad \overset{m}{\varepsilon}_{33} = 0. \tag{1}$$

Mai departe, ţinînd seama de expresiile (8.11), (8.30) şi (8.31) ale tensiunii şi deplasării în (4.27) şi (4.30), obţinem

$$\begin{aligned} \omega_{31} + \mathrm{i}\omega_{32} &= -U_{,3} + \frac{1}{2\mu}T = \frac{\alpha}{2E}(x_3^2 - 2lx_3) - \frac{1-2\nu}{8E}\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 + \\ &\quad + \frac{1-\nu}{2E}c\mathfrak{z} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\tau\mathfrak{z} - \frac{1}{4E}\alpha\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} + \frac{1}{2}\overline{\varphi'(\mathfrak{z})} - B + \mathrm{i}A, \\ \omega_{12} &= -\operatorname{Im} U_{,\mathfrak{z}} = -\frac{\mathrm{i}\nu}{2E}(x_3 - l)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} - \alpha\bar{\mathfrak{z}}) - \tau x_3 - C, \end{aligned} \tag{2}$$

astfel că (vezi și (4.29) și (8.16))

$$\omega^m_{31,3} + i\omega^m_{32,3} = (\alpha/E)(x_3 - l), \tag{3}$$

și

$$\omega^m_{12,3} = -\tau + (\nu/E)\,\mathrm{Im}\,(\bar{\alpha}\mathfrak{z}_0). \tag{4}$$

Prin urmare, secțiunile sînt supuse simultan la alunecare, încovoiere și torsiune. Spre deosebire de cazul încovoierii pure (vezi (6.3)), rotirile din (3) sînt funcții de x_3; așadar, dacă $R \neq 0$, starea secțiunilor nu este aceeași în lungul barei.

Măsura alunecării și încovoierii rezultă din (1) și (3) ca funcție de R. Măsura torsiunii rezultă din (4) ca funcție de R și $\mathcal{M}_3$.

De aci urmează că prezintă interes cazul particular $R = 0$, $\mathcal{M}_3 \neq 0$: alunecările și încovoierile sînt nule, tensiunea normală σ_{33} este de asemenea nulă, iar bara, supusă în toate secțiunile numai la tensiuni tangențiale $T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$, se zice că este în stare de *torsiune pură*. Această stare va fi studiată în §§ 13–18.

Cazul $R \neq 0$, $\mathcal{M}_3 = 0$ *nu este* complementar celui dintîi. (Dacă $R \neq 0$, egalitatea $\mathcal{M}_3 = 0$ în raport cu un anumit punct nu are semnificație fizică.)

Am văzut în § 2 că sarcina este echivalentă cu o forță unică dirijată în lungul axei centrale (2.3):

$$\mathcal{R}_2 x_1 - \mathcal{R}_1 x_2 - \mathcal{M}^0_3 = 0, \quad x_3 = l. \tag{5}$$

Notînd cu $\mathfrak{z}_r$ punctul de aplicare al forței R, momentul acesteia față de origine este dirijat după Ox_3 și are mărimea $\mathcal{R}_2 x^r_1 - \mathcal{R}_1 x^r_2$. O astfel de forță este deci static echivalentă cu sistemul format din forța R aplicată în origine, *plus* un cuplu de moment $\mathcal{M}_3 = \mathcal{R}_2 x^r_1 - \mathcal{R}_1 x^r_2$ (vezi și (3.26)).

Oricum am alege originea (eventual chiar în $\mathfrak{z}_r$), formula (4) arată că trebuie să ne așteptăm în general la apariția unei torsiuni nenule.

Așadar, încovoierea sub acțiunea unei forțe tangențiale este întotdeauna însoțită de alunecare, și în general și de torsiune. Acest tip de încovoiere se numește *încovoiere în consolă*, și va fi studiat în §§ 19–22.

Pentru un sistem de sarcini de rezultantă $R \neq 0$, nu prezintă deci utilitate reducerea torsorului la forma minimală, întrucît prin aceasta torsiunea nu dispare. Dacă $R \neq 0$, pentru o origine și axe alese într-un mod oarecare, vom considera deci cazul general $R \neq 0$ și $\mathcal{M}_3 \neq 0$ relativ la un punct oarecare.

b) Elemente geometrice esențiale

Ca și în § 6, vom alege acum drept axe, axele centrale principale de inerție ale secțiunii. Din (4.12) obținem

$$\alpha = (\mathcal{R}_1/I_2) + i(\mathcal{R}_2/I_1), \tag{6}$$

astfel că formulele (8.3) și (8.32) devin (compară cu (6.17) și (6.18))

$$\sigma_{33} = (x_3 - l)\,[(\mathcal{R}_1/I_2)\,x_1 + (\mathcal{R}_2/I_1)\,x_2], \tag{7}$$

respectiv

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\mathcal{R}_1}{2EI_2}\left[\frac{1}{3}\,x_3^3 - lx_3^2 + \nu(x_3 - l)\,(x_1^2 - x_2^2)\right] - \\ &\quad - \nu\frac{\mathcal{R}_2}{EI_1}(x_3 - l)\,x_1x_2 - \tau x_3x_2, \\ u_2 &= -\frac{\mathcal{R}_2}{2EI_1}\left[\frac{1}{3}\,x_3^3 - lx_3^2 + \nu(x_3 - l)\,(x_2^2 - x_1^2)\right] - \\ &\quad - \nu\frac{\mathcal{R}_1}{EI_2}(x_3 - l)\,x_1x_2 + \tau x_3x_1, \\ u_3 &= \mathrm{Re}\,\varphi(\mathfrak{z}) + \left(\frac{\mathcal{R}_1}{EI_2}\,x_1 + \frac{\mathcal{R}_2}{EI_1}\,x_2\right)\left[\frac{1}{2}\,x_3^2 - lx_3 - \frac{1}{4}\,(x_1^2 + x_2^2)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Luînd aci $x_1 = x_2 = 0$, obținem ecuația liniei elastice (compară cu (6.19), (6.20)):

$$\begin{aligned} u_1^0 &= -\frac{\mathcal{R}_1}{2EI_2}\left(\frac{1}{3}\,x_3^3 - lx_3^2\right), \quad u_2^0 = -\frac{\mathcal{R}_2}{2EI_1}\left(\frac{1}{3}\,x_3^3 - lx_3^2\right), \\ u_3^0 &= \mathrm{Re}\,\varphi(0) = \mathrm{const.}, \end{aligned} \tag{9}$$

sau încă

$$x_1 = -\frac{\mathcal{R}_1}{2EI_2}\left(\frac{1}{3}\,x_3^3 - lx_3^2\right), \quad x_2 = -\frac{\mathcal{R}_2}{2EI_1}\left(\frac{1}{3}\,x_3^3 - lx_3^2\right), \tag{10}$$

de unde rezultă evident că linia elastică este o curbă plană. Ca și în cazul încovoierii pure, sîntem deci conduși la a considera un *plan de încovoiere*, de ecuație

$$(\mathcal{R}_2/I_1)\,x_1 - (\mathcal{R}_1/I_2)\,x_2 = 0. \tag{11}$$

De asemenea, din (7) deducem că există un *plan neutru*

$$(\mathcal{R}_1/I_2)\,x_1 + (\mathcal{R}_2/I_1)\,x_2 = 0, \tag{12}$$

pe care avem $\sigma_{33} = \varepsilon_{33} = 0$. (Compară cu (6.21), (6.22).)

Planele (11) și (12) sînt evident perpendiculare.

Pentru a determina raza de curbură a liniei elastice, avem de repetat calculele din § 6. Luînd $x_3 \cong s$, și deci $\mathrm{d}^2x_3 = 0$, obținem din (6.23) și (10)

$$A = -(\mathcal{R}_2/EI_1)\,(x_3 - l)\,(\mathrm{d}x_3)^3, \quad B = -(\mathcal{R}_1/EI_2)\,(x_3 - l)\,(\mathrm{d}x_3)^3, \quad C = 0, \tag{13}$$

de unde în definitiv obținem formulele corespunzătoare cu (6.29):

$$\rho_1^{-1} = -(\mathcal{R}_1/EI_2)(x_3 - l), \quad \rho_2^{-1} = -(\mathcal{R}_2/EI_1)(x_3 - l), \quad \rho_0^{-2} = \rho_1^{-2} + \rho_2^{-2}. \quad (14)$$

Semnele alese pentru ρ_1, ρ_2 se explică ușor, ținînd seama că $x_3 - l < 0$, și că pentru $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 > 0$, din (9) urmează $u_1^0 > 0$, $u_2^0 > 0$.

Introducînd $\beta = \mathcal{R}_3 = 0$ în (4.10), deducem, pe o secțiune oarecare,

$$\mathsf{M}(x_3) = -\mathrm{i}(x_3 - l)\,\mathsf{R}, \quad (15)$$

adică (vezi și (3.24), (3.25)):

$$\mathcal{M}_1(x_3) = (x_3 - l)\,\mathcal{R}_2, \quad \mathcal{M}_2(x_3) = -(x_3 - l)\,\mathcal{R}_1, \quad (16)$$

astfel că primele două formule (14) devin

$$\rho_1^{-1} = \mathcal{M}_2(x_3)/EI_2, \quad \rho_2^{-1} = -\mathcal{M}_1(x_3)/EI_1. \quad (17)$$

Sub această formă, analogia cu (6.29) este evidentă. (Totuși, momentele sînt aci funcții de x_3.) Acest fapt permite să interpretăm fenomenul încovoierii în consolă — *din punctul de vedere al acțiunii momentelor* — ca o suprapunere de încovoieri pure *locale*.

A treia formulă (14) arată că încovoierea nu mai are loc în arc de cerc.

Din (9) se vede că, pentru $x_3 \cong s$, avem

$$\partial^2 u_1^0/\partial x_3^2 = \rho_1^{-1}, \quad \partial^2 u_2^0/\partial x_3^2 = \rho_2^{-1}, \quad (18)$$

de unde, comparînd cu (17),

$$\partial^2 u_1^0/\partial x_3^2 = \mathcal{M}_2(x_3)/EI_2, \quad \partial^2 u_2^0/\partial x_3^2 = -\mathcal{M}_1(x_3)/EI_1, \quad (19)$$

ceea ce justifică teorema momentelor încovoietoare din rezistența materialelor.

Să înlocuim în (8.32) expresiile $\frac{1}{3}x_3^3 - lx_3^2$ și $x_3^2 - 2lx_3$ prin $\frac{1}{3}(x_3 - l)^3$, respectiv $(x_3 - l)^2$, ceea ce revine la a adăuga deplasării o deplasare rigidă. Ținînd seama de (14), obținem acum

$$u_1 = \frac{1}{2}\rho_1^{-1}\left[\frac{1}{3}(x_3 - l)^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)\right] + \nu\rho_2^{-1}x_1x_2 - \tau x_3x_2,$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\rho_2^{-1}\left[\frac{1}{3}(x_3 - l)^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)\right] + \nu\rho_1^{-1}x_1x_2 + \tau x_3x_1, \quad (20)$$

$$u_3 = \mathrm{Re}\,\varphi(\mathfrak{z}) - (\rho_1^{-1}x_1 + \rho_2^{-1}x_2)\left[\frac{1}{2}(x_3 - l) - \frac{1}{4}\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3 - l}\right],$$

relații apropiate de (6.31), *dacă facem abstracție de prezența lui* $\varphi(\mathfrak{z})$. De aci rezultă totodată limpede că *problema încovoierii consolei nu poate fi rezolvată corect în cadrul ipotezei secțiunilor plane.*

Neglijînd încă în (20) componentele unei roto-translații rigide, obținem pentru linia elastică expresii apropiate de (6.32):

$$u_1^0 = \frac{1}{2}\,\rho_1^{-1}\left(\frac{1}{3}\,x_3^2 - \frac{2}{3}\,lx_3\right),\quad u_2^0 = \frac{1}{2}\,\rho_2^{-1}\left(\frac{1}{3}\,x_3^2 - \frac{2}{3}\,lx_3\right),\quad u_3^0 = \mathrm{Re}\,\varphi(0). \tag{21}$$

Mai departe, din (7), (11) și (12) obținem acum pentru *tensiunea normală*:

$$\sigma_{33} = -E(\rho_1^{-1}\,x_1 + \rho_2^{-1}\,x_2); \tag{22}$$

pentru *planul de încovoiere*:

$$\rho_2^{-1}\,x_1 - \rho_1^{-1}\,x_2 = 0; \tag{23}$$

pentru *planul neutru*:

$$\rho_1^{-1}\,x_1 + \rho_2^{-1}\,x_2 = 0. \tag{24}$$

Considerînd și planul ce trece prin origine și conține vectorul de componente $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ — obținem, ținînd seama de (14), pentru *planul sarcinii*:

$$I_1\rho_2^{-1}\,x_1 - I_2\rho_1^{-1}\,x_2 = 0. \tag{25}$$

Relațiile (22)—(25) *coincid* cu relațiile corespunzătoare (6.30), (6.33), (6.34) și (6.47) din cazul încovoierii pure — cu deosebirea că razele de curbură ρ_1, ρ_2 sînt acum funcții liniare de x_3.

La fel ca în problema încovoierii pure, își găsesc deci și aci justificare îndepărtarea materialului de planul neutru și folosirea de bare cu momente centrale principale de inerție mult diferite. De asemenea își păstrează valabilitatea cele spuse în § 6 relativ la încovoierea în planul de rigiditate, și la caracterul variației stării elastice o dată cu abaterea planului sarcinii de la planul de rigiditate.

Desigur însă că *de aci nu rezultă că fenomenul încovoierii în consolă ar fi de același tip cu cel al încovoierii pure*: cele de mai sus se referă numai la informațiile pe care componenta elementară a soluției — cea relativă la tensiunile normale — ni le furnizează; ele nu se referă la fenomenele de alunecare și torsionare, determinate de apariția tensiunilor tangențiale.

OBSERVAȚIE. Unele relații din teoria încovoierii în consolă pot fi obținute direct din cele corespunzătoare, cunoscute din teoria încovoierii pure. Astfel, componenta σ_{33} se capătă înlocuind pur și simplu β prin $(x_3 - l)\alpha$. Din (4.15) și (4.12) se vede că aceasta revine la a înlocui M prin $-\,\mathrm{i}R(x_3 - l)$, adică $\mathcal{M}_1$ prin $(x_3 - l)\,\mathcal{R}_2$, și $-\,\mathcal{M}_2$ prin $(x_3 - l)\mathcal{R}_1$. Relația (6.17) se transformă astfel direct în (7), dar transcrierea relației (6.18) nu este permisă, întrucît deplasarea tangențială depinde și de tensiunea tangențială, care este nulă în cazul încovoierii pure. Dimpotrivă, expresiile (6.30), (6.33), (6.34) și (6.47) — care depind numai de tensiunea normală — conduc imediat la (22)—(25).

§ 10. OBSERVAŢII ASUPRA SOLUŢIEI PROBLEMEI ANTIPLANE

Studiul problemei antiplane a cerut două secole de la prima sa formulare pînă la prima sa soluţie, şi a putut fi dus pînă la capăt numai datorită metodei semiinverse şi a principiului lui Saint-Venant.

Istoriceşte vorbind, metoda semiinversă a fost utilizată separat, cu ipoteze distincte (uneori în tensiuni, alteori în deplasări) pentru fiecare din sub-problemele ce se desprind din problema antiplană. În fapt însă, ipoteza unică (3.9) se dovedeşte îndestulătoare pentru rezolvarea coerentă a întregii probleme, constituind astfel un exemplu ne-banal de fertilitate a metodei semiinverse.

La examinarea rezultatelor obţinute, se constată caracterul elementar al soluţiei corespunzătoare sarcinii normale, şi caracterul neelementar al celei corespunzătoare sarcinii tangenţiale.

Tensiunea normală σ_{33} şi deplasarea tangenţială complexă U sînt întotdeauna polinoame în $\mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{z}}$, x_3. Tensiunea tangenţială complexă T şi deplasarea normală u_3 depind esenţialmente de funcţia $\varphi(\mathfrak{z})$, ceea ce în cazul torsiunii şi al încovoierii consolei conferă caracterul ne-elementar al acestei probleme.

Faptul că atît în problema încovoierii pure, cît şi în problema încovoierii consolei avem de-a face la prima vedere cu încovoierea barei sub acţiunea unor momente încovoietoare în fiecare secţiune, nu trebuie să mascheze deosebirea principială dintre cele două probleme, care constă tocmai în apariţia tensiunilor tangenţiale în cea de a doua dintre ele.

Toate soluţiile astfel obţinute satisfac ecuaţiile elasticităţii pentru forţe de volum nule şi pentru suprafaţa laterală liberă.

a) Aplicarea principiului lui Saint-Venant

În ce priveşte solicitarea bazelor, este frecvent cazul în care pe una din ele este aplicată o sarcină activă, de natură cu totul oarecare, în timp ce pe cealaltă bază sînt aplicate reacţiuni, funcţii de sarcina activă şi care au ca rol solidarizarea barei cu ansamblul unei construcţii, maşini etc.

Avem deci de-a face în fond cu date de tip Neumann — dar sub o formă integrală — pe una din baze, fie ea $x_3 = l$, şi ne rămîne să ne preocupăm de natura deplasărilor pe baza $x_3 = 0$.

Acestea rezultă, pentru întinderea pură, din (6.10):

$$u_1 = -(\nu \mathcal{R}_3/ED)\, x_1, \quad u_2 = -(\nu \mathcal{R}_3/ED)\, x_2, \quad u_3 = 0; \tag{1}$$

pentru încovoierea pură, din (6.14):

$$U(\mathfrak{z}, 0) = -(\nu/2E)\,(\bar{\beta}\,\mathfrak{z}^2 - 2d\mathfrak{z}), \quad u_3(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, 0) = 0, \tag{2}$$

pentru torsiune și încovoierea în consolă, din (8.32):

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{z}, 0) &= (\nu l/2E)(\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 - 2c\mathfrak{z}), \\ u_3(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, 0) &= \operatorname{Re} \varphi(\mathfrak{z}) - (1/8E)(\bar{\alpha}\mathfrak{z} + \alpha\bar{\mathfrak{z}} - 4c)\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Valorile la limită ale tensiunilor pe baza $x_3 = l$ rezultă, pentru întinderea pură, din (6.10):

$$\sigma_{33}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, l) = \mathcal{R}_3/D; \tag{4}$$

pentru încovoierea pură, din (6.13):

$$\sigma_{33}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, l) = \frac{1}{2}(\bar{\beta}\mathfrak{z} + \beta\bar{\mathfrak{z}} - 2d); \tag{5}$$

pentru torsiune și încovoierea în consolă, din (8.3), (8.10):

$$\sigma_{33}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, l) = 0, \quad \sigma_{31} + i\sigma_{32} = T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) \not\equiv 0. \tag{6}$$

În virtutea teoremei de unicitate, soluțiile obținute sînt soluții *exacte* (inclusiv pentru cazul barei cilindrice scurte), și chiar *singurele* soluții regulate posibile în cazul liniar — dacă baza $x_3 = l$ este acționată de sarcini distribuite după legile (4)—(6) și dacă punctele bazei $x_3 = 0$ se deplasează în conformitate cu (1)—(3).

Aparent, aceasta înseamnă că soluțiile prezentate mai sus corespund numai condițiilor la limită — foarte restrictive — din (1)—(6). Importanța principiului lui Saint-Venant constă tocmai în faptul că el garantează valabilitatea *universală* a acestor soluții.

Pentru aceasta, este suficient ca bara să fie destul de zveltă (cel puțin de 3—4 ori mai lungă decît dimensiunile ei transversale); ca natura fixării bazei $x_3 = 0$ să nu contrazică flagrant condițiile (1)—(3) (căci pentru deplasări nu dispunem de un echivalent al principiului lui Saint-Venant); ca secțiunea $\mathscr{D}$ să fie de așa natură încît aplicarea principiului lui Saint-Venant să fie permisă.

Prima condiție este evidentă.

Cea de a doua cere ca, în cazul întinderii sau încovoierii pure, baza fixată să nu admită deplasări în lungul axei Ox_3, și să fie îngăduită o *anume* deplasare în chiar planul ei; iar în cazul torsiunii și al încovoierii în consolă, să fie îngăduită o *anumită* libertate de deplasare a bazei fixate, atît în planul ei, cît și în afara acesteia (*deplanare*).

Dacă o astfel de libertate nu există (de ex., dacă $u_3(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}, 0) \equiv 0$), soluția își pierde valabilitatea. În acest caz apare o legătură între tensiunile tangențiale și cele longitudinale, care pierd caracterul lor elementar.

Încovoierea sau torsiunea în sensul problemei antiplane se numește *liberă*; în cazul contrar mai sus menționat, spunem că avem de-a face cu încovoiere sau torsiune *împiedicată*. Aceste din urmă stări sînt încă destul de puțin studiate, cu toată importanța lor. Pentru unele rezultate mai vechi, vezi de exemplu A. Föppl și L. Föppl [1], § 77; P. Papkovici [4], § 7.21; S. Timoshenko și J. Goodier [1], § 103. Pentru torsiunea împiedicată, vezi încă articolele lui E. Reissner [5]—[7]; G. Gheongian [1], J. Nowinski [1], V. Prokopov [1] (pentru secțiuni pline); S. Birman [1], K. Kovalev și I. Iagn [1] (pentru secțiuni închise cu pereți subțiri).

În fine, a treia condiție cere ca secțiunea $\mathscr{D}$ să fie de așa natură încît orice sistem de sarcini echivalent cu zero aplicat pe baza $x_3 = l$ să dea tensiuni ce tind la zero la distanțe relativ mici de bază. Pot exista cazuri cînd lucrurile nu se petrec așa. Într-adevăr, să considerăm o bară de secțiune în I, solicitată de patru forțe dispuse ca în figură. Dacă grosimea pereților barei este mică (*profil cu pereți subțiri*) atunci cele două aripi ale profilului se încovoaie — în direcții opuse — separat, și tensiunile σ_{33} sînt cu atît mai mari, cu cît grosimea inimii (care solidarizează aripile) este mai mică. Evident, nerespectarea principiului lui Saint-Venant provine din faptul că cea mai mică dintre dimensiunile bazei este mică în raport cu dimensiunile ei de ansamblu, astfel încît efectul de redistribuție a tensiunilor, caracteristic pentru principiul lui Saint-Venant, nu se mai poate manifesta.

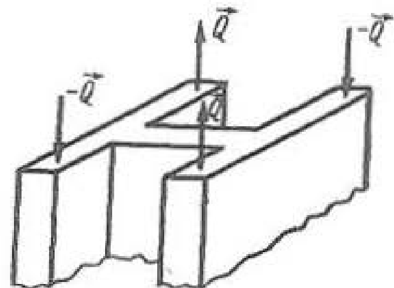


Fig. 5.10.1

Primejdia nerespectării celei de a treia condiții este deosebit de mare în cazul — de mare importanță practică — al unor profile cu pereți subțiri, cum sînt de pildă profilele uzuale de traverse (în T, în I, corniere), grinzi, tuburi, frecvent folosite în construcții. Menționăm că și problema flambajului unor astfel de bare se pune altfel decît la barele cu secțiune „plină". Pentru barele cu pereți subțiri, cercetările lui V. Z. Vlassov [2], [3] au făcut epocă. Pentru unele indicații, vezi de ex. N. Beliaev [2], capitolul 30; M. Filonenko-Borodici et al. [1], volumul 2, capitolele 15, 18 și 19; Iu. Rabotnov [2], capitolul 11; vezi încă articolul de analiză al lui G. Djanelidze [2].

În cadrul astfel precizat, cele de mai sus trebuie înțelese în sensul că, pentru fiecare bară dată, solicitată de o sarcină oarecare pe baze, există o *anumită* repartiție-standard a deplasărilor, deformațiilor și tensiunilor în interior, repartiție către care cea reală *tinde* la distanță suficientă de baze dacă condițiile la limită pe baza $x_3 = l$ sînt respectate global, și cu care ea *coincide* dacă condițiile pe ambele baze sînt respectate în fiecare punct.

Soluția problemei antiplane constituie un mare pas înainte față de soluțiile rezistenței materialelor. Într-adevăr, în cadrul problemei antiplane, numai *sarcina* e schematizată, fiind înlocuită cu o anumită sarcină-standard, de același torsor. Aspectul *geometric* al barei și al deformației sale este însă deplin respectat. Dimpotrivă, în rezistența materialelor — atunci cînd se poate ataca problema — se schematizează și acest din urmă aspect, ceea ce conduce la incompatibilități cu ecuațiile exacte ale fenomenului. (Numai ecuațiile de echilibru sînt respectate.)

Principiul lui Saint-Venant afirmă că în cazul barei zvelte, repartiția tensiunilor depinde în esență de geometria secțiunii și în plus, *numai ca parametri*, de anumiți factori ce descriu sarcina și materialul. Această soluție este deci cu atît mai de preț cu cît aspectul secțiunii este mai complicat, și deci tensiunile — funcții de $\varphi(\mathfrak{z})$ — se abat mai mult de la cele prezumate de rezistența materialelor.

Spre deosebire de rezistența materialelor, caracterul unidimensional al problemei constă deci aci *numai* în aplicarea principiului lui Saint-Venant.

Chestiunea se complică încă mai mult în cazul torsiunii și încovoierii împiedicate a barelor cu pereți subțiri. Împiedicarea deplasării anumitor secțiuni are o mare importanță practică, întrucît apariția de noi componente ale tensiunii echivalează cu intrarea în funcțiune a unor rezerve de rezistență ale materialului, nefolosite în cazul torsiunii și încovoierii libere.

b) Criterii de rezistență

Să examinăm acum pe scurt chestiunea rezistenței barei cilindrice, folosind criteriile (4.3.1) și (4.3.2).

Amintim că tensorul tensiune are aci forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{31} \\ 0 & 0 & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Invarianții acestui tensor (vezi (2.5.19)) au forma

$$\Sigma_1 = \sigma_{33}, \quad \Sigma_2 = -\sigma_{31}^2 - \sigma_{32}^2 = -|T|^2, \quad \Sigma_3 = 0; \tag{8}$$

ecuația cubică (2.5.20) devine

$$\sigma^3 - \sigma_{33}\,\sigma^2 - |T|^2\,\sigma = 0, \tag{9}$$

și are rădăcinile

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4|T|^2}\right], \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}\left[\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4|T|^2}\right]. \tag{10}$$

Oricare ar fi semnul componentei σ_{33}, avem evident $\sigma_1 \geqslant 0 \geqslant \sigma_3$.

În cazul întinderii și încovoierii pure, (10) se reduce la

$$\sigma_1 = \sigma_{33}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0. \tag{11}$$

În cazul torsiunii pure, găsim

$$\sigma_1 = |T|, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -|T|. \tag{12}$$

Stările de întindere și de încovoiere pură pot fi deci privite ca stări de întindere *în fiecare punct*, axele $Ox_1x_2x_3$ fiind axele principale; starea de torsiune este o stare de alunecare pură (compară cu (3.4.8) și (3.4.11)).

Conform criteriului tensiunilor tangențiale maximale [6]), limita de rezistență a materialului este dată de (4.3.1):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4|T|^2} \leqslant \sigma_s,$$

[6]) Aci este vorba de tensiunea tangențială T pe un element de suprafață din planul bisector a două din planele principale ce trec prin punctul considerat — ceea ce nu trebuie desigur confundat cu tensiunea tangențială (complexă) T pe un element de suprafață din planul secțiunii normale a barei.

de unde deducem

$$\sigma_{33}^2 + 4\,|\,T\,|^2 \leqslant \sigma_s^2\,. \tag{13}$$

Folosind criteriul (4.3.2) al energiei de distorsiune maximale, obţinem condiţia

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leqslant \sigma_s^2\,,$$

de unde urmează

$$\sigma_{33}^2 + 3\,|\,T\,|^2 \leqslant \sigma_s^2\,. \tag{14}$$

Rezultatele diferă prin ponderea deosebită a termenului corespunzător tensiunii tangenţiale. Dar ambele arată că corpul este cu atît mai periclitat într-un punct dat, cu cît acest punct este mai departe de planul neutru, şi cu cît *în acel punct* modulul tensiunii tangenţiale complexe este mai mare.

Din (13) şi (14) urmează în particular că, cu cît bara e mai lungă, cu atît rolul componentei σ_{33} e mai important în încovoierea în consolă (vezi (8.3)). Desigur, secţiunea cea mai periclitată e în acest caz $x_3 = 0$.

Pentru determinarea extremelor funcţiilor din (13), (14), trebuie să folosim formulele (A.4.15)—(A.4.20). (Valorile pe frontieră necesită un examen separat.)

În cazul întinderii sau încovoierii pure, chestiunea se reduce la determinarea punctelor celor mai depărtate de planul neutru; în cazul torsiunii pure, la găsirea punctelor de maxim ale funcţiei $|\,T\,|^2$.

Pentru a determina direcţiile principale într-un punct oarecare, avem de rezolvat sistemul în tensiuni analog cu (1.7.5) care, ţinînd seama de (7), se scrie acum:

$$-\sigma_1 n_{11} + \sigma_{13} n_{13} = 0\,, \qquad -\sigma_1 n_{12} + \sigma_{23} n_{13} = 0\,, \tag{15}$$
$$\sigma_{13} n_{11} + \sigma_{23} n_{12} + (\sigma_{33} - \sigma_1)\, n_{13} = 0\,.$$

A treia ecuaţie (15) poate fi înlocuită cu condiţia de normare

$$n_{11}^2 + n_{12}^2 + n_{13}^2 = 1\,. \tag{16}$$

Introducînd primele două ecuaţii (15) în (16), deducem mai întîi

$$n_{13}^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + |\,T\,|^2} = 1 - 2\,\frac{|\,T\,|^2}{\sigma_{33}^2 + \sigma_{33}\sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,|\,T\,|^2} + 4\,|\,T\,|^2}\,, \tag{17}$$

şi mai departe, reţinînd de aci soluţia $n_{13} > 0$, ţinînd seama că $\sigma_1 \geqslant 0$, şi revenind la primele două ecuaţii (15):

$$n_{11} = \sigma_{31}/\sqrt{\sigma_1^2 + |\,T\,|^2}\,, \quad n_{12} = \sigma_{32}/\sqrt{\sigma_1^2 + |\,T\,|^2}\,, \quad n_{13} = \sigma_1/\sqrt{\sigma_1^2 + |\,T\,|^2}\,, \tag{18}$$

iar în cazul particular al torsiunii (vezi (12)):

$$n_{11} = \sigma_{31}/\sqrt{2}\,|\,T\,|\,, \quad n_{12} = \sigma_{32}/\sqrt{2}\,|\,T\,|\,, \quad n_{13} = 1/\sqrt{2}\,. \tag{19}$$

Cosinușii directori definiți în (18) sînt funcții și de x_3, în timp ce aceia din (19) depind numai de x_1, x_2. În particular, din a treia relație (19) avem

$$\arccos n_{13} = \widehat{(x_1', x_3)} = \pm\, \pi/4, \tag{20}$$

astfel că, la torsiune, elementele de suprafață pe care acționează tensiunea normală maximală σ_1 au normala înclinată sub un unghi de 45° față de axa cilindrului. Din (17) urmează că în cazul încovoierii în consolă, pentru $\sigma_{33} > 0$ avem $n_{13}^2 \geqslant 1/2$, astfel că unghiul corespunzător este mai mic decît 45°. Pentru l mare și x_3 mic, n_{13} este apropiat de 1, și elementul pe care acționează tensiunea normală maximală formează un unghi foarte mic cu secțiunea normală $x_3 = \text{const}$.

Aceste rezultate sînt în general confirmate de faptele experimentale. În particular, la barele din materiale casante supuse la torsiune, se constată distrugerea prin separare sub acțiunea sarcinilor normale maximale (vezi și § 4.3, pag. 132) după suprafețe ce formează un unghi de 45° cu secțiunile normale.

§ 11. FUNCȚIA LUI CAPILDEO ȘI MILNE-THOMSON

a) Probleme la limită

După raționamentele din §§ 8–10, problema este redusă la a găsi funcția $\varphi(\mathfrak{z})$. În acest scop, dispunem de proprietatea de olomorfie a derivatei sale, de condiția la limită (4.17), de relația (8.10), și de unele informații ce decurg din (8.32).

Amintim că punctul curent pe frontieră se va nota $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}\,|_{\mathscr{L}}$. De asemenea, că toate valorile la limită sînt înțelese în sensul din (1.1.6)–(1.1.8), pentru $\mathfrak{z} \to \mathfrak{t} \in \mathscr{L}$, $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}^i$. În genere, nu vom specifica faptul că ne situăm pe frontieră — aceasta va rezulta din notație și din context.

Introducînd (8.10) în (4.17), obținem condiția (valabilă pe toate componentele $\mathscr{L}_j$ ale frontierei $\mathscr{L}$ a lui $\mathscr{D}$):

$$\mu \operatorname{Im}[\varphi'(\mathfrak{t})\ \mathfrak{t}'(s)] = \operatorname{Im}\left\{\left[\left(\mathrm{i}\mu\tau - \frac{1}{2}c\right) + \frac{1}{4(1+\nu)}\alpha\mathfrak{t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\alpha\bar{\mathfrak{t}}\right]\bar{\mathfrak{t}}\,\mathfrak{t}'(s)\right\}. \tag{1}$$

Din expresia (8.32) a componentei u_3 — care trebuie să fie uniformă — rezultă că au sens numai acele soluții pentru care funcția $\mathrm{p}(x_1, x_2) = \operatorname{Re}\varphi(\mathfrak{z})$ este uniformă. (Vezi și § 15, exemplul *a*).

Întrucît avem $\varphi(\mathfrak{z}) = \mathsf{p} + i\mathsf{q}$ (vezi (8.9)), iar funcţiile p şi q satisfac astfel ecuaţiile Cauchy-Riemann (A.5.4), deducem — folosind (A.3.12) — că (1) devine:

$$\mu \mathsf{p}_{,n} = \operatorname{Im}\left\{\left[\left(i\mu\tau - \frac{1}{2}c\right) + \frac{1}{4(1+\nu)}\bar{\alpha}\mathrm{t} + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\alpha\bar{\mathrm{t}}\right]\bar{\mathrm{t}}\,\mathrm{t}'(s)\right\}, \quad (2)$$

ceea ce constituie o problemă Neumann pentru funcţia armonică $\mathsf{p}(x_1, x_2)$.

Întrucît ecuaţiile Cauchy-Riemann se pot scrie şi sub forma (A.5.8), rezultă că primul membru din (2) este egal cu valoarea pe $\mathscr{L}$ a lui $\mu \mathsf{q}_{,s}$; integrînd în raport cu arcul s, obţinem pe fiecare curbă $\mathscr{L}_j$ în parte:

$$\mu\mathsf{q}\,[x_1(s), x_2(s)]\Big|_0^s = \frac{1}{2}\mu\tau\mathrm{t}\bar{\mathrm{t}}\Big|_0^s + \frac{1}{4}ic\int_0^s(\bar{\mathrm{t}}\,d\mathrm{t} - \mathrm{t}\,d\bar{\mathrm{t}}) -$$

$$- \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)}i\int_0^s(\alpha\bar{\mathrm{t}}^2 d\mathrm{t} - \bar{\alpha}\mathrm{t}^2 d\bar{\mathrm{t}}) - \frac{1}{8(1+\nu)}i\int_0^s \mathrm{t}\bar{\mathrm{t}}(\bar{\alpha}d\mathrm{t} - \alpha d\bar{\mathrm{t}}) + \mu F_j; \quad (3)$$

F_j sînt aci nişte constante de integrare, *necunoscute, dar nu arbitrare*, şi care diferă în general de la o componentă a frontierei la alta. Aceste constante trebuie determinate în fond tot din condiţia ca $\mathsf{p}(x_1, x_2) = \operatorname{Re}\varphi(\mathfrak{z})$ să fie uniformă.

Problema (1) conduce deci la o problemă similară problemei Dirichlet pentru funcţia — de asemenea armonică — $\mathsf{q}(x_1, x_2)$. Această problemă, numită *problema lui Dirichlet generalizată* (din cauza prezenţei constantelor F_j) a fost abordată pe căi diferite de către C. Iacob [1], [3], [4] (vezi şi [5], cap. 3); S. Mihlin [1], partea II; N. Mushelişvili [3], capitolul 3. Vezi şi S. Bergman [1], R. Reynolds [1].

Cele de mai sus arată că teoria potenţialului newtonian în plan permite rezolvarea completă a problemei. Soluţia se obţine sub forma de potenţiali de simplu sau dublu strat, cu densităţile date de (2), respectiv (3). O expunere exhaustivă a metodelor de utilizat (inclusiv legătura cu teoria funcţiilor de o variabilă complexă) este dată de C. Iacob [5], §§ 3.1—3.42. Unele noţiuni şi formule utile în acest sens vor fi pe scurt prezentate mai jos, în § 7.2.

Amintim aci că problema lui Dirichlet interioară pentru un domeniu mărginit de o frontieră Liapunov pe porţiuni, şi cu date la limită continui, are întotdeauna soluţie şi una singură. Aceeaşi afirmaţie este valabilă pentru problema lui Neumann interioară, dacă datele la limită (posedînd chiar discontinuităţi de prima speţă) satisfac anumite condiţii integrale.

Expresiile din membrul al doilea din (2), (3) sînt expresii liniare în x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2, n_1 şi n_2 (vezi şi (A.4.22)). Întrucît prin ipoteză $\mathscr{L}$ este o curbă Liapunov pe porţiuni, rezultă că $n_1, n_2 \in C_\mu^0(\mathscr{L})$, şi deci expresiile amintite sînt hölderiene pe porţiuni, avînd cel mult discontinuităţi de prima speţă. Membrul al doilea din (3), obţinut prin integrarea unei astfel de funcţii, este o funcţie hölderiană pe frontieră, chiar dacă aceasta are puncte unghiulare.

Prin urmare, soluţia problemei la limită (3) — şi tot astfel a problemelor (2) şi (1) — *există şi este unică* (depinzînd încă de τ ca parametru).

După cum rezultă din (1)—(3), (8.10) şi (8.32), funcţiile $\varphi(\mathfrak{z})$ şi $\mathfrak{p}(x_1, x_2)$ sînt potenţiali de deplasare, în timp ce $\mathfrak{q}(x_1, x_2)$ este numai un potenţial de tensiune. Vom reţine numai astfel de potenţiali, pentru care componentele deplasării şi tensiunii sînt continue în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$ (vezi finele § 4.10). Vom numi deci *soluţii regulate* — acele soluţii pentru care avem $\varphi(\mathfrak{z}), \varphi'(\mathfrak{z}) \in C^0(\mathscr{D} + \mathscr{L})$, respectiv $\mathfrak{p}(x_1, x_2), \mathfrak{q}(x_1, x_2) \in C^1(\mathscr{D} + \mathscr{L})$.

În ce priveşte proprietăţile lor în $\mathscr{D}$, acestea sînt dictate de faptul că $\varphi(\mathfrak{z})$ este analitică — astfel că $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sînt funcţii armonice, deci analitice în $\mathscr{D}$.

Pentru indicaţii mai amănunţite asupra comportării potenţialilor newtonieni şi a derivatelor lor în vecinătatea frontierei, vezi de exemplu V. Smirnov [2], volumul 4, pct. 208.

Cele de mai sus sînt valabile şi în vecinătatea unor puncte unghiulare. În astfel de puncte, se poate întîmpla însă ca soluţia să nu fie acceptabilă din considerente mecanice (de ex., datorită apariţiei unor tensiuni infinite). Însăşi teorema de existenţă a soluţiei (subînţeles: mărginite, şi de clasă C^2) a ecuaţiilor elasticităţii este acum în defect, arătînd că ecuaţiile încetează să mai descrie corect fenomenul mecanic. Pentru exemple simple, vezi mai departe § 18, exemplu ***b*** şi ***d***. Vezi de asemenea rezultatele lui Chien Wei Zang et al. [1] (reproduse de N. Arutiunian şi B. Abramian [1], § 1.7).

În ultimii ani, apare evident de preferat reprezentarea complexă a soluţiei şi în legătură cu aceasta, abordarea directă a problemei (1) — aşa cum vom proceda în cea mai mare parte a capitolului. Există însă cazuri în care reprezentarea soluţiei prin potenţiali newtonieni poate fi utilă. Mai mult, există cazuri în care soluţia se scrie efectiv *fără* utilizarea acestora; astfel de cazuri vor fi examinate în §§ 15 şi 20.

b) Gradul de arbitrar

Dacă funcţia $\varphi(\mathfrak{z})$ este cunoscută, sînt cunoscute şi tensiunea T şi deplasarea U, u_3. (Deplasarea U depinde de $\varphi(\mathfrak{z})$ numai prin intermediul lui τ; tensiunea σ_{33} este independentă de $\varphi(\mathfrak{z})$.)

Pentru a stabili gradul de determinare al funcţiei $\varphi(\mathfrak{z})$, aşadar faptul dacă — invers — pentru o stare elastică dată, funcţia $\varphi(\mathfrak{z})$ este şi ea determinată, este suficient să găsim funcţia $\varphi^0(\mathfrak{z})$ corespunzătoare stării nule: adăugînd-o unei funcţii $\varphi(\mathfrak{z})$ deja găsite, starea elastică nu se schimbă.

Dacă $T \equiv 0$, din (8.4) urmează $\alpha = 0$; din (8.15) şi (8.16) decurge $\tau = 0$. În fine, din (8.10) conchidem că $d\varphi^0(\mathfrak{z})/d\mathfrak{z} \equiv 0$, astfel că avem cu necesitate $\varphi^0(\mathfrak{z}) \equiv \gamma$ (constantă complexă).

Prin urmare, $\varphi(\mathfrak{z})$ trebuie determinată numai abstracţie făcînd de o constantă complexă; valoarea ei într-un punct oarecare, de exemplu $\varphi(0)$, rămîne arbitrară.

Din (8.32) rezultă că Re γ corespunde unei translații rigide a barei în ansamblu ; Im γ nu are semnificație mecanică.

În particular, de aci urmează că se poate atribui o valoare arbitrară uneia din constantele F_j din (3). Pe viitor vom alege întotdeauna $F_0 = 0$.

c) *Natura funcției* $\varphi(\mathfrak{z})$

Să presupunem că domeniul $\mathscr{D}$ este multiplu conex. Să notăm cu $\mathscr{C}$ o curbă simplă închisă din $\mathscr{D}$; cu $\mathscr{A}^+$ domeniul mărginit de $\mathscr{C}$, și cu $\mathfrak{z}_{0c}$, centrul său de greutate. (Dacă $\mathscr{C} = \mathscr{L}_j$, avem $\mathscr{A}^+ = \mathscr{D}_j^+$, și $\mathfrak{z}_{0c} = \mathfrak{z}_{0j}$). Variația unei funcții F după parcurgerea în sens direct a curbei $\mathscr{C}$ se notează $[F]_{\mathscr{C}}$ (dacă $\mathscr{C} = \mathscr{L}_j$, notăm $[F]_j$), în ipoteza că această variație nu depinde de punctul din care pornim pentru a parcurge $\mathscr{C}$.

Din (3) avem imediat

$$\mu\,[\mathfrak{q}]_j = \frac{1}{4} i c \oint_{\mathscr{L}_j} (\bar{\mathfrak{t}}\,d\mathfrak{t} - \mathfrak{t}\,d\bar{\mathfrak{t}}) - \frac{1+2\nu}{16\,(1+\nu)}\, i \oint_{\mathscr{L}_j} (\alpha\, \bar{\mathfrak{t}}^2 d\mathfrak{t} - \bar{\alpha}\, \mathfrak{t}^2\, d\bar{\mathfrak{t}}) - \\ - \frac{1}{8\,(1+\nu)}\, i \oint_{\mathscr{L}_j} \mathfrak{t}\bar{\mathfrak{t}}\,(\bar{\alpha}\, d\mathfrak{t} - \alpha\, d\bar{\mathfrak{t}}), \tag{4}$$

de unde, făcînd uz de formula lui Stokes (A.4.29) :

$$[\mathfrak{q}(s)]_j = (D_j/2\mu)\ \ [\bar{\alpha}(\mathfrak{z}_{0j} - \mathfrak{z}_0) + \alpha(\bar{\mathfrak{z}}_{0j} - \bar{\mathfrak{z}}_0)]. \tag{5}$$

Pe de altă parte, din (8.32) conchidem (întrucît u_3 este uniformă) :

$$[\mathfrak{p}(s)]_j = 0 \tag{6}$$

astfel că perioadele funcției $\varphi(\mathfrak{z})$ rezultă a fi pur imaginare.

Întrucît $\varphi(\mathfrak{z})$ este primitiva funcției olomorfe $\Phi(\mathfrak{z})$ (vezi (8.9)), din (A.5.60) urmează că ea are forma

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \ln(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_j) + \varphi_0(\mathfrak{z}), \tag{7}$$

unde $\varphi_0(\mathfrak{z})$ este olomorfă în $\mathscr{D}$, iar $\mathfrak{z}_j \in \mathscr{D}_j^+$.

Or, din (7) avem evident

$$[\varphi(\mathfrak{z})]_j = 2\pi i \gamma_j, \tag{8}$$

astfel că din (5) și (6) rezultă că γ_j sînt reale și au valoarea

$$\gamma_j = (D_j/4\pi\mu)\,[\bar{\alpha}\,(\mathfrak{z}_{0j} - \mathfrak{z}_0) + \alpha\,(\bar{\mathfrak{z}}_{0j} - \bar{\mathfrak{z}}_0)], \quad j = 1, 2, \cdots m. \tag{9}$$

Coeficienții termenilor multiformi din (7) sînt deci determinați în funcție de datele geometrice, de rezultanta R, și de constanta μ. După cum urmează din (7), funcția $\varphi(\mathfrak{z})$ este uniformă dacă și numai dacă :

1° rezultanta R este nulă;

2° domeniul $\mathscr{D}$ este simplu conex;

3° domeniul $\mathscr{D}$ este dublu conex, iar mărimea $\bar{\alpha}(z_{01} - z_0)$ este pur imaginară, sau în particular nulă (centrul de greutate z_0 coincide cu centrul de greutate z_{01} al orificiului interior).

În fiecare din aceste cazuri, condițiile la limită considerate servesc la determinarea unei funcții *olomorfe* în $\mathscr{D}$.

Întrucît avem $z_j \in \mathscr{D}_j^+$, funcțiile $\ln(z - z_j)$ sînt continui pe $\mathscr{L}$. Prin urmare, dacă $\gamma_j \neq 0$, putem introduce (7) în condiția la limită, și trece în membrul al doilea termenii logaritmici — obținînd astfel o condiție la limită de același tip, dar pentru funcția *olomorfă* $\varphi_0(z)$.

În ce privește funcția $\Phi(z) = \varphi'(z)$, ea este totdeauna olomorfă.

Cazul $R = 0$ prezintă importanță deosebită. Întrucît avem acum $\alpha = c = 0$, componenta σ_{33} este nulă, și tensiunile se reduc la tensiunea tangențială T. Din (9.1), (9.3), (9.4) urmează că alunecările și încovoierile sînt nule, și bara este în stare de *torsiune pură*. Vom nota în acest caz (compară cu (8.9)):

$$\varphi(z) = \tau\,\psi(z), \quad \psi(z) = \mathrm{r}(x_1, x_2) + \mathrm{i}\ \mathrm{t}(x_1, x_2). \tag{10}$$

Întrucît avem $R = 0$, *funcția* $\psi(z)$ *este totdeauna olomorfă.*

d) Schimbări de axe

Funcția $\varphi(z)$ odată determinată, poate fi utilă transcrierea ei în alte axe — în particular cele ce se obțin din cele dintîi printr-o translație sau o rotație.

Vom nota cu indicele „1" superior toate mărimile relative la noile axe. Astfel, în cazul translației vom avea

$$z = z^1 + z^0 \tag{11}$$

(z^0 este afixul noii origini în axele vechi), iar pentru o rotație de un unghi ϑ:

$$z = [\exp\,(\mathrm{i}\vartheta)]\,z^1. \tag{12}$$

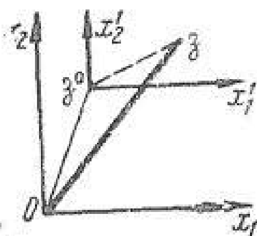


Fig. 5.11.1

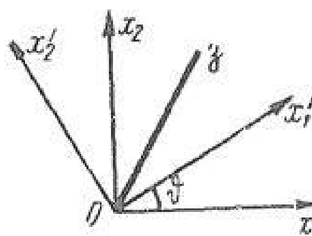


Fig. 5.11.2

În particular, o funcție F se numește *invariantă* la o schimbare de coordonate dacă, notînd cu F^1 sau F_1 expresia ei în noile axe, avem

$$F^1(\mathfrak{z}^1, \bar{\mathfrak{z}}^1) \equiv F(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}), \tag{13}$$

astfel că pentru a obține expresia ei în noile axe, este suficient să efectuăm schimbarea de coordonate direct în formula deja cunoscută în axele vechi.

În cazul rotației, pentru o cantitate complexă $V = V_1 + \mathrm{i} V_2$ (unde V_1, V_2 sînt componentele unui vector: deplasare, tensiune etc.) avem evident

$$V = [\exp(\mathrm{i}\vartheta)]V^1. \tag{14}$$

Aceasta este valabil în particular pentru $T = \sigma_{31} + \mathrm{i}\sigma_{32}$ (rezultat care se poate obține și direct, ținînd seama de formulele de transformare (2.5.5), de ipoteza (3.9) și de faptul că $n_{31} = n_{32} = 0$.)

Așadar, avem

$$T = [\exp(\mathrm{i}\vartheta)]T^1. \tag{15}$$

Pentru momentele de inerție, deducem din (A.7.27) și (4.13):

$$I_0 = I_0^1, \quad I = [\exp(2\mathrm{i}\vartheta)]I^1, \quad \delta = \delta^1. \tag{16}$$

Întrucît (14) este valabilă pentru R, din (4.12) decurge

$$\alpha = [\exp(\mathrm{i}\vartheta)]\alpha^1. \tag{17}$$

Prin urmare, scriind relația (8.10) în ambele sisteme de coordonate și ținînd seama de (15), obținem

$$\left(\mathrm{i}\mu\tau + \frac{1}{2}c\right)\mathfrak{z} - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha}\mathfrak{z}^2 - \frac{1}{4(1+\nu)}\alpha\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} + \mu\overline{\Phi(\mathfrak{z})} =$$
$$= [\exp(\mathrm{i}\vartheta)]\left[\left(\mathrm{i}\mu\tau^1 + \frac{1}{2}c^1\right)\mathfrak{z}^1 - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha}^1(\mathfrak{z}^1)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4(1+\nu)}\alpha^1\mathfrak{z}^1\bar{\mathfrak{z}}^1 + \mu\overline{\Phi^1(\mathfrak{z}^1)}\right]. \tag{18}$$

Or, din relația de definiție (4.8) deducem ușor

$$c = c^1. \tag{19}$$

Tot astfel, întrucît $\omega_{12.3}^m$ este evident un invariant, din (9.4) urmează

$$\tau = \tau^1. \tag{20}$$

În felul acesta, relația (18) conduce la

$$\Phi(\mathfrak{z}) = [\exp(-\mathrm{i}\vartheta)]\Phi^1(\mathfrak{z}^1), \tag{21}$$

de unde

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \varphi^1(\mathfrak{z}^1), \tag{22}$$

ceea ce se vede ușor dacă derivăm (22) și ținem seama de (12). Prin urmare, funcția lui Capildeo și Milne-Thomson este *invariată* de orice rotație.

Trecînd acum la cazul translației (11), avem evident

$$R = R^1, \quad \alpha = \alpha^1, \quad T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = T^1(\mathfrak{z}^1, \bar{\mathfrak{z}}^1). \tag{23}$$

Din (4.8) și (11) obținem

$$c = c^1 + \frac{1}{2}(\alpha\,\bar{\mathfrak{z}}^0 + \bar{\alpha}\mathfrak{z}^0), \tag{24}$$

iar din (9.4) urmează

$$\tau = \tau^1 - (\mathrm{i}\nu/2E)(\bar{\alpha}\mathfrak{z}^0 - \alpha\,\bar{\mathfrak{z}}^0). \tag{25}$$

Ținînd seama de (11), (24) și (25) în cea de-a treia relație (23), obținem, după calcule elementare,

$$\mu\,\overline{\Phi^1(\mathfrak{z}^1)} = \left(\mathrm{i}\mu\tau + \frac{1}{2}c\right)\mathfrak{z}^0 - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha}(\mathfrak{z}^0)^2 - \frac{1}{4(1+\nu)}\alpha\,\mathfrak{z}^0\,\bar{\mathfrak{z}} + \mu\,\overline{\Phi(\mathfrak{z})}, \tag{26}$$

de unde urmează

$$\mu\varphi(\mathfrak{z}) = \left(\mathrm{i}\mu\tau - \frac{1}{2}c\right)\bar{\mathfrak{z}}^0\,\mathfrak{z} + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\alpha(\bar{\mathfrak{z}}^0)^2\mathfrak{z} + \frac{1}{8(1+\nu)}\bar{\alpha}\,\bar{\mathfrak{z}}^0\,\mathfrak{z}^2 + \mu\varphi^1(\mathfrak{z}^1). \tag{27}$$

În cazul particular al torsiunii pure, ținînd seama de notația (10) și de faptul că $\alpha = c = 0$, formula (27) se reduce la

$$\psi(\mathfrak{z}) = \psi^1(\mathfrak{z}^1) + \mathrm{i}\,\bar{\mathfrak{z}}^0\mathfrak{z}, \tag{28}$$

de unde, separînd partea reală și cea imaginară :

$$\mathrm{r} = \mathrm{r}^1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}(\bar{\mathfrak{z}}^0\,\mathfrak{z} - \mathfrak{z}^0\,\bar{\mathfrak{z}}), \quad \mathrm{t} = \mathrm{t}^1 + \frac{1}{2}(\bar{\mathfrak{z}}^0\,\mathfrak{z} + \mathfrak{z}^0\,\bar{\mathfrak{z}}). \tag{29}$$

Totuși, în cazul torsiunii se poate construi o funcție invariantă în raport cu o translație oarecare. Anume, luînd

$$\mathrm{f} = \mathrm{t} - \frac{1}{2}\mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}}, \tag{30}$$

deducem ușor din (29) că

$$\mathrm{f} = \mathrm{f}^1. \tag{31}$$

§ 12. FUNCȚIA LUI PRANDTL ȘI TIMOSHENKO, TEOREMA LUI BREDT ȘI LEIBENZON

Lucrările lui Capildeo și Milne-Thomson au fost precedate de cercetări care au introdus alte funcții cu rol de potențial; acestea păstrează în continuare o mare importanță practică, dar acum e mai comod să le obținem pornind de la funcția $\varphi(z)$.

a) Funcția lui Prandtl și Timoshenko

Ne propunem să determinăm o funcție *reală*, cu rol de potențial al deplasărilor, sau cel puțin al tensiunilor. În acest scop, să căutăm o funcție reală (*sau* pur imaginară) F^*, așa fel ca

$$T(z, \bar{z}) = F^*_{,1} + iF^*_{,2} + T^*_F, \tag{1}$$

unde este de dorit ca termenul de corecție T^*_F să fie cît mai simplu.

Ținînd seama de (A.4.5), avem desigur

$$T = 2F^*_{,z} + T^*_F, \tag{2}$$

sau încă, integrînd în raport cu $\bar{z}$ și ținînd seama de (8.10):

$$2F^* + \int T^*_F \, d\bar{z} = \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c\right) z\bar{z} - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha} z^2 \bar{z} - \frac{1}{8(1+\nu)}\alpha z \bar{z}^2 + $$
$$+ \mu\overline{\varphi(z)} + T^*_1(z), \tag{3}$$

unde $T^*_1(z)$ este o funcție arbitrară.

Întrucît intenționăm ca în funcția căutată să intervină termenul $i\mu\tau z\bar{z}$ (care *nu* dispare în cazul torsiunii), vom lua $F^* = -iF$, unde F este o funcție reală. Alegînd $T^*_1 = -\mu\varphi(z)$, transcriem (3) sub forma

$$-2iF + \int T_F \, d\bar{z} = \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c\right) z\bar{z} + \mu\left[\overline{\varphi(z)} - \varphi(z)\right] -$$
$$- \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}(\bar{\alpha} z - \alpha\bar{z}) z\bar{z} - \frac{1}{4}\alpha z\bar{z}^2, \tag{4}$$

de unde urmează

$$F = \mu\left(q - \frac{1}{2}\tau z\bar{z}\right) - \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)} i(\bar{\alpha} z - \alpha\bar{z}) z\bar{z}, \quad T_F = \frac{1}{2}c z - \frac{1}{2}\alpha z\bar{z}. \tag{5}$$

Acum, (2) ia forma definitivă

$$T(z, \bar{z}) = -2iF_{,z} + T_F = F_{,2} - iF_{,1} + T_F. \tag{6}$$

Funcţia reală $F(x_1, x_2)$ astfel introdusă a fost considerată de L. Prandtl [1], [2] în cazul torsiunii pure, şi de S. Timoshenko [1] (vezi S. Timoshenko şi J. Goodier [1], § 12.106) în cazul încovoierii în consolă. Pe viitor o vom numi *funcţia lui Prandtl şi Timoshenko.*

OBSERVAŢIE. Spre deosebire de funcţia lui Capildeo şi Milne-Thomson, funcţia lui Prandtl şi Timoshenko este *numai* un potenţial de tensiune. Totuşi, ea e cu succes utilizabilă în probleme în care reprezentarea conformă (larg utilizată pentru a găsi funcţia $\varphi(z)$) nu aduce simplificări esenţiale, şi în chestiuni legate de metodele experimentale. (Vezi mai departe § 16, **c**, şi § 20, **c**.)

Derivînd în raport cu z şi $\bar{z}$ în ambii membri ai primei egalităţi (5), obţinem pentru F ecuaţia lui Poisson

$$\Delta F = -2\mu\tau - \frac{1+2\nu}{2(1+\nu)}\, i\,(\bar{\alpha} z - \alpha\bar{z}). \tag{7}$$

Pentru a găsi condiţia la limită căreia îi satisface funcţia F, vom remarca că din (5) şi (11.3) avem

$$F\Big|_{\mathscr{L}_j} = \frac{1}{4} ic\int_0^s (\bar{t}\,dt - t\,d\bar{t}) - \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)}\, i\int_0^s (\alpha\bar{t}^2\,dt - \bar{\alpha}\,t^2\,dt) -$$

$$-\frac{1}{8(1+\nu)}\, i\int_0^s t\bar{t}(\bar{\alpha}\,dt - \alpha\,d\bar{t}) + \mu F_j - \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)}\, i\, t\bar{t}(\bar{\alpha} t - \alpha\bar{t})\Big|_0^s. \tag{8}$$

Derivînd în raport cu s a doua şi a treia integrală, şi ultima expresie din (8), unii termeni se reduc, şi, integrînd din nou, căpătăm

$$F\Big|_{\mathscr{L}_j} = \frac{1}{4}\, ic\int_0^s (\bar{t}\,dt - t\,d\bar{t}) - \frac{1}{4} i\int_0^s t\bar{t}(\bar{\alpha}\,dt - \alpha\,d\bar{t}) + \mu F_j. \tag{9}$$

Desigur, funcţia F definită în (7), (9) nu este uniformă. Perioadele ei se deduc cu uşurinţă din (9), sau ţinînd seama de (5) şi (11.5) :

$$[F(s)]_j = \frac{1}{2} D_j\{\bar{\alpha}(z_{0j} - z_0) + \alpha(\bar{z}_{0j} - \bar{z}_0)\}. \tag{10}$$

Perioada sa pe $\mathscr{L}_0$ este egală cu suma perioadelor pe componentele interioare $\mathscr{L}_j$ (parcurse în sens direct). Într-adevăr, avem

$$D_0 = D + \sum_{j=1}^{m} D_j,$$

$$D z_0 = \iint_{\mathscr{D}} z\,dD = \iint_{\mathscr{D}_0 - \bigcup_{j=1}^{m}\mathscr{D}_j^+} z\,dD = D_0\, z_{00} - \sum_{j=1}^{m} D_j z_{0j}. \tag{11}$$

astfel că din (10) obținem

$$\sum_{j=1}^{m} [F(s)]_j = \mathrm{Re}\left\{\alpha \sum_{j=1}^{m} D_j \bar{z}_{0j} - \alpha\, \bar{z}_0 \sum_{j=1}^{m} D_j\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\alpha(D_0 \bar{z}_{00} - D\bar{z}_0) - \alpha(D_0 - D)\bar{z}_0\right\} = \mathrm{Re}\left\{\alpha D_0 (\bar{z}_{00} - \bar{z}_0)\right\} = [F(s)]_0. \qquad (12)$$

Uneori poate prezenta interes căutarea lui F sub forma $F_0(x_1, x_2) + F_1(x_2) + F_2(x_1)$, unde F_1, F_2 sînt funcții arbitrare care, potrivit alese, permit simplificarea fie a ecuației, fie a condiției la limită.

În acest caz, ecuația (7) devine

$$\Delta F_0 = -2\mu\tau - \frac{1+2\nu}{2(1+\nu)}\, i(\bar{\alpha} z - \alpha \bar{z}) - F_1''(x_2) - F_2''(x_1), \qquad (13)$$

iar condiția la limită (9) trebuie de asemenea modificată, prin scăderea în membrul al doilea a valorilor $F_1(x_2)|_{\mathscr{L}} + F_2(x_1)|_{\mathscr{L}}$.

b) *Teorema lui Bredt și Leibenzon*

Ne rămîne să examinăm chestiunea determinării — în principiu — a constantelor F_j. Problema a fost rezolvată de R. Bredt [1] pentru cazul torsiunii (cu ajutorul funcției conjugate a lui Saint-Venant — vezi § 13), și de către L. Leibenzon (vezi [1], § 112) pentru cazul încovoierii consolei (cu ajutorul funcției lui Timoshenko).

Din (11.3) și (9) rezultă limpede că constantele F_j nu pot interveni în derivata tangențială a lui F pe $\mathscr{L}$. Aceasta sugerează în schimb să le căutăm cu ajutorul derivatei normale a acestei funcții, întrucît valorile lor sînt vizibil legate de variația lui F de la o componentă la alta a frontierei.

Formulele (A.3.12) dau

$$F_{,n} = F_{,1}\, x_2'(s) - F_{,2}\, x_1'(s) = -\,\mathrm{Re}\,[(F_{,2} - iF_{,1})\,\overline{z'(s)}], \qquad (14)$$

astfel că, punînd (6) sub forma

$$F_{,2} - iF_{,1} = T - T_F, \qquad (15)$$

căpătăm pentru o curbă oarecare $\mathscr{C}$ din $\mathscr{D}$:

$$\oint_{\mathscr{C}} F_{,n}\, ds = -\frac{1}{2}\oint_{\mathscr{C}} (\bar{T} - \bar{T}_F)\, dz + (T - T_F)\, d\bar{z}. \qquad (16)$$

Din (14) și (15) urmează că derivata normală $F_{,n}$ este uniformă. Ținînd seama de expresiile (8.10) și (5) pentru T și T_F, obținem

$$T - T_F = i\mu\tau z - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha} z^2 + \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\alpha z\bar{z} + \mu\overline{\varphi'(z)}, \qquad (17)$$

astfel că integrala din (16) devine

$$\oint_{\mathscr{C}} F_{,n}\, ds = \frac{1}{2}\, i\mu\tau \oint_{\mathscr{C}} (\bar{z}\, dz - z\, d\bar{z}) + \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)} \oint_{\mathscr{C}} (\alpha \bar{z}^2 dz + \bar{\alpha} z^2 d\bar{z}) -$$

$$- \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \oint_{\mathscr{C}} z\bar{z}(\bar{\alpha}\, dz + \alpha\, d\bar{z}) - \frac{1}{2}\mu \oint_{\mathscr{C}} (\varphi'(z)\, dz + \overline{\varphi'(z)}\, d\bar{z}). \quad (18)$$

Ultima din aceste integrale este nulă, deoarece integrandul ei este $2\, \mathrm{Re}\, d\varphi(z)$, iar funcția $\mathrm{Re}\, \varphi(z)$ este uniformă. Integralele rămase în (18) au o semnificație pur geometrică, putînd fi calculate chiar pentru curbe ce nu sînt cuprinse în $\mathscr{D}$. Formula lui Stokes (A.4.29) conduce la valoarea

$$\oint_{\mathscr{C}} F_{,n}\, ds = - \left[2\mu\tau + \frac{1+2\nu}{2(1+\nu)}\, i\, (\bar{\alpha} z_{0c} - \alpha \bar{z}_{0c}) \right] A, \quad (19)$$

unde A este aria domeniului $\mathscr{A}^+$ mărginit de $\mathscr{C}$. Membrul al doilea din (19) este cunoscut, abstracție făcînd de τ, care joacă rol de parametru.

Relația (19) exprimă *teorema de tip Bredt și Leibenzon* (pentru domenii și axe oarecari). Ea poate sluji — în principiu — la determinarea constantelor F_j. Într-adevăr, întrucît F este soluția ecuației (7) cu condiția la limită (9), ea are forma (vezi de ex. V. Smirnov [2], volumul 2, pct. 198 și 201 ; vezi și mai jos (7.2.37)) :

$$F(x_1, x_2) = - \iint_{\mathscr{D}} G\, \Delta F\, dD - \oint_{\mathscr{L}} F|_{\mathscr{L}}\, G_{,n}\, ds, \quad (20)$$

unde G este funcția lui Green a lui $\mathscr{D}$. Prin urmare, F depinde liniar de constantele F_j. Scriind relația (19) pe cele m componente interioare ale frontierei, obținem un sistem de m ecuații algebrice liniare pentru cele m constante F_j. Formula (20) dă acum soluția problemei în funcție de parametrul τ, care trebuie determinat din (8.14) sau din altă relație echivalentă, conținînd $F(x_1, x_2)$ în loc de $\varphi(z)$.

Dacă funcția lui Prandtl și Timoshenko se caută sub forma $F_0(x_1, x_2) + F_1(x_2) + F_2(x_1)$, atunci avem (vezi (14) și (A.3.19)) :

$$\oint_{\mathscr{C}} F_{1,n}\, ds = - \oint_{\mathscr{C}} F_1'(x_2)\, dx_1 = \iint_{\mathscr{A}^+} F_1''(x_2)\, dD,$$
$$\oint_{\mathscr{C}} F_{2,n}\, ds = \oint_{\mathscr{C}} F_2'(x_1)\, dx_2 = \iint_{\mathscr{A}^+} F_2''(x_1)\, dD, \quad (21)$$

expresii care trebuie introduse, cu semnul minus, în membrul al doilea din (19).

Integrala $\oint_{\mathscr{C}} \bar{T}\, dz + T\, d\bar{z}$ din (16) are o semnificație mecanică simplă. Anume, să considerăm componenta tangențială $T(\boldsymbol{s})$ a tensiunii

$$T(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{s} = \sigma_{31} \cos(\boldsymbol{s}, x_1) + \sigma_{32} \cos(\boldsymbol{s}, x_2). \quad (22)$$

Acesta este un scalar real, care nu trebuie confundat cu tensiunea tangențială complexă, de care este legat prin relația

$$T(s) = \mathrm{Re}\ [T\overline{\mathfrak{z}'(s)}]. \tag{23}$$

Pentru integrala

$$\oint_{\mathscr{C}} T(s)\,ds = \frac{1}{2}\oint_{\mathscr{C}} \overline{T}d\mathfrak{z} + T\,d\overline{\mathfrak{z}}, \tag{24}$$

numită *circulația tensiunilor tangențiale pe curba* $\mathscr{C}$, se obține ușor valoarea

$$\oint_{\mathscr{C}} T(s)\,ds = \left[2\mu\tau + \frac{\nu}{2(1+\nu)}\,i\,(\alpha\overline{\mathfrak{z}}_{0c} - \overline{\alpha}\mathfrak{z}_{0c})\right]A. \tag{25}$$

§ 13. PROBLEMA TORSIUNII PURE. FUNCȚIILE LUI SAINT-VENANT

a) Funcții de torsiune

În §§ 13–18 vom studia cazul particular menționat în § 9, pag. 205, cînd singura componentă ne-nulă a torsorului sarcinii este $\mathscr{M}_3$. După cum am văzut în § 11, pag. 218, singurele componente ne-nule ale tensiunii sînt acum cele tangențiale, independente de x_3. Toate secțiunile sînt supuse numai la torsiune, care, după cum urmează din (9.4), este caracterizată de *gradul de torsiune* (torsiunea pe unitatea de lungime a generatoarei)[6]:

$$-\,\omega^m_{12,3} = \tau. \tag{1}$$

Întrucît τ măsoară unghiul de rotire al secțiunilor una față de alta în jurul unei axe paralele cu Ox_3, dimensiunea sa este L^{-1}. Gradul de torsiune se măsoară în rad/cm, sau grade/cm.

În practică, se admit (în funcție de material) valori mergînd pînă la 0,2°–2°/metru.

Din (11.2) se vede că, dacă $\tau = 0$, am avea $\mathsf{p}(x_1, x_2) = \text{const.}$ și deci și $\mathsf{q}(x_1, x_2) = \text{const.}$ Din (8.10) ar urma $T \equiv 0$, și deplasarea s-ar reduce la o roto-translație rigidă. Prin urmare, vom presupune întotdeauna $\tau \neq 0$, ceea ce justifică notația introdusă în (11.10):

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \tau\psi(\mathfrak{z}), \quad \psi(\mathfrak{z}) = \mathsf{r}(x_1, x_2) + i\mathsf{t}(x_1, x_2). \tag{2}$$

---

[6]) Semnul „minus'' din (1) provine din alegerea notațiilor din (1.4.5) și (1.4.10) (vezi și nota de la pag. 41). Pentru $\mathscr{M}_3 > 0$, avem și $\tau > 0$ (vezi mai jos (15) și (23)), ceea ce corespunde unei rotații a secțiunilor în sensul direct. În notațiile din § 1.4, din (1.4.6) urmează $\delta\xi_1 = p_3\xi_2$, $\delta\xi_2 = -p_3\xi_1$, astfel că pentru $p_3 = \omega_{12} > 0$, secțiunile s-ar roti în sens retrograd. Rotația în sens direct corespunde deci unor valori $p_3 = \omega_{12}$ *negative*, ceea ce explică aspectul formulei (1).

Tot astfel, în cazul torsiunii pure vom nota $F_j = \tau f_j$.

Funcţia armonică $\mathrm{r}(x_1, x_2)$ este *funcţia de torsiune a lui Saint-Venant* (notată de obicei în literatură cu φ), iar $\mathrm{t}(x_1, x_2)$ este *funcţia de torsiune conjugată a lui Saint-Venant* (notată de obicei cu ψ). Preferăm notaţiile de aci, care evită confuzia cu cele folosite în problema plană.

Saint-Venant a rezolvat problema torsiunii cu ajutorul funcţiei $\mathrm{r}(x_1, x_2)$, construind ulterior şi funcţia $\psi(\mathfrak{z})$ şi rezolvînd şi unele probleme după o metodă de tip invers. Studiul sistematic al problemei directe cu ajutorul funcţiei $\psi(\mathfrak{z})$, inclusiv utilizarea reprezentării conforme, a fost realizat de către N. Mushelişvili [5], capitolul 7 (vezi şi I. Sokolnikoff [2], §§ 4.33—4.51). Indicăm de asemenea R. L'Hermite [1], capitolul 4; L. Milne-Thomson [3], capitolul 4; monografiile lui N. Arutiunian şi B. Abramian [1] (cu o excelentă bibliografie)[7]) şi C. Weber şi W. Günther [1], ambele consacrate exclusiv torsiunii; monografia lui Chien-Wei-Zang et al. [1] — din păcate, în limba chineză... O bogată colecţie de exemple este dată de Th. Higgins [2] (soluţii exacte), [3] (metode aproximative), [4]—[6] (metode experimentale şi analogii). Prezintă încă azi interes memoriul lui A. Dinnik [2] şi articolul de sinteză al lui J. Geckeler [1], capitolul 2. Menţionăm şi punctul de vedere al lui R. Baldacci [1], [2]. Pentru importanţa sa istorică, vezi şi articolul iniţial al lui B. de Saint-Venant [1]. Generalizări la cazul dinamic aparţin lui M. Mişicu [5], [6], cu o bogată bibliografie. Indicaţii privind alte metode, general valabile pentru problema antiplană, vor fi date la finele § 22.

b) Probleme la limită

Rezolvarea problemei depinde de determinarea unei singure funcţii olomorfe $\psi(\mathfrak{z})$, pentru care condiţiile la limită (11.1)—(11.3) devin:

$$\mathrm{Im}\,[\psi'(\mathrm{t})\,\mathrm{t}'(s)] = \mathrm{Re}\,[\bar{\mathrm{t}}\,\mathrm{t}'(s)] \quad \text{pe } \mathscr{L}, \tag{3}$$

$$\mathrm{r}_{,n} = \mathrm{Re}\,[\bar{\mathrm{t}}\,\mathrm{t}'(s)] \quad \text{sau} \quad \mathrm{r}_{,n} = x_2 n_1 - x_1 n_2 \quad \text{pe } \mathscr{L}, \tag{4}$$

$$\mathrm{t} = \frac{1}{2}\,\mathrm{t}\bar{\mathrm{t}} + f_j \qquad \text{pe } \mathscr{L}_j. \tag{5}$$

Evident, (4) este o condiţie Neumann, iar (5) — o condiţie Dirichlet generalizată. (A nu se confunda t cu t!)

Deosebirea între (3)—(5) şi cazul general din § 11 stă numai în aspectul foarte simplu al celui de al doilea membru al condiţiilor la limită. Prin urmare, rezolvarea *efectivă* a problemei torsiunii pure poate fi mai simplă, pentru un profil dat, decît cea a încovoierii în consolă. *Dar din punct de vedere principial, deosebire nu există.*

Funcţia $\psi(\mathfrak{z})$ odată găsită, din (8.10) deducem

$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \mu\tau\,[\overline{\psi'(\mathfrak{z})} + i\mathfrak{z}], \tag{6}$$

[7]) Vezi şi A. Lurie [5].

de unde

$$\sigma_{31} = \mu\tau(\mathrm{r}_{,1} - x_2), \quad \sigma_{32} = \mu\tau(\mathrm{r}_{,2} + x_1), \tag{7}$$

sau încă, ţinînd seama de ecuaţiile Cauchy-Riemann :

$$\sigma_{31} = \mu\tau(\mathrm{t}_{,2} - x_2), \quad \sigma_{32} = -\mu\tau(\mathrm{t}_{,1} - x_1). \tag{8}$$

Pentru componentele deplasării, obţinem din (8.32)

$$U = \mathrm{i}\tau x_3 \mathfrak{z}, \quad u_3 = \tau\,\mathrm{Re}\psi(\mathfrak{z}), \tag{9}$$

adică formulele simple

$$u_1 = -\tau x_2 x_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3, \quad u_3 = \tau \mathrm{r}(x_1, x_2), \tag{10}$$

asupra cărora vom reveni la punctul *e*.

Determinarea funcţiilor $\psi(\mathfrak{z})$, $\mathrm{r}(x_1, x_2)$, $\mathrm{t}(x_1, x_2)$ rezolvă problema. Uneori, se poate face uz de o metodă de tip invers, dîndu-ne funcţia de torsiune, şi determinînd $\mathscr{D}$ din condiţiile (3)—(5), privite ca definind ecuaţia frontierei.

Astfel, dacă ne dăm o funcţie armonică şi uniformă $\mathrm{t}(x_1, x_2)$, şi dacă curba de ecuaţie

$$\mathrm{t}(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \text{const.} \tag{11}$$

este închisă şi conţinută în domeniul de olomorfie al funcţiei $\psi = \mathrm{r} + \mathrm{i}\mathrm{t}$, atunci domeniul mărginit de ea poate fi privit drept secţiune $\mathscr{D}$ a unei bare torsionate; din (5) rezultă că funcţia armonică conjugată $\mathrm{r}(x_1, x_2)$ este tocmai funcţia de torsiune, gata construită pentru $\mathscr{D}$.

Luînd drept ecuaţie a frontierei, ecuaţia

$$-\mathrm{r}(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \text{const.}, \tag{12}$$

atunci funcţia de torsiune rezultă a fi $\mathrm{t}(x_1, x_2)$.

OBSERVAŢIE. Numai o funcţie armonică *uniformă*, a cărei conjugată este de asemenea *uniformă*, poate juca rolul de funcţie de torsiune a lui Saint-Venant. Din (4), (5) se vede că funcţiile de torsiune au dimensiunea L^2. Aceste fapte trebuie ţinute în seamă la aplicarea metodei.

După cum am văzut în § 11, problema Neumann are totdeauna o soluţie $\mathrm{r}(x_1, x_2)$ unic determinată, abstracţie făcînd de o constantă. Din uniformitatea funcţiei $\mathrm{t}(x_1, x_2)$ urmează că şi această funcţie este unic determinată, astfel că $\psi(\mathfrak{z})$ rezultă unic determinată, abstracţie făcînd de o constantă complexă, fie ea $\psi(0)$— care poate fi dată arbitrar (vezi § 11, pag. 216) Partea imaginară a acestei constante se alege de obicei în aşa fel încît $f_0 = 0$.

Acest fapt constituie o teoremă de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei torsiunii pure.

Soluţia problemei (4) este vizibil funcţie numai de configuraţia lui $\mathscr{D}$, şi nu depinde nici de constantele elastice, nici de sarcină. Urmează că *funcţiile* $\psi(\mathfrak{z})$, $\mathrm{r}(x_1, x_2)$, *şi* $\mathrm{t}(x_1, x_2)$ *depind numai de geometria lui* $\mathscr{D}$ — aşadar fiecărei secţiuni îi corespund anumite funcţii de torsiune, deplin determinate de geometria secţiunii, şi independente de sarcină şi de material. Acest fapt nu are numai importanţă teoretică : el uşurează studierea experimentală (pe modele) a acelor tipuri de profile, pentru care o soluţie analitică nu este cunoscută.

c) Rigiditatea geometrică la torsiune

Pentru scrierea efectivă a soluţiei este necesară cunoaşterea, pe lîngă $\psi(\mathfrak{z})$, şi a lui τ (vezi (7)—(10)). În cazul torsiunii pure, (8.14) se reduce la

$$\mathscr{M}_3^0 = \mu\tau\left(J_0 - \operatorname{Im}\iint_{\mathscr{D}} \mathfrak{z}\, \psi'(\mathfrak{z})\, \mathrm{d}D\right) \tag{13}$$

(unde J_0 este momentul polar de inerţie în axe oarecare), paranteza fiind de data asta (compară cu (8.14)) *independentă* de τ. Întrucît pentru $R = 0$ avem $\mathscr{M}_3^0 = \mathscr{M}_3$, şi întrucît paranteza din (13) se explicitează sub forma :

$$C = \iint_{\mathscr{D}} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \mathrm{r}_{,2} - x_2 \mathrm{r}_{,1})\, \mathrm{d}D, \tag{14}$$

putem scrie (13) sub forma

$$\mathscr{M}_3 = \mu\, \tau\, C. \tag{15}$$

Aşadar, momentul $\mathscr{M}_3$ (care caracterizează sub formă globală sarcina) este *produsul* a trei termeni, care depind *separat* de forma lui $\mathscr{D}$, de caracteristica globală a deformaţiei τ, şi de material. Este vizibil că, cu cît C e mai mare, cu atît — pentru $\mathscr{M}_3$ şi μ daţi — gradul de torsiune τ este mai mic, şi deci atît deplasările cît şi tensiunile sînt mai mici. În spiritul celor arătate în § 6, pag. 189, mărimea C se numeşte *rigiditate geometrică la torsiune*, iar produsul μC este *rigiditatea la torsiune*. (În literatură, se întîlneşte de obicei notaţia C pentru ceea ce aci am desemnat prin $\mu\, C$.)

Expresia (14) poate fi încă pusă sub forma echivalentă

$$C = \iint_{\mathscr{D}} (x_1^2 + x_2^2 - x_1\, \mathrm{t}_{,1} - x_2\, \mathrm{t}_{,2})\, \mathrm{d}D. \tag{16}$$

O a treia formă se obţine utilizînd (A.3.12), (A.3.19) :

$$\iint_{\mathscr{D}} (x_1\, \mathrm{r}_{,2} - x_2\, \mathrm{r}_{,1})\, \mathrm{d}D = \iint_{\mathscr{D}} [(x_1\, \mathrm{r})_{,2} - (x_2\, \mathrm{r})_{,1}]\, \mathrm{d}D =$$

$$= \oint_{\mathscr{L}} \mathrm{r}\, (x_1 n_2 - x_2 n_1)\, \mathrm{d}s = -\oint_{\mathscr{L}} \mathrm{r}\, (x_1 \mathrm{d}x_1 + x_2 \mathrm{d}x_2) = -\frac{1}{2}\oint_{\mathscr{L}} \mathrm{r}\, \mathrm{d}(x_1^2 + x_2^2). \tag{17}$$

Formula (14) devine acum

$$C = J_0 - \frac{1}{2}\oint_{\mathscr{L}} \mathrm{r}\, \mathrm{d}(x_1^2 + x_2^2) \tag{18}$$

sau, integrînd prin părţi şi ţinînd seama că $\mathrm{r}(x_1, x_2)$ este uniformă :

$$C = J_0 + \frac{1}{2}\oint_{\mathscr{L}} (x_1^2 + x_2^2)\, \mathrm{r}_{,s}\, \mathrm{d}s, \tag{19}$$

sau încă, ţinînd seama în (18) de condiţia la limită (5) şi de faptul că funcţiile r şi t sînt armonic conjugate (vezi A.5.8)) :

$$C = J_0 - \oint_{\mathscr{L}} \mathrm{r}\mathrm{r}_{,n}\, \mathrm{d}s. \tag{20}$$

Rigiditatea geometrică la torsiune este o cantitate strict pozitivă. Într-adevăr, să transcriem (14) sub forma

$$C = \iint_{\mathscr{D}} [(\mathrm{r}_{,1} - x_2)^2 + (\mathrm{r}_{,2} + x_1)^2]\mathrm{d}D - \iint_{\mathscr{D}} [x_1\mathrm{r}_{,2} - x_2\mathrm{r}_{,1} + (\mathrm{r}_{,1})^2 + (\mathrm{r}_{,2})^2]\, \mathrm{d}D. \tag{21}$$

Ţinînd seama de prima formulă a lui Green (7.2.10) pentru operatorul lui Laplace în plan

$$\iint_{\mathscr{D}} v\, \Delta u\, \mathrm{d}D = -\iint_{\mathscr{D}} (\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, v)\, \mathrm{d}D + \oint_{\mathscr{L}} v\, u_{,n}\, \mathrm{d}s,$$

luînd aci $u = v = \mathrm{r}(x_1, x_2)$, utilizînd armonicitatea lui r, condiţia (4), şi relaţia (17), obţinem

$$\iint_{\mathscr{D}} [(\mathrm{r}_{,1})^2 + (\mathrm{r}_{,2})^2]\, \mathrm{d}D = \oint_{\mathscr{L}} \mathrm{r}\mathrm{r}_{,n}\, \mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{D}} (-x_1\mathrm{r}_{,2} + x_2\mathrm{r}_{,1})\, \mathrm{d}D, \tag{22}$$

astfel că (21) se reduce la

$$C = \iint_{\mathscr{D}} [(\mathrm{r}_{,1} - x_2)^2 + (\mathrm{r}_{,2} + x_1)^2]\, \mathrm{d}D > 0. \tag{23}$$

Introducînd încă (22) în (20), putem scrie şi

$$C = J_0 - \iint_{\mathscr{D}} [(\mathrm{r}_{,1})^2 + (\mathrm{r}_{,2})^2]\, \mathrm{d}D. \tag{24}$$

Cel mai simplu mod de a reprezenta pe C prin intermediul funcţiei $\psi(\mathfrak{z})$ provine din (18), de unde căpătăm

$$C = J_0 - \frac{1}{2}\oint_{\mathscr{L}} \mathrm{Re}\ \psi(t)\, \mathrm{d}(t\bar{t}). \tag{25}$$

Pentru secţiuni pentru care nu dispunem de o soluţie exactă, este importantă evaluarea aproximativă a rigidităţii geometrice la torsiune, inclusiv a marginilor (inferioară şi superioară) pentru C. Problema e amănunţit studiată de G. Polya şi G. Szegö [1] (mai ales în cap. 5, în particular cu ajutorul reprezentării conforme). Vezi de asemenea J. Bartha [1]–[3]; E. Berger [1]; J. Diaz [1]; P. Germain [1], § 8.6; L. Leibenzon [2] („Metode variaţionale", cap. 7); E. Makai [1] (evaluare mai puţin exactă decît cea a lui Polya); L. Milne-Thomson [3], §§ 4.37 şi 4.38; G. Polojii [2]; H. Weinberger [1]; A. Weinstein [3].

Toate cele de mai sus sînt valabile şi pentru bare de secţiune multiplu-conexă. În acest caz, este necesară şi determinarea constantelor f_i — chestiune asupra căreia ne vom opri în § 14. Dacă $\mathscr{D}$ este simplu conex, aceste constante nu mai intervin, şi condiţia (5) se reduce la o condiţie Dirichlet.

d) Cîmpul deplasărilor

Din (10) rezultă că originea axelor în $\mathscr{D}$ nu se deplasează decît în lungul barei; aşadar, lucrurile se petrec ca şi cum secţiunile s-ar roti în jurul originilor respective. Pe de altă parte însă, în toate cele de mai sus, poziţia originii în orientarea axelor nu a jucat nici un rol.

În fapt, se verifică uşor că o roto-translaţie a axelor Ox_1x_2 conduce numai la apariţia unei roto-translaţii rigide a barei. Pentru a arăta aceasta, să considerăm un nou sistem de axe obţinut din cel iniţial printr-o translaţie şi o rotaţie. Din (11.22) rezultă că funcţia $\psi(\mathfrak{z})$, şi deci şi funcţiile $\mathfrak{r}(x_1, x_2)$, $\mathfrak{t}(x_1, x_2)$, sînt invariate de o rotaţie a axelor, astfel că ne rămîne de considerat numai cazul translaţiei. Din prima formulă (11.29) obţinem [8])

$$\mathfrak{r}^1 = \mathfrak{r} - x_2^0 x_1 + x_1^0 x_2. \tag{26}$$

Din (11.25) urmează că în cazul torsiunii avem şi pentru o translaţie $\tau = \tau^1$, şi deci şi $C = C^1$. (Acest rezultat se obţine şi scriind condiţia (4) în axele noi, şi constatînd că diferenţa celor două soluţii coincide cu cea care rezultă din (26) — după care un calcul efectiv conduce la concluzia $C = C^1$.)

Cu aceasta, dispunem de două soluţii:

$$u_1 = -\tau x_2 x_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3, \quad u_3 = \tau \mathfrak{r}, \tag{27}$$

$$u_1^1 = -\tau x_2^1 x_3, \quad u_2^1 = \tau x_1^1 x_3, \quad u_3^1 = \tau \mathfrak{r}^1 = \tau(\mathfrak{r} - x_2^0 x_1 + x_1^0 x_2), \tag{28}$$

de unde

$$u_1^1 = u_1 + \tau x_2^0 x_3, \quad u_2^1 = u_2 - \tau x_1^0 x_3, \quad u_3^1 = u_3 - \tau x_2^0 x_1 + \tau x_1^0 x_2, \tag{29}$$

astfel că soluţia în axele noi se obţine prin adăugarea unor deplasări corespunzătoare unui vector de rotaţie de componente $(\tau x_1^0, \tau x_2^0, 0)$, aşadar unei rotaţii în jurul unei axe perpendiculare pe Ox_3.

Aceasta înseamnă că sîntem liberi de pildă să alegem originea şi orientarea axelor în modul care permite să scriem ecuaţia frontierei sub forma cea mai comodă. Cele 6 con-

---

[8]) Aci x_1^0, x_2^0 *nu sînt* coordonatele centrului de greutate.

stante arbitrare introduse în acest mod se adaugă în fond constantelor ce intervin în (8.30), (8.31), şi care au fost neglijate cînd am scris deplasările sub forma (8.32), de unde am dedus (10).

Vom lua deci în general (vezi (5.17)):

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tau x_2 x_3 - C x_2 + B x_3 + F, \\ u_2 &= \tau x_1 x_3 + C x_1 - A x_3 + G, \\ u_3 &= \tau\, \mathrm{r}(x_1, x_2) - B x_1 + A x_2 + H; \end{aligned} \tag{30}$$

dacă presupunem că vecinătatea *originii aci alese* nu se deplasează şi nu se roteşte, toate constantele astfel introduse sînt nule.

Se mai poate admite că secţiunea $x_3 = 0$ nu se deplasează şi nu se roteşte în planul ei (aşadar $u_1 = u_2 = 0$ pentru $x_3 = 0$), şi că cele 6 constante sînt alese astfel încît media patratică pe secţiune a deplasării longitudinale u_3 să fie minimă. Condiţia relativă la deplasările u_1, u_2 dă mai întîi:

$$u_1 = -\tau x_2 x_3 + B x_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3 - A x_3, \quad u_3 = \tau\, \mathrm{r}(x_1, x_2) - B x_1 + A x_2 + H. \tag{31}$$

Este vizibil că punctul de coordonate

$$x_1^t = A/\tau, \qquad x_2^t = B/\tau \tag{32}$$

nu se deplasează tangenţial pe nici o secţiune. Pentru acest motiv el poartă numele de *centru de torsiune* (A. Weinstein [1]).

Punînd şi condiţia de extremum pentru integrala

$$I(u_3) = \iint_{\mathscr{D}} u_3^2 \, \mathrm{d}D, \tag{33}$$

privită ca funcţie de A, B, H, obţinem ecuaţiile

$$\iint_{\mathscr{D}} u_3 x_2 \, \mathrm{d}D = 0, \quad \iint_{\mathscr{D}} u_3 x_1 \, \mathrm{d}D = 0, \quad \iint_{\mathscr{D}} u_3 \, \mathrm{d}D = 0. \tag{34}$$

Alegînd drept axe, axele centrale principale de inerţie ale secţiunii, obţinem din (31) şi (34):

$$\iint_{\mathscr{D}} (\tau\, \mathrm{r}\, x_2 + A x_2^2) \, \mathrm{d}D = \iint_{\mathscr{D}} (\tau\, \mathrm{r}\, x_1 - B x_1^2) \, \mathrm{d}D = \iint_{\mathscr{D}} (\tau\, \mathrm{r} + H) \, \mathrm{d}D = 0,$$

de unde

$$\begin{gathered} A = -(\tau / I_1) \iint_{\mathscr{D}} x_2\, \mathrm{r}(x_1, x_2) \, \mathrm{d}D, \quad B = (\tau / I_2) \iint_{\mathscr{D}} x_1\, \mathrm{r}(x_1, x_2) \, \mathrm{d}D, \\ H = -(\tau / \mathrm{D}) \iint_{\mathscr{D}} \mathrm{r}(x_1, x_2) \, \mathrm{d}D. \end{gathered} \tag{35}$$

(Vezi şi mai departe § 19, pag. 308.)

e) Notă istorică

Formulele (4), (5), (7), (8), (10), ca şi considerarea funcţiilor $r(x_1, x_2)$ şi $t(x_1, x_2)$, se datorează lui Saint-Venant. Acestea au avut o deosebită importanţă atît în dezvoltarea teoriei torsiunii, cît şi pentru utilizarea metodei semi-inverse.

Problema torsiunii a fost abordată de către C. Coulomb [1] pentru cilindrul circular (în legătură cu studiile sale asupra pendulului de torsiune electro-static). Coulomb a dat soluţia în cadrul ipotezei secţiunilor plane, presupunînd $u_3 = 0$, şi admiţînd că secţiunile normale *se rotesc* în planul lor ca un tot rigid în jurul centrului cercului, iar unghiul de rotaţie este proporţional cu distanţa x_3 la baza fixată (*ipoteza lui Coulomb*). Desigur, acestea sînt cele mai simple presupuneri ce se puteau face.

Această soluţie s-a dovedit a fi corectă. Dar încercarea lui L. Navier de-a folosi aceleaşi ipoteze pentru alte secţiuni a dus la rezultate eronate. (Ipoteza secţiunilor plane poate fi infirmată experimental, cu ajutorul unui cilindru necircular din cauciuc, pe a cărui suprafaţă laterală se trasează o reţea de generatoare şi de traiectorii ortogonale lor.) A. Cauchy [7] a renunţat la ipoteza secţiunilor plane, dar nu a obţinut nici el rezultatul corect.

Saint-Venant a căutat soluţia problemei *în deplasări*, pornind de la ipoteza lui Coulomb, şi admiţînd că secţiunile nu rămîn plane, dar deplanează toate în acelaşi mod, independent de x_3 (*ipoteza lui Saint-Venant*).

În conformitate cu ipoteza lui Coulomb, deplasarea tangenţială este normală pe raza vectoare, de unde $u_1x_1 + u_2x_2 = 0$, sau încă, în coordonate polare ($x_1 + ix_2 = R \exp(i\chi)$):

$$u_1 \cos \chi + u_2 \sin \chi = 0. \tag{36}$$

Mai departe, ea este proporţională cu distanţa la baza $x_3 = 0$, şi cu raza vectoare $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, astfel că

$$u_1 = kx_3R, \qquad u_2 = hx_3R, \tag{37}$$

ceea ce, împreună cu relaţiile de mai sus, dă

$$u_1/u_2 = k/h = -\sin \chi/\cos \chi,$$

şi deci, notînd cu τ un coeficient de proporţionalitate:

$$u_1 = -\tau x_3 R \sin \chi, \qquad u_2 = \tau x_3 R \cos \chi,$$

aşadar tocmai primele două relaţii (10):

$$u_1 = -\tau x_2 x_3, \qquad u_2 = \tau x_1 x_3. \tag{38}$$

Fenomenul torsiunii se produce deci *fără deformarea secţiunii* (şi deci a frontierei) *în planul ei*. (Din (8.32), se vede că în cazul general proprietatea nu se menţine.)

Evaluînd unghiul η dintre raza vectoare a punctului (x_1, x_2) şi cea a aceluiaşi punct după deformaţie $(x_1 + u_1, x_2 + u_2)$, căpătăm

$$\eta \cong \operatorname{tg}\eta = \tau x_3, \tag{39}$$

ceea ce corespunde semnificaţiei lui τ din (1).

Acceptînd ipoteza lui Coulomb, dar renunțînd la presupunerea $u_3 = 0$, Saint-Venant a introdus ca ipoteză independentă presupunerea

$$u_3 = u_3(x_1, x_2), \tag{40}$$

care coincide în fapt cu a treia relație (10), și a rezolvat în acest mod problema torsiunii, făcînd uz de ecuațiile lui Lamé.

În fapt însă, ipoteza (40) *nu* este o ipoteză independentă. Pentru a ne convinge de aceasta, să introducem (38) în ecuațiile lui Lamé. Întrucît acum avem

$$\theta = \operatorname{div} \boldsymbol{u} = u_{3,3}, \tag{41}$$

ecuațiile (4.8.7) se reduc la

$$u_{3,13} = 0, \quad u_{3,23} = 0, \quad u_{3,11} + u_{3,22} + u_{3,33} + (1 - 2\nu)^{-1} u_{3,33} = 0. \tag{42}$$

Primele două din ele conduc la concluzia că

$$u_{3,1} = f(x_1, x_2), \quad u_{3,2} = g(x_1, x_2), \quad u_{3,3} = h(x_3), \tag{43}$$

astfel că a treia ecuație (42) devine

$$-\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} (u_{3,11} + u_{3,22}) = u_{3,33} = 2a, \tag{44}$$

unde a este o constantă. De aci urmează

$$u_{3,3} = h(x_3) = 2ax_3 + b, \quad u_3 = ax_3^2 + bx_3 + w_0(x_1, x_2), \tag{45}$$

unde b este de asemenea o constantă. Pentru σ_{33} obținem ușor de aci

$$\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)(2ax_3 + b). \tag{46}$$

Întrucît prin ipoteză avem $\mathcal{R}_3 = 0$ pe ambele baze, conchidem că

$$\iint\limits_{x_3 = l} (2ax_3 + b)\, \mathrm{d}D = \iint\limits_{x_3 = 0} (2ax_3 + b)\, \mathrm{d}D = 0, \tag{47}$$

de unde urmează $a = b = 0$; pentru componenta u_3 obținem deci o funcție independentă de x_3, așadar tocmai forma (40).

Ipoteza lui Saint-Venant este deci o *consecință* a ecuațiilor elasticității *și* a ipotezei lui Coulomb. De aci rezultă în particular că dacă baza $x_3 = 0$ (sau o secțiune oarecare) este fixată într-un mod care interzice deplanația (*torsiune împiedicată*), atunci și ipoteza rotației rigide a secțiunilor trebuie respinsă.

Pentru un istoric detailat al problemei torsiunii, vezi N. Arutiunian și B. Abramian [1], § 1.13.

§ 14. FUNCȚIA LUI PRANDTL ȘI CONSTANTELE LUI PRANDTL

a) Funcția lui Prandtl

Funcția lui Prandtl și Timoșenko — considerată pentru prima oară [9]) de către L. Prandtl [1], [2] pentru cazul *torsiunii* — se dovedește mai ușor de manevrat din punct de vedere teoretic, și cu semnificații mecanice mai simple decît funcțiile lui Saint-Venant.

Notînd în acest caz,

$$\mathsf{F}(x_1, x_2) = \mu\tau\, \mathsf{f}(x_1, x_2), \tag{1}$$

obținem din (12.7) ecuația lui Poisson

$$\Delta \mathsf{f} = -2, \tag{2}$$

iar din (12.9), condiția la limită

$$\mathsf{f}\big|_{\mathscr{L}_j} = f_j . \tag{3}$$

Funcția $\mathsf{f}(x_1, x_2)$ se numește *funcția lui Prandtl*, iar constantele f_j — *constantele lui Prandtl*. Din (12.10) urmează că funcția lui Prandtl este uniformă. Întrucît în (12.5) avem $T_F = 0$, formulele (12.6) se reduc la

$$T = -2i\, \mu\tau\, \mathsf{f}_{,\mathfrak{z}}, \tag{4}$$

sau încă

$$\sigma_{31} = \mu\tau\, \mathsf{f}_{,2}, \quad \sigma_{32} = -\mu\tau\, \mathsf{f}_{,1}. \tag{5}$$

Între funcția lui Prandtl și funcția de torsiune conjugată există legătura ce derivă din (12.5):

$$\mathsf{f} = \mathsf{t} - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \tag{6}$$

care arată că funcția lui Prandtl este tocmai funcția invariantă din (11.30).

Din comparația relațiilor (4) și (13.6) căpătăm imediat

$$\psi'(\mathfrak{z}) = 2\, \mathsf{r}_{,\mathfrak{z}} = 2i\, \mathsf{f}_{,\mathfrak{z}} + i\, \bar{\mathfrak{z}}. \tag{7}$$

Funcția lui Prandtl este numai un potențial de tensiune: un echivalent al relațiilor (13.10) nu există. (Vezi și § 12, pag. 222). De cîte ori va fi

[9]) În fapt, această funcție era deja folosită de către J. Boussinesq [1].

determinată funcția lui Prandtl, va fi apoi necesară și aflarea funcției $r(x_1, x_2)$, de pildă din (7):

$$r_{,1} = f_{,2} + x_2, \quad r_{,2} = - f_{,1} - x_1. \tag{8}$$

Ținînd seama de (1)—(3), relația generală (12.20) devine aci:

$$f(x_1, x_2) = - \sum_{j=1}^{m} f_j \oint_{\mathscr{L}_j} G_{,n}\, ds + 2 \iint_{\mathscr{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)\, dD_\xi. \tag{9}$$

Această formulă pune în evidență dependența între funcția lui Prandtl și constantele lui Prandtl, deocamdată necunoscute.

b) Constantele lui Prandtl și rigiditatea geometrică la torsiune

Să considerăm (L. Solomon [3]) funcțiile

$$b_j(x_1, x_2) = - \oint_{\mathscr{L}_j} G_{,n}\, ds, \tag{10}$$

numite *măsurile armonice* ale componentelor $\mathscr{L}_j$ ale frontierei. Se știe (vezi de ex. S. Mihlin [1], § 41) că ele sînt funcții armonice în $\mathscr{D}$, și satisfac condiția

$$b_j(x_1, x_2)\big|_{\mathscr{L}_h} = \delta_{jh}. \tag{11}$$

Întrucît extremele unei funcții armonice sînt atinse numai pe frontieră, rezultă $0 < b_j(x_1, x_2) < 1$ în $\mathscr{D}$. Introducînd (10) în (9), deducem

$$f(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{m} f_j b_j(x_1, x_2) + 2 \iint_{\mathscr{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)\, dD_\xi. \tag{12}$$

Mai departe, transcriind (12.19) pentru cazul torsiunii, căpătăm *formula lui Bredt* [10])

$$\oint_{\mathscr{C}} f_{,n}\, ds = - 2A. \tag{13}$$

Scriind această relație pe $\mathscr{L}_j$ (pe $\mathscr{L}_0$, ea rezultă atunci identic verificată) și introducînd aci (12), obținem — după operații asupra cărora nu ne oprim — sistemul

$$\sum_{h=1}^{m} B_{jh} f_h = 2\left[D_j + \iint_{\mathscr{D}} b_j(x_1, x_2)\, dD\right], \quad j, h = 1, 2 \ldots m, \tag{14}$$

[10]) Aceeași observație ca la pag. 234.

unde am notat

$$B_{jh} = \oint_{\mathscr{L}_j} b_{h,n} \, \mathrm{d}s. \tag{15}$$

Se poate demonstra că sistemul (14) are întotdeauna o soluție unică, ce poate fi găsită prin aproximații succesive; cercetarea acestei soluții arată că $f_j > 0$ $(j \geqslant 1)$, astfel că din (12) urmează acum $\mathrm{f}(x_1, x_2) > 0$ în $\mathscr{D}$.

Întrucît funcția lui Green depinde numai de configurația domeniului $\mathscr{D}$, din (14) rezultă că constantele lui Prandtl sînt niște *constante geometrice* ale domeniului.

Pentru determinarea lor, vezi încă J. Bartha [2] și P. Narasimhamurthy [1].

Introducînd (8) în (13.14), obținem

$$C = -\iint_{\mathscr{D}} (x_1 \mathrm{f}_{,1} + x_2 \mathrm{f}_{,2}) \, \mathrm{d}D, \tag{16}$$

de unde, utilizînd formula lui Riemann (A.3.18):

$$C = -\iint_{\mathscr{D}} [(x_1 \mathrm{f})_{,1} + (x_2 \mathrm{f})_{,2} - 2\,\mathrm{f}] \, \mathrm{d}D =$$

$$= -\oint_{\mathscr{L}} \mathrm{f}\,(x_1 n_1 + x_2 n_2) \, \mathrm{d}s + 2 \iint_{\mathscr{D}} \mathrm{f}(x_1, x_2) \, \mathrm{d}D.$$

Ținînd seama de condiția la limită (3), luînd $f_0 = 0$, integrînd pe $\mathscr{L}$ *cu respectarea sensului pozitiv*, și remarcînd că

$$\oint_{\mathscr{L}_j} (x_1 n_1 + x_2 n_2) \, \mathrm{d}s = 2 \iint_{\mathscr{D}_j^+} \mathrm{d}D = 2 D_j, \tag{17}$$

căpătăm în definitiv importanta formulă (vezi și § 16, pag. 278)

$$C = 2 \sum_{j=1}^{m} f_j D_j + 2 \iint_{\mathscr{D}} \mathrm{f}(x_1, x_2) \, \mathrm{d}D. \tag{18}$$

Mai departe, introducînd aci expresia (12), obținem

$$C = 2 \sum_{j=1}^{m} f_j \left[D_j + \iint_{\mathscr{D}} b_j(x_1, x_2) \, \mathrm{d}D \right] + 4 \iiiint_{\mathscr{D} \times \mathscr{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \, \mathrm{d}D_x \, \mathrm{d}D_\xi \tag{19}$$

sau încă, ținînd seama de ecuațiile (14):

$$C = 2 \sum_{j,h=1}^{m} B_{jh} f_j f_h + 4 \iiiint_{\mathscr{D} \times \mathscr{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \, \mathrm{d}D_x \, \mathrm{d}D_\xi, \tag{20}$$

ceea ce dă expresia rigidității C prin intermediul funcției lui Green. Întrucît avem $G > 0$, $b_j > 0$, $f_j > 0$, din (19) rezultă din nou $C > 0$.

În cazul unui domeniu simplu-conex, formulele se simplifică. Astfel, funcţia lui Prandtl este în acest caz soluţia problemei

$$\Delta \mathsf{f} = -2 \quad \text{în } \mathscr{D}, \quad \mathsf{f} = 0 \quad \text{pe } \mathscr{L}, \tag{21}$$

aşadar a unei probleme Dirichlet. Din (12) urmează:

$$\mathsf{f}(x_1, x_2) = 2 \iint\limits_{\mathscr{D}} \mathsf{G}(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)\, \mathrm{d}D_\xi, \tag{22}$$

iar pentru C avem, în loc de (18), (19), formulele simple

$$\mathsf{C} = 2 \iint\limits_{\mathscr{D}} \mathsf{f}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}D = 4 \iiiint\limits_{\mathscr{D} \times \mathscr{D}} \mathsf{G}(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)\, \mathrm{d}D_x \mathrm{d}D_\xi. \tag{23}$$

c) *Imagine geometrică*

Pentru a înţelege semnificaţia funcţiei lui Prandtl, să exprimăm cu ajutorul ei vectorul-tensiune $(\sigma_{31}, \sigma_{23}, 0)$ într-un punct oarecare al secţiunii $\mathscr{D}$. În acest scop, să considerăm familia de curbe

$$\mathsf{f}(x_1, x_2) = \text{const.} \tag{24}$$

Întrucît cosinuşii directori ai normalei la o curbă oarecare a familiei sînt proporţionali cu $\mathsf{f}_{,1}$ şi $\mathsf{f}_{,2}$ deducem — ţinînd seama de (5) şi (A.3.12) — :

$$\sigma_{31} = kn_2 = -k\cos(\boldsymbol{s}, x_1); \quad \sigma_{32} = -kn_1 = -k\cos(\boldsymbol{s}, x_2). \tag{25}$$

Prin urmare, vectorul tensiune este dirijat în fiecare punct după tangenta la linia $\mathsf{f} =$ const. ce trece prin acel punct. Liniile $\mathsf{f} =$ const. poartă numele de *traiectorii ale tensiunilor tangenţiale*. Ele se pot interpreta şi ca linii de nivel ale unei suprafeţe $X_3 = \mathsf{f}(x_1, x_2)$.

Din (3) rezultă că componentele lui $\mathscr{L}$ sînt traiectorii ale tensiunilor tangenţiale, aşadar în fiecare punct-frontieră tensiunea este dirijată după tangenta la $\mathscr{L}$.

Să calculăm acum proiecţia $T(\boldsymbol{s})$ a vectorului tensiune pe tangenta la o curbă $\mathscr{C}$ oarecare din $\mathscr{D}$, definită de versorul tangentei $\boldsymbol{s}$ (vezi (12.22)). Ţinînd din nou seama de (5) şi (A.3.12), obţinem

$$T(\boldsymbol{s}) = \mu\tau[-\mathsf{f}_{,2}\, n_2 - \mathsf{f}_{,1}\, n_1] = -\mu\tau \mathsf{f}_{,n}, \tag{26}$$

unde $\boldsymbol{n}$ este normala care formează cu tangenta $\boldsymbol{s}$ un sistem de axe $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}$ orientat la fel cu sistemul x_1, x_2: prin urmare, pentru o curbă închisă, $\boldsymbol{n}$ este normala exterioară; dacă $\mathscr{C} = \mathscr{L}_j \ (j \geqslant 1)$, $\boldsymbol{n}$ este normala exterioară la $\mathscr{D}_j^+$, aşadar normala interioară la $\mathscr{D}$.

Dacă curba $\mathscr{C}$ este o traiectorie a tensiunilor tangențiale, tensiunea tangențială este dirijată după $\boldsymbol{s}$, și prin urmare avem $T(\boldsymbol{s}) = \pm |T|$.

În definitiv, *direcția* vectorului tensiune într-un punct oarecare (subînțeles : pe un element de normală paralelă cu Ox_3) este dată de direcția tangentei la traiectoria $f(x_1, x_2) = \text{const.}$ ce trece prin acel punct; iar *mărimea* vectorului tensiune este dată de gradientul funcției $f(x_1, x_2)$ (derivata după direcția normalei la traiectorie).

d) Proprietăți extremale

Se poate ușor arăta că mărimea $|T|$ a tensiunii își atinge *maximul* pe frontiera $\mathscr{L}$; același lucru este valabil pentru *minimul* funcției $f(x_1\, x_2)$.

Într-adevăr, funcția lui Prandtl este *supraarmonică* în $\mathscr{D}\,(\Delta f < 0)$, și astfel de funcții își ating minimul numai pe $\mathscr{L}$ (vezi V. Smirnov [2], vol. 4, pct. 215). În particular, dacă $f(x_1, x_2)$ ar avea un minim într-un punct interior, în acel punct ar trebui să fie

$$f_{,1} = 0, \quad f_{,2} = 0, \quad f_{,11} \geqslant 0, \quad f_{,22} \geqslant 0,$$

ceea ce ar contrazice ecuația (2). Întrucît $f_j > 0\,(j \geqslant 1)$, rezultă că minimul este atins pe componenta $\mathscr{L}_0$ și valoarea sa este $f_0 = 0$.

Pe de altă parte, din (13.6) avem

$$|T|^2 = T\overline{T} = \mu^2\tau^2\,[\psi'(z)\,\overline{\psi'(z)} + i\,z\,\psi'(z) - i\,\bar{z}\,\overline{\psi'(z)} + z\bar{z}], \tag{27}$$

astfel că, ținînd seama de forma complexă (A.4.7) a operatorului lui Laplace :

$$\Delta(|T|^2) = 4\,(T\overline{T})_{,z\bar{z}} = 4\,\mu^2\,\tau^2\,(\psi''\,\overline{\psi''} + 1) > 0. \tag{28}$$

Funcția $|T|^2$ rezultă a fi *subarmonică* (vezi loc. cit), și își atinge deci maximul pe frontieră. Argumentul elementar de mai sus (cu semnele schimbate) rămîne valabil. Minimul funcției $|T|^2$ este desigur egal cu zero, și poate fi atins atît pe frontieră, cît și în interior. (Vezi § 16, pag. 266).

§ 15. PROBLEMA TORSIUNII. EXEMPLE

În acest paragraf vom da unele exemple de determinare a funcțiilor de torsiune în cazuri în care ele pot fi găsite efectiv, cu mijloace elementare. Un loc important îl ocupă aci metoda inversă, și cea a separării variabilelor.

a) Cerc. Coroană circulară

Fie că $\mathscr{D}$ este un cerc de rază R_0, sau o coroană de raze R_0 şi R_1 (cu $R_1 < R_0$). Căutînd o funcţie armonică în $\mathscr{D}$ şi care satisface condiţia la limită (13.11), găsim soluţia evidentă

$$\mathfrak{t}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{2} R_0^2 = \text{const.}, \tag{1}$$

unde constanta a fost aleasă astfel încît f_0 să fie nulă (vezi (14.6)).

OBSERVAŢIA 1. Aparent, soluţia problemei pentru coroana circulară ar putea fi căutată sub forma

$$\mathfrak{t}(x_1, x_2) = \alpha + \beta \ln R.$$

Într-adevăr, această funcţie este armonică, şi constantele α, β pot fi determinate din condiţia (13.11) scrisă pe cele două cercuri-frontieră. Ea nu este însă acceptabilă, întrucît conjugata armonică a funcţiei $\ln R$ nu este uniformă în $\mathscr{D}$ (vezi şi § 13, pag. 227).

Funcţia lui Prandtl în coordonate polare se scrie evident

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{2}(R_0^2 - R^2), \quad R^2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{2}$$

Din (1) urmează şi $\mathfrak{r}(x_1, x_2) \equiv$ const., şi deci şi $\psi(\mathfrak{z}) \equiv$ const.; alegînd $\mathfrak{r}(x_1, x_2) \equiv 0$, din (13.8) şi (13.10) avem

$$u_1 = -\tau x_2 x_3,\ u_2 = \tau x_1 x_3,\ u_3 = 0;\ \sigma_{31} = -\mu\tau x_2,\ \sigma_{32} = \mu\tau x_1. \tag{3}$$

Prin urmare, în cazul secţiunii circulare (cu sau fără gol concentric), ipoteza secţiunilor plane este respectată. De altfel, acesta este *singurul caz* în care ea e respectată: luînd $u_3 =$ const., deducem $\mathfrak{r} =$ const. şi deci şi $\mathfrak{t} =$ const., astfel că din (13.11) obţinem ecuaţiile unor cercuri concentrice (cel mult două). Acest fapt arată importanţa pasului făcut prin ipoteza lui Saint-Venant asupra deplanării.

Pentru rigiditatea geometrică la torsiune obţinem din (13.14)

$$C = I_0 = \iint_{\mathscr{D}} R^3 \,\mathrm{d}R \,\mathrm{d}\chi = \frac{1}{2}\pi(R_0^4 - R_1^4), \tag{4}$$

(în cazul cercului, $R_1 = 0$). Valoarea lui τ se calculează acum din (13.15).

Pentru un cerc de arie dată D, deducem din (4)

$$C = D^2/2\pi. \tag{5}$$

OBSERVAŢIA 2. Dacă constanta μ nu este cunoscută, ea poate fi determinată din mărimile cunoscute $\mathscr{M}_3$ şi $C = I_0$, şi valoarea măsurată a lui τ. Torsiunea unei bare cilindrice circulare poate constitui deci cea de a doua experienţă principial independentă necesară pentru determinarea constantelor elastice (vezi § 3.4, pag. 95).

Soluţia (3) (vezi şi raţionamentele din § 6, pag. 190) sugerează utilizarea de bare *tubulare*. Astfel, o bară de secţiune circulară cu raza R' are aceeaşi rigiditate ca o bară tubulară, dacă $R'^4 = R_0^4 - R_1^4$. Alegînd de exemplu $R_0 = 6$ cm, $R_1 = 5$ cm, obţinem $R' = 5{,}09$ cm, şi deducem că bara tubulară este cu 58% mai uşoară decît cea plină.

Exemplu numeric. Un arbore de maşină transmite o putere $P = 600$ c.p., lucrînd în regim de 120 rotaţii pe minut. Presupunînd arborele cilindric circular (plin), din oţel ($\mu = 750\,000$ kgf/cm²), să se calculeze raza minimă admisibilă pentru ca τ să nu depăşească 20'/m, iar $|T(s)|$ să nu depăşească 600 kgf/cm².

Puterea dată este $P = 600 \times 75$ kgm/sec $= 45 \cdot 10^5$ kg · cm/sec. Lucrul mecanic produs de cuplul $\mathcal{M}_3$ la o rotire de un unghi η este $\mathcal{M}_3\eta$. Întrucît avem $P = \mathcal{M}_3\eta$/sec, şi întrucît unghiul de rotaţie pe secundă este $120 \cdot 2\pi/60 = 4\pi$, obţinem $\mathcal{M}_3 = 45 \cdot 10^5/4\pi \cong 358 \cdot 10^3$ kg · cm.

Din (3), găsim pe frontieră

$$|\boldsymbol{\sigma}_3| = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} = \mu\tau R_0 = (\mathcal{M}_3/C)R_0 = 2\mathcal{M}_3/\pi R_0^3.$$

Punînd condiţia ca această cantitate să nu depăşească 600 kgf/cm², deducem $R_0 \geqslant \sqrt[3]{380 \text{ cm}^3} \cong 7{,}24$ cm. Aceasta este condiţia de rezistenţă a arborelui (calcul la tensiuni admisibile.)

Pe de altă parte, valoarea gradului de torsiune admis (calcul de rigiditate) dă $\mathcal{M}_3/\mu C \leqslant 20'$/m, de unde, întrucît 20'/m = 0,000058 radiani/cm, obţinem $R_0 \geqslant 8{,}51$ cm.

Se adoptă valoarea $R_0 = 8{,}51$ cm corespunzătoare condiţiei mai severe.

b) Elipsă

Să considerăm o secţiune a cărei frontieră are ecuaţia

$$x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1, \quad b \leqslant a, \tag{6}$$

(B. de Saint-Venant [1], cap. 6). Alegînd

$$\mathsf{f}(x_1, x_2) = K(x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 - 1), \tag{7}$$

ceea ce asigură verificarea condiţiei la limită din (14.21), obţinem $\Delta\mathsf{f} = 2K(a^{-2} + b^{-2})$. Pentru a asigura şi verificarea ecuaţiei (14.21), se ia deci $K = -a^2b^2/(a^2 + b^2)$. Prin urmare, funcţia lui Prandtl se scrie

$$\mathsf{f}(x_1, x_2) = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right). \tag{8}$$

Introducînd (8) în (14.5), obţinem

$$\sigma_{31} = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2}\mu\tau x_2, \quad \sigma_{32} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}\mu\tau x_1. \tag{9}$$

Pe de altă parte, ţinînd seama de (8) în prima relaţie (14.23), avem

$$C = 2\iint_{\mathscr{D}} \mathsf{f}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}D = 2\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\iint_{\mathscr{D}}\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right)\mathrm{d}D. \tag{10}$$

Pentru momentele de inerție ale domeniului mărginit de elipsa (6), căpătăm

$$I_1 = \frac{1}{4}\pi ab^3, \quad I_2 = \frac{1}{4}\pi a^3 b, \quad I_0 = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2), \tag{11}$$

astfel că din (10) urmează

$$C = \pi a^3 b^3/(a^2 + b^2). \tag{12}$$

Aceasta dă pentru gradul de torsiune valoarea

$$\tau = \mathcal{M}_3/\mu C = [(a^2 + b^2)/\pi\mu a^3 b^3]\,\mathcal{M}_3, \tag{13}$$

și deci formulele (9) devin în definitiv

$$\sigma_{31} = -(2\,\mathcal{M}_3/\pi ab^3)\,x_2, \quad \sigma_{32} = (2\,\mathcal{M}_3/\pi a^3 b)\,x_1. \tag{14}$$

Pentru modulul $|\boldsymbol{\sigma}_3| = |T|$ al vectorului tensiune avem de aci

$$|T| = (2\,\mathcal{M}_3/\pi ab)\sqrt{x_1^2/a^4 + x_2^2/b^4}. \tag{15}$$

Întrucît maximul acestei funcții este atins pe $\mathscr{L}$, trebuie să găsim punctele de anulare ale derivatei tangențiale $|T|_{,s}$ pe $\mathscr{L}$. Ținînd seama de (A.3.12), (8) și (15), avem pe rînd

$$|T|_{,s} = -|T|_{,1}\,n_2 + |T|_{,2}\,n_1 = \alpha(-|T|_{,1}\,f_{,2} + |T|_{,2}\,f_{,1}) = \beta(a^{-2} - b^{-2})\,x_1 x_2,$$

(unde α, β sînt coeficienți de proporționalitate), astfel că, pentru $a \neq b$, extremele sînt atinse pe axele elipsei. Avînd de ales între extremele mărimilor x_1/a^2 și x_2/b^2, deducem că mărimea tensiunii ia valoarea maximă pentru $x_1 = 0$, $x_2 = \pm b$, așadar la capetele semiaxei *mici* ale elipsei (6):

$$|\boldsymbol{\sigma}_3|_{max} = 2\,\mathcal{M}_3/\pi ab^2. \tag{16}$$

Acest rezultat este contrar celor ce s-ar petrece dacă ipoteza secțiunilor plane ar fi valabilă: am avea atunci $|\boldsymbol{\sigma}_3|^2 = \mu^2\tau^2(x_1^2 + x_2^2)$, funcție care ia valoarea maximă pentru $x_2 = 0$, $x_1 = \pm a$. Semnificația acestei proprietăți va fi mai bine înțeleasă în § 16, pag. 266

Pentru a calcula deplasările, este necesară determinarea funcției $\mathsf{r}(x_1, x_2)$. Din (14.8) și (8) obținem ușor

$$\mathsf{r}_{,1} = -[(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)]\,x_2, \quad \mathsf{r}_{,2} = -[(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)]\,x_1, \tag{17}$$

de unde urmează

$$\mathsf{r}(x_1, x_2) = -[(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)]\,x_1 x_2. \tag{18}$$

Ținînd seama și de (13), avem în definitiv

$$u_3(x_1, x_2) = -[(a^2 - b^2)/\pi\mu a^3 b^3]\,\mathcal{M}_3 x_1 x_2. \tag{19}$$

Secțiunile normale se transformă deci în paraboloizi hiperbolici. Deplasările tangențiale sînt cunoscute din (13.10) și (13).

Secţiunea eliptică reprezintă unul din rarele cazuri în care calculele se desfăşoară atît de simplu. În particular, acesta este unul din rarele cazuri în care funcţia lui Prandtl poate fi căutată sub forma unui produs de funcţii, printre care intervine ecuaţia frontierei sub formă implicită, ceea ce asigură verificarea condiţiei la limită din (14.21). (Vezi de ex. L. Leibenzon [2].) Lucrurile se petrec astfel, datorită structurii simple a funcţiei $\psi(\mathfrak{z})$. Anume, din (14.6) şi (8) deducem

$$\mathrm{t}(x_1, x_2) = \mathrm{f}(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}. \tag{20}$$

Întrucît avem evident $-x_1x_2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}(x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{z}^2$, din (18) şi (20) deducem că soluţia complexă a problemei are forma

$$\psi(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\mathrm{i}\mathfrak{z}^2 + \mathrm{i}\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}, \tag{21}$$

unde termenul constant poate fi neglijat (el corespunde valorii $f_0 = 0$).

Soluţia aceleiaşi probleme poate fi obţinută şi printr-o metodă de tip invers, considerînd funcţii de forma $h\mathfrak{z}^n$ (unde h este o constantă complexă, iar n, un număr natural) şi determinînd domeniile corespunzătoare. Pentru $n = 2$, găsim elipsa.

Să revenim asupra rigidităţii geometrice la torsiune. Notînd cu

$$D = \pi ab \quad \text{şi} \quad k = \sqrt{1 - b^2/a^2} \tag{22}$$

aria şi excentricitatea, şi ţinînd seama de valoarea I_0, din (11), putem transcrie (12) sub forma

$$C = (D^4/4\pi^2 I_0). \tag{23}$$

Mai departe, avem desigur

$$a = \sqrt{\frac{D}{\pi}}(1 - k^2)^{-1/4}, \quad b = \sqrt{\frac{D}{\pi}}(1 - k^2)^{1/4}, \quad I_0 = \frac{D^2\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)}{2\pi\sqrt{1 - k^2}}, \tag{24}$$

astfel că (23) devine

$$C = (D^2/2\pi)\sqrt{1 - k^2} : \left(1 - \frac{1}{2}k^2\right). \tag{25}$$

Dezvoltînd în serie această expresie, obţinem

$$C = (D^2/2\pi)\left[1 - \frac{1}{8}k^4 l_1(k)\right], \tag{26}$$

unde am notat (compară mai departe cu (10.7.27)):

$$l_1(k) = 1 + k^2 + \left(1 - \frac{3}{16}\right)k^4 + \ldots \tag{27}$$

Prin urmare, rigiditatea geometrică la torsiune depinde de *aria* D a secțiunii eliptice, și numai în relativ mică măsură de *forma* acesteia, caracterizată de excentricitatea k, sau de aria D *și* de momentul I_0. (Desigur, aceste relații își pierd sensul pentru $k \cong 1$.)

Pentru paranteza dreaptă din (26), avem valorile de mai jos:

k	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,97
$1-\frac{1}{8}k^4 l_1(k)$	1	0,9998	0,9962	0,9756	0,9458	0,8823	0,7326	0,5688	0,4590

B. de Saint-Venant [3] a propus formula (23) ca expresie *aproximativă* a rigidității pentru *orice* secțiune simplu-conexă. Scriind-o sub forma

$$C = \varkappa (D^4/I_0), \tag{28}$$

unde $\varkappa_{\text{elipsă}} = (1/4\pi^2) = 0{,}02533$, el a calculat valorile exacte ale lui $\varkappa$ pentru diferite secțiuni (chiar secțiuni atît de îndepărtate de cea eliptică, cum sînt profilele în I), obținînd rezultate satisfăcătoare. (Vezi tabela la finele paragrafului, pag. 260, coloana a doua.) Fără îndoială, valabilitatea formulei aproximative a lui Saint-Venant este legată de rolul redus al *formei* elipsei de secțiune în valoarea lui C, evidențiată în (26).

OBSERVAȚIA 3. Se înțelege că de aci nu rezultă *nimic* în ce privește valorile tensiunii (și în particular, ale tensiunii tangențiale maxime). Vezi de exemplu H. Muștari [1].

Din formula (23) rezultă că, la arie egală, cea mai avantajoasă secțiune este cea cu I_0 minimal. Din (26) urmează că secțiunea optimă este cea circulară ($k = 0$; compară cu (5)). Desigur, aceasta *nu* reprezintă o demonstrație, întrucît formulele au numai caracter aproximativ (dacă $\mathscr{D}$ nu este mărginit de o elipsă). Faptul că, la arie egală, domeniul simplu-conex de rigiditate geometrică maximă la torsiune este discul circular, a fost demonstrat de G. Polya [1]; în cazul domeniilor dublu conexe, rolul de domeniu de rigiditate maximă la aceeași arie îl are coroana circulară (G. Polya și A. Weinstein [1]). O amplă analiză a problemei este prezentată de G. Polya și G. Szegö [1], capitolul 5.

OBSERVAȚIA 4. Funcția (8) este funcția lui Prandtl și pentru orice domeniu dublu conex mărginit de elipsa (6) și de o curbă $f(x_1, x_2) = \text{const}$.

c) Triunghi echilateral

Exemplul ce urmează (B. de Saint-Venant [1], § 105) prezintă sugestiv modul de utilizare a metodei inverse din (13.11), (13.12). Fie deci

$$\psi(\mathfrak{z}) = k\mathfrak{z}^3, \tag{29}$$

unde coeficientul k este indispensabil pentru a asigura dimensiunile necesare ale cantităților cu care avem de-a face (vezi § 13, pag. 227). Scriind $\psi(\mathfrak{z})$ sub forma (13.2), obținem

$$\mathrm{r}(x_1, x_2) = k(x_1^3 - 3x_1x_2^2), \quad \mathrm{t}(x_1, x_2) = k(3x_1^2x_2 - x_2^3). \tag{30}$$

Luînd funcția $\mathrm{r}(x_1, x_2)$ drept funcție de torsiune, căpătăm din (13.11) ecuația curbei-frontieră sub forma

$$k(3x_1^2x_2 - x_2^3) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = h, \quad (h = \text{const.}). \tag{31}$$

Asimptotele acestei cubice se obţin egalînd cu zero suma termenilor de grad 3 :

$$3x_1^2x_2 - x_2^3 \equiv - x_2(x_2 + \sqrt{3}x_1)(x_2 - \sqrt{3}x_1) = 0.$$

Să considerăm trei drepte respectiv paralele cu aceste asimptote

$$x_2 = a,\ x_2 + \sqrt{3}x_1 = b,\ x_2 - \sqrt{3}x_1 = b, \tag{32}$$

şi să determinăm k, h pentru care cubica (31) degenerează în ansamblul acestor trei drepte. Identificînd expresiile

$$k(3x_1^2x_2 - x_2^3) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - h \equiv c(x_2 - a)\,[(x_2 - b)^2 - 3x_1^2],$$

obţinem

$$k = 1/6a,\ h = -\frac{2}{3}a^2;\ b = -2a,\ c = -1/6a. \tag{33}$$

Pentru aceste valori, cubica (31) degenerează în ansamblul dreptelor

$$x_2 = a,\ x_2 + \sqrt{3}x_1 + 2a = 0,\ x_2 - \sqrt{3}x_1 + 2a = 0, \tag{34}$$

care definesc un triunghi echilateral cu centrul în origine.

Avem deci

$$\psi(\mathfrak{z}) = (1/6a)\,\mathfrak{z}^3,$$

$$r(x_1, x_2) = (1/6a)(x_1^3 - 3x_1x_2^2), \tag{35}$$

$$f(x_1, x_2) = (1/6a)(3x_1^2x_2 - x_2^3) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{2}{3}a^2,$$

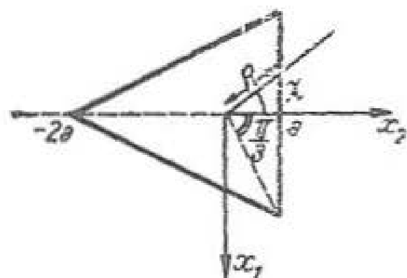


Fig. 5.15.1

unde constanta a caracterizează dimensiunile triunghiului. Expresia

$$u_3 = (\tau/6a)x_1(x_1 - \sqrt{3}x_2)(x_1 + \sqrt{3}x_2) \tag{36}$$

defineşte aspectul după deformaţie al secţiunilor iniţial plane. În particular, înălţimile triunghiului rămîn după deformaţie în planul iniţial al secţiunii.

Pentru a determina τ, ne rămîne să calculăm, folosind de pildă (13.24), valoarea

$$C = I_0 - (1/4a^2)\iint_{\mathscr{D}}(x_1^2 + x_2^2)^2\,\mathrm{d}D. \tag{37}$$

În coordonate polare, deducem (vezi I. Rîjik şi I. Gradstein [1], formula 2.246)

$$I_0 = 6\int_0^{\pi/3}\mathrm{d}\chi\int_0^{a/\cos\chi}R^3\mathrm{d}R = 3\sqrt{3}a^4,\quad C = \frac{9}{5}\sqrt{3}a^4, \tag{38}$$

sau încă, întrucît latura triunghiului este $l = 2\sqrt{3}a$, iar aria $D = 3\sqrt{3}a^2$:

$$C = 0{,}1155\,D^2 = 0{,}0222\,(D^4/I_0). \tag{39}$$

OBSERVAŢIA 5. Folosind diferite funcţii de forma $k\mathfrak{z}^n$ şi combinaţii de astfel de funcţii B. de Saint-Venant (loc. cit.) a rezolvat numeroase probleme de acest tip.

OBSERVAŢIA 6. Pentru triunghiul dreptunghic isoscel, vezi B. Galerkin [2], volumul 1. Pentru alte triunghiuri, soluţia nu este elementară. (Vezi de ex. N. Gloumakoff şi Yi-Yuan Yu [1]).

d) Lunulă circulară. Concentrarea tensiunilor

Tot în spiritul metodei inverse, să alegem

$$\psi(\mathfrak{z}) = k\mathfrak{z} + h\mathfrak{z}^{-1} + l, \tag{40}$$

(k, h, l — constante reale, deocamdată nedeterminate), de unde

$$\mathfrak{r}(x_1, x_2) = kx_1 + h\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + l, \quad \mathfrak{t}(x_1, x_2) = kx_2 - h\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \tag{41}$$

Este de preferat să definim ecuaţia curbei-frontieră a domeniului corespunzător sub forma (13.12), ceea ce echivalează cu a lua în (13.11) drept funcţie complexă de torsiune, funcţia i $\psi(\mathfrak{z})$. Căpătăm astfel

$$kx_1 + h\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + l - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = 0, \tag{42}$$

aşadar ecuaţia unei cuartice. Să determinăm valorile k, h, l, pentru care ea se descompune în ansamblul a două conice. În coordonate polare $\mathfrak{z} = R \exp(\mathrm{i}\,\chi)$, căpătăm uşor

$$(R^2 - 2l)\left(1 - 2k\frac{R^2 + h/k}{R^2 - 2l}\frac{\cos\chi}{R}\right) = 0.$$

Luînd aci $2l = c^2$, $h/k = -2l = -c^2$, $k = a$, obţinem

$$(R^2 - c^2)\,[1 - 2a\,(\cos\chi)/R] = 0, \tag{43}$$

ceea ce, pentru $c < 2a$, este ecuaţia ansamblului celor două cercuri din figură, unul avînd centrul pe circumferinţa celuilalt.

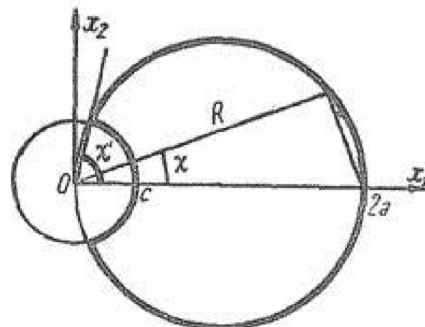


Fig. 5.15.2

Acesta este cazul elementar al problemei lunulei circulare, considerat iniţial de C. Weber [1], [2]. Pentru cazul ne-elementar, cînd centrul cercului de rază c *nu e situat* pe circumferinţa celuilalt, vezi I. Sokolnikoff [2], § 45; I. Sokolnikoff şi E. Sokolnikoff [1]; L. Hamburger et al. [1]; I. Ufliand [2], §§ 2.7–2.9.

Prin urmare, pentru domeniul mărginit de cele două cercuri şi care nu conţine originea (punct în care funcţia (40) *nu* este olomorfă), avem

$$\psi(\mathfrak{z}) = \mathrm{i}a\,(\mathfrak{z} - c^2\,\mathfrak{z}^{-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{i}c^2, \tag{44}$$

$$\mathsf{f}(x_1, x_2) = a\left(x_1 - c^2 \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}(c^2 - R^2)\left(1 - \frac{2a\cos\chi}{R}\right). \tag{45}$$

(Am ales funcţia (44) în locul funcţiei ce ar rezulta direct din (40) şi (13.11), pentru ca axa de simetrie a figurii să fie axa polară.)

Considerînd aci şi cazul-limită $c \to 0$, obţinem funcţiile

$$\psi(\mathfrak{z}) = \mathrm{i}a\mathfrak{z}, \quad \mathsf{f}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}R^2[1 - 2a(\cos\chi)/R], \tag{46}$$

care coincid cu funcţiile corespunzătoare pentru cazul cercului; aceasta decurge din (11.28) (unde trebuie neglijat un termen de forma $\mathrm{i}\bar{\mathfrak{z}}^0\mathfrak{z}$, corespunzător unei deplasări rigide după cum rezultă ţinînd seama de (8.10)), respectiv din (11.31) (transcriind formula (2) pentru originea aleasă nu în centrul, ci pe frontiera discului de rază a).

Dar aceasta nu înseamnă că tensiunile corespunzătoare cazului limită $c \to 0$ ar coincide cu cele ce se obţin în cazul discului circular, aşadar luînd de la început $c = 0$, şi căutînd funcţia $\psi(\mathfrak{z})$ sub forma din (46) (funcţie olomorfă *inclusiv* în $\mathfrak{z} = 0$, sau care cel puţin poate fi prelungită prin continuitate în acest punct). Vom reveni mai departe asupra acestei chestiuni.

Pentru rigiditatea geometrică la torsiune, avem din (14.23) şi (45):

$$\mathsf{C} = \iint_{\mathscr{D}} (c^2 - R^2)[1 - 2a(\cos\chi)/R]R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\chi, \tag{47}$$

cu limitele de integrare

$$c \leqslant R \leqslant 2a\cos\chi, \quad -\chi' \leqslant \chi \leqslant \chi', \tag{48}$$

unghiul $\chi' = \chi_{\max}$ fiind definit de relaţia evidentă

$$\cos\chi' = c/2a. \tag{49}$$

Efectuînd calculele în (47), căpătăm

$$\mathsf{C} = a^4\left\{\left[1 - 2(c/a)^2 - \frac{1}{2}(c/a)^4\right]\chi' + \left[\frac{1}{2}(c/a) + \frac{7}{4}(c/a)^3\right]\sin\chi'\right\}, \tag{50}$$

după care din (13.15) se calculează gradul de torsiune $\tau = \mathscr{M}_3/\mu\mathsf{C}$.

Pentru a determina tensiunea tangențială, putem face uz de formula (13.6) și (44), sau de (14.5) și (45), de unde

$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = -\,\mathrm{i}\mu\tau\,[a(1 + c^2/\bar{\mathfrak{z}}^2) - \mathfrak{z}], \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \mu\tau\left[-x_2 + ac^2\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right], \\ \sigma_{32} &= \mu\tau\left[-a + x_1 - ac^2\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right]. \end{aligned} \tag{52}$$

Prezintă interes deosebit examinarea a două cazuri-limită: $c \to 0$ (disc circular cu o mică slăbire circulară pe frontieră — caz limită al barei cilindrice circulare cu un canal longitudinal circular), și $c \to 2a$ (lunulă circulară subțire).

În primul din acestea, din (49) deducem $\chi' \to \frac{1}{2}\pi$. Întrucît $c/2a = \cos\chi' = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \chi'\right) \cong \frac{1}{2}\pi - \chi'$, deducem

$$\chi' \cong \frac{1}{2}(\pi - c/a), \quad \sin\chi' = \sqrt{1 - \frac{1}{4}(c/a)^2} \cong 1 - \frac{1}{8}(c/a)^2. \tag{53}$$

Introducînd aceste valori în (50), constatăm că termenii liniari în c/a se reduc; neglijînd pe cei cubici și de grad superior, obținem

$$C \cong \frac{1}{2}\pi a^4\,[1 - 2(c/a)^2]. \tag{54}$$

Prin urmare, dacă $c \to 0$, căpătăm pentru C tocmai valoarea cunoscută pentru cerc. O slăbire de forma considerată modifică deci numai cu puțin (și anume, cu termeni *patratici* în c/a față de unitate) mărimile cu caracter *global* C și τ.

Să considerăm acum tensiunile ce apar în cazul cercului (așadar să utilizăm funcțiile (46) în loc de (44), (45)):

$$T = -\,\mathrm{i}\mu\tau(a - \mathfrak{z}), \quad \sigma_{31} = -\,\mu\tau x_2, \quad \sigma_{32} = \mu\tau(-a + x_1). \tag{55}$$

Dacă raportul $c/|\mathfrak{z}|$ este mic, diferența între soluțiile (51), (52) și (55) este de asemenea mică, și comparabilă cu *patratul* raportului $c/|\mathfrak{z}|$ față de unitate. Prin urmare, influența unei slăbiri circulare pe frontieră asupra tensiunilor este și ea neglijabilă la oarecare distanță. Dimpotrivă, la distanță mică tensiunile se modifică sensibil, întrucît raportul $c/|\mathfrak{z}|$ nu mai este neglijabil. În particular, luînd $\mathfrak{z} = c\exp(\mathrm{i}\chi)$, calculînd din (51) tensiunile pe frontieră, și făcînd apoi $c \to 0$, căpătăm

$$\lim_{c\to 0} T(c, \chi) = -\,\mathrm{i}\mu\tau a\,[1 + \exp(2\mathrm{i}\chi)] \tag{56}$$

(unde notaţia subliniază faptul că tensiunea depinde nu numai de punct, ci şi de direcţie), în timp ce pentru discul circular deducem

$$T(0) = -\mathrm{i}\mu\tau a. \tag{57}$$

După cum se vede, pentru $\chi = \pm \pi/2$ (punctele unghiulare ieşinde ale frontierei) tensiunea tangenţială se anulează. Dimpotrivă, pentru $\chi = 0$, ea este la limită cu 100% mai mare decît în cazul discului circular fără slăbire.

În consecinţă, o mică slăbire circulară pe frontieră (de ex., un canal de ungere al unui arbore) nu modifică sensibil nici parametrii *globali* (C şi τ), şi nici tensiunile la distanţă destul de mare; în schimb, ea duce *local* la creşteri considerabile ale tensiunii, adică la o *concentrare a tensiunilor*, cu un coeficient de concentrare mergînd pînă la valoarea 2. (Vezi şi § 4.2, pag. 127). Exemplul simplu de faţă arată limpede primejdia fisurilor—chiar microscopice—în material, şi importanţa realizării unor conture *cît mai netede*, fără discontinuităţi ale tangentei (Vezi şi exemplul *f*, pag. 259).

Explicaţia matematică a fenomenului în cazul considerat este legată de faptul că originea este un *pol* al funcţiei (44). Pentru $c \to 0$, termenul polar dispare din expresia ei — dar nu şi din expresia tensiunii T, care depinde de *derivata* funcţiei (44) şi în care, pentru $c \to 0$, $\mathfrak{z} \to 0$, obţinem termeni suplimentari faţă de soluţia corespunzătoare cazului $c = 0$.

În al doilea caz-limită, avem $c/2a \to 1$, aşadar $\chi' \to 0$. Ţinînd seama de (49), transcriind (50) sub forma

$$C = a^4 [\chi'(1 - 8\cos^2\chi' - 8\cos^4\chi') + \sin\chi'(\cos\chi' + 14\cos^3\chi')] =$$
$$= a^4\left[\sin\chi'\left(\frac{23}{2}\cos\chi' + \frac{7}{2}\cos 3\chi'\right) - \chi'(6 + 8\cos 2\chi' + \cos 4\chi')\right], \tag{58}$$

şi efectuînd dezvoltările în serie, obţinem

$$C = \frac{64}{105}a^4\chi'^7 + \cdots, \tag{59}$$

unde am neglijat termenii de ordin superior. De aci rezultă că, chiar pentru valori nu prea mici ale unghiului χ' (sub $15^0 \cong 0{,}3$ radiani), formula (50) îşi pierde precizia, şi trebuie înlocuită cu (59). Asupra acestui rezultat vom reveni în § 16, exemplul *f*, pag. 271.

e) Dreptunghi

În unele cazuri (mai ales dacă frontiera este alcătuită din arce de ecuaţii destul de simple: drepte, arce de cerc) soluţia problemei se poate obţine prin separarea variabilelor şi dezvoltări în serie, eventual după o schimbare convenabilă de coordonate.

Fie o bară de secțiune dreptunghiulară, avînd laturile de ecuații $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$, unde $b \leqslant a$. (Pentru soluția originală, vezi B. de Saint-Venant) [1], cap. 8.)

Căutînd funcția lui Prandtl sub forma

$$\mathrm{f}(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{X}_n(x_1)\,\mathrm{Y}_n(x_2), \tag{60}$$

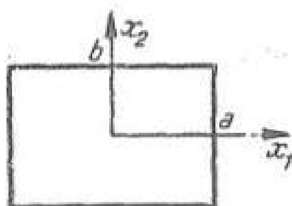


Fig. 5.15.3

obținem ușor din ecuația (14.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{X}_n''(x_1)\,\mathrm{Y}_n(x_2) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{X}_n(x_1)\,\mathrm{Y}_n''(x_2) = -2. \tag{61}$$

Dată fiind simetria secțiunii, funcția $\mathrm{f}(x_1, x_2)$ trebuie să fie pară.

Să dezvoltăm membrul al doilea din (61) în serie Fourier în intervalul $-b \leqslant x_2 \leqslant b$. Pentru aceasta, considerăm funcția

$$h(x_2) = \begin{cases} 2 & \text{pentru } -2b \leqslant x_2 < -b,\ b < x_2 \leqslant 2b, \\ -2 & \text{pentru } -b \leqslant x_2 \leqslant b, \end{cases} \tag{62}$$

pentru care obținem ușor dezvoltarea

$$h(x_2) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos \frac{2n+1}{2b}\pi x_2. \tag{63}$$

Notînd

$$\lambda_n = (2n+1)\lambda_0, \quad \lambda_0 = \pi/2b, \tag{64}$$

și alegînd în (60)

$$\mathrm{Y}_n(x_2) = \cos \lambda_n x_2, \tag{65}$$

ceea ce asigură verificarea condiției $\mathrm{f}(x_1, x_2)|_{\mathscr{L}} = 0$ pe laturile $x_2 = \pm b$ — obținem din (61) pentru $\mathrm{X}_n(x_1)$ ecuația

$$\mathrm{X}_n''(x_1) - \lambda_n^2 \mathrm{X}_n(x_1) = -\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1}, \tag{66}$$

a cărei soluție generală are forma

$$\mathrm{X}_n(x) = A_n \operatorname{ch} \lambda_n x_1 + B_n \operatorname{sh} \lambda_n x_1 + \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1}\lambda_n^{-2}. \tag{67}$$

Impunînd condiția $\mathrm{f}(x_1, x_2)|_{\mathscr{L}} = 0$ și pe laturile $x_2 = \pm b$, obținem din (67)

$$A_n = -\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\lambda_n^2 \operatorname{ch} \lambda_n a}, \quad B_n = 0. \tag{68}$$

În definitiv, am căpătat astfel funcţia lui Prandtl sub forma

$$f(x_1, x_2) = \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a}\right] \cos \lambda_n x_2, \tag{69}$$

aşadar o serie foarte rapid convergentă.

Pentru componentele tensiunii obţinem din (69) şi (14.5)

$$\sigma_{31} = -\frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a}\right] \sin \lambda_n x_2, \tag{70}$$

$$\sigma_{32} = \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \cos \lambda_n x_2,$$

astfel că pe frontieră, unde trebuie să apară tensiunile maximale, avem:

$$\sigma_{31}(\pm a, x_2) = 0, \quad \sigma_{32}(\pm a, x_2) = \pm \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{th} \lambda_n a \cos \lambda_n x_2, \tag{71}$$

$$\sigma_{31}(x_1, \pm b) = \mp \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a}\right], \quad \sigma_{32}(x_1, \pm b) = 0. \tag{72}$$

După cum era de aşteptat, vectorul tensiune este dirijat după tangenta la $\mathscr{L}$.

Pentru a determina punctele în care apar tensiunile tangenţiale maximale, să considerăm separat seriile din (71), (72).

Funcţia $\operatorname{th} \xi$ tinde rapid către 1 pentru $\xi \to \infty$. Întrucît $a \geqslant b$, avem $\lambda_n a \geqslant \geqslant \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, de unde $\operatorname{th} \lambda_0 a \geqslant 0{,}917$ şi $\operatorname{th} \lambda_n a \cong 1$ pentru $n \geqslant 1$. Aşadar, din (71) obţinem cu o bună aproximaţie

$$\sigma_{32}(a, x_2) \cong \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \left[\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} \cos \frac{\pi x_2}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \lambda_n x_2\right], \tag{73}$$

de unde pentru derivată:

$$[\sigma_{32}(a, x_2)]_{,2} \cong -\frac{8}{\pi} \mu\tau \left[\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} \sin \frac{\pi x_2}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sin \lambda_n x_2\right]. \tag{74}$$

Această funcţie se anulează pentru $x_2 = 0$ (ca şi derivata valorii exacte a tensiunii). Maximul tensiunii pe latura $x_1 = \pm a$ este deci atins pentru $x_2 = 0$:

$$\sigma_{32}(a, 0) \cong \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \left[\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right]. \tag{75}$$

Pentru a calcula suma seriei din (75), amintim că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = G = 0{,}915965\ldots \tag{76}$$

unde G este constanta lui Catalan (vezi de ex. I. Rîjik şi I. Gradştein [1], formula 0.234). Prin urmare, (75) devine

$$\sigma_{32}(a, 0) \cong \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \left[\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} - 0{,}084 \right]. \tag{77}$$

Pe de altă parte, din (72) deducem

$$[\sigma_{31}(x_1, b)]_{,1} = \frac{8}{\pi}\mu\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a}, \tag{78}$$

aşadar o expresie ne-negativă, care se anulează numai pentru $x_1 = 0$. Întrucît avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} = \frac{1}{8}\pi^2, \tag{79}$$

(vezi loc. cit.), deducem pentru maximul corespunzător

$$\sigma_{31}(0, b) = -2b\mu\tau \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \right]. \tag{80}$$

Or, întrucît avem

$$\operatorname{ch} \lambda_0 a = \operatorname{ch} \frac{\pi a}{2b}, \quad \operatorname{ch} \lambda_1 a \geqslant \operatorname{ch} \frac{3}{2}\pi \cong 55, \quad \operatorname{ch} \lambda_2 a \geqslant \operatorname{ch} \frac{5}{2}\pi = 1286,$$

rezultă că

$$\sigma_{31}(0, b) \cong -2b\mu\tau \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi a/2b)} - \frac{8}{9\pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}(3\pi a/2b)} \right]. \tag{81}$$

Se constată uşor — cu gradul de aproximaţie acceptat în acest calcul — că avem $\sigma_{31}(0, b) \geqslant \sigma_{32}(a, 0)$. Pentru aceasta, trebuie să arătăm că

$$\frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi a/2b)} - \frac{1}{9 \operatorname{ch}(3\pi a/2b)} \geqslant \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} - 0{,}084.$$

(Întrucît $1 \geqslant \operatorname{th}(\pi a/2b) \geqslant 0{,}917$ şi $\pi^2/8 = 1{,}2337$, ambele cantităţi sînt pozitive.) Obţinem de aci

$$\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi a/2b)} + \frac{1}{9 \operatorname{ch}(3\pi a/2b)} \leqslant 1{,}3177,$$

ceea ce conduce la condiţia $\exp(\pi a/2b) \geqslant 4{,}825$, sau încă $\pi a/2b \geqslant 1{,}57$, aşadar $a \geqslant b$, ceea ce este asigurat prin ipoteză.

Tensiunea tangenţială maximă este deci atinsă în punctele $(0, \pm b)$, adică la mijlocul laturilor mari ale dreptunghiului. (Vezi şi mai sus, pag. 241.) Valoarea tensiunii tangenţiale maxime este deci dată de (81)— unde se poate renunţa de altfel la al treilea termen.

Pentru rigiditatea geometrică la torsiune obținem din (14.23) și (69)

$$C = 2\iint_{\mathscr{D}} \mathsf{f}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}D = \frac{16}{3} ab^3 \left[1 - \frac{192\, b}{\pi^5 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \lambda_n a}{(2n+1)^5}\right], \tag{82}$$

unde am ținut seama (vezi loc. cit.) că

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-4} = \pi^4/96. \tag{83}$$

Pentru a determina componenta u_3 a deplasării, este necesară cunoașterea funcției $\mathsf{r}(x_1, x_2)$. Introducînd (69) în relațiile (14.8), deducem mai întîi

$$\mathsf{r}_{,1} = -\frac{16\, b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a}\right] \sin \lambda_n x_2 + x_2, \tag{84}$$

$$\mathsf{r}_{,2} = \frac{16\, b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \cos \lambda_n x_2 - x_1. \tag{85}$$

Integrînd relația (63) în raport cu x_2 pentru $-b \leqslant x_2 \leqslant b$, obținem

$$-2x_2 = -\frac{16\, b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{2n+1}{2b} \pi x_2. \tag{86}$$

(Constanta de integrare este nulă). Utilizînd (86) în (84), avem deci

$$\mathsf{r}_{,1} = \frac{16\, b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \sin \lambda_n x_2 - x_2, \tag{87}$$

și relațiile (85) și (87) sau imediat

$$\mathsf{r}(x_1, x_2) = -x_1 x_2 + \frac{32\, b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \sin \lambda_n x_2. \tag{88}$$

Datorită prezenței factorilor ch $\lambda_n a$, seriile ce intervin în calcule sînt atît de rapid convergente, încît putem reține numai primul lor termen.

Suma din (82) a fost calculată de Saint-Venant pentru diverse valori ale raportului b/a. Pentru $b/a < 1/3$, ea nu mai depinde practic vorbind de acest raport, și C are valoarea

$$C \cong \frac{16}{3} ab^3 \, [1 - 0{,}63\, (b/a)]. \tag{89}$$

Pentru $b \ll a$, chiar și primii termeni din aceste serii sînt neglijabili, și obținem

$$C \cong \frac{16}{3} ab^3, \quad \mathsf{r}(x_1, x_2) \cong -x_1 x_2, \quad \sigma_{31} = -2\mu\tau x_2, \quad \sigma_{32} \cong 0. \tag{90}$$

Celălalt caz-limită ($b = a$) este cel al pătratului. Din (82) urmează

$$C = \frac{16}{3} a^4 \left\{1 - 192\pi^{-5}\left[\text{th}\,\frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)^{-5}\right]\right\}.$$

Ţinînd seama aci de valorile

$$\text{th}\,\pi/2 = 0{,}9172, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)^{-5} = 0{,}0046, \tag{91}$$

obţinem

$$C = 2{,}249\, a^4 = 0{,}1405\, D^2 = 0{,}0234\,(D^4/I_0). \tag{92}$$

f) Semicoroană circulară. Concentrarea tensiunilor

Problema poate fi studiată în mod analog, prin metoda separării variabilelor — dar de data aceasta în coordonate polare. În loc de (66) se obţine o ecuaţie de tip Euler, astfel că locul liniilor hiperbolice este luat de termeni polinomiali în raport cu raza polară. (Vezi de ex. V. Novojilov [3], § 6.15.)

Vom utiliza aci variabilele complexe $\mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{z}}$. Modul de rezolvare ales trebuie să slujească şi mai departe, în problema încovoierii barei de profil în semicoroană (vezi § 20, exemplul g).

Fie dată o bară de secţiune $\mathscr{D}$ în formă de jumătate de coroană circulară, de raze R_1 şi R_0. Vom folosi mărimile nul-dimensionale

$$R^* = R/R_0, \quad k = 1 - \varepsilon = R_1/R_0 < 1, \tag{93}$$

(ε fiind numită *grosimea redusă*) şi funcţiile nul-dimensionale

$$\mathrm{f}^*(R^*, \chi) = \mathrm{f}(R, \chi)/R_0^2, \quad \mathrm{r}^*(R^*, \chi) = \mathrm{r}(R, \chi)/R_0^2. \tag{94}$$

Relaţiile (14.21) vor fi transcrise sub forma

$$\mathrm{f}_{,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{f}\Big|_{\mathscr{L}} = 0, \tag{95}$$

şi vom căuta soluţia f ca sumă a unei soluţii particulare f_1 a acestei ecuaţii, cu soluţia generală f_0 a ecuaţiei omogene corespunzătoare. (Întrucît domeniul este simplu conex, notaţiile f_0, f_1 nu pretează la confuzie.)

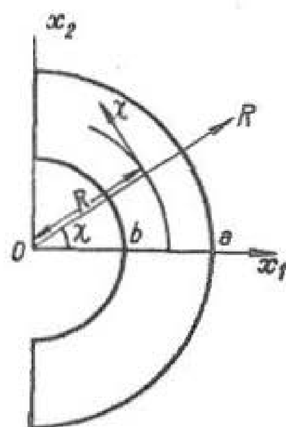


Fig. 5.15.4

Întrucît f_0 este evident armonică şi uniformă, este firesc să o căutăm sub forma

$$\mathrm{f}_0 = \mathrm{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \mathfrak{z}^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^n (b_n' \cos n\chi - b_n'' \sin n\chi), \tag{96}$$

unde am notat $b_n = b_n' + ib_n''$.

Întrucît $\mathscr{D}$ este simetric față de Ox_1, ca și ecuația și condiția la limită (95), putem alege $\mathsf{f}_0(-\chi) = \mathsf{f}_0(\chi)$. Aceasta conduce la a lua $b_n'' = 0$; coeficienții b_n sînt deci *reali*, și (96) se reduce la

$$\mathsf{f}_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n R^n \cos n\chi. \tag{97}$$

Condiția la limită (95) pe porțiunile rectilinii ale lui $\mathscr{L}$ poate fi ușor satisfăcută pentru f_0: întrucît pentru $x_1 = 0$ avem $\chi = \pm\pi/2$, urmează că

$$\cos n\chi\Big|_{x_1=0} = \cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n = 2h+1, \\ (-1)^n & \text{pentru } n = 2h, \end{cases} \tag{98}$$

și deci, dacă luăm $b_{2h} = 0$, f_0 se scrie sub forma

$$\mathsf{f}_0 = \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_{2h+1} R^{2h+1} \cos(2h+1)\chi = \frac{1}{2}\sum_{h=-\infty}^{\infty} b_{2h+1}(\mathfrak{z}^{2h+1} + \bar{\mathfrak{z}}^{2h+1}), \tag{99}$$

ceea ce asigură armonicitatea lui f_0 și verificarea condiției

$$\mathsf{f}_0|_{x_1=0} = 0. \tag{100}$$

Prin urmare, soluția particulară f_1 trebuie să se anuleze și ea pentru $x_1 = 0$. Este evident că funcția $-\frac{1}{2}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} = -\frac{1}{2}R^2$ este o soluție particulară a ecuației (95), care nu se anulează însă pentru $x_1 = 0$. Pentru a obține soluția căutată, trebuie să adăugăm acestei funcții, o funcție armonică și astfel aleasă încît suma ei cu funcția $-\frac{1}{2}R^2$ să se anuleze pentru $\chi = \pm\pi/2$. Aceasta sugerează să alegem

$$\mathsf{f}_1 = -\frac{1}{2}R^2(1 + \cos 2\chi) = -\frac{1}{2}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} - \frac{1}{4}(\mathfrak{z}^2 + \bar{\mathfrak{z}}^2). \tag{101}$$

În felul acesta, sîntem conduși la a căuta f sub forma

$$\mathsf{f} = -\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}\left[R^2\cos 2\chi + \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_{2h+1}R^{2h+1}\cos(2h+1)\chi\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} - \frac{1}{4}\left[\mathfrak{z}^2 + \bar{\mathfrak{z}}^2 + \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_{2h+1}(\mathfrak{z}^{2h+1} + \bar{\mathfrak{z}}^{2h+1})\right], \tag{102}$$

unde am notat $B_{2h+1} = -2b_{2h+1}$ și am strîns la un loc termenii armonici de forma $R^m \cos m\chi$.

Pentru a determina coeficienţii B_{2h+1}, rămîne să ţinem seama de condiţia (95) pe cele două semicercuri-frontieră. Pentru $R = R_0$, $R = R_1$, avem deci

$$R^2(1 + \cos 2\chi) + \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_{2h+1} R^{2h+1} \cos (2h + 1)\chi = 0, \tag{103}$$

relaţie valabilă în intervalul $-\pi/2 \leqslant \chi \leqslant \pi/2$.

Pentru a obţine de aici prin identificare valorile coeficienţilor B_{2h+1}, este suficient să dezvoltăm funcţia $1 + \cos 2\chi$ în serie Fourier după multiplii impari ai lui χ. Întrucît funcţiile 1 şi $\cos 2\chi$ sînt funcţii coordonate ale sistemului trigonometric, o astfel de dezvoltare este desigur imposibilă în intervalul $[-\pi, \pi]$. Putem în schimb să considerăm funcţiile

$$h(\chi) = \begin{cases} -1 \text{ pentru } -\pi \leqslant \chi < -\pi/2,\ \pi/2 < \chi \leqslant \pi, \\ \ \ 1 \text{ pentru } -\pi/2 \leqslant \chi \leqslant \pi/2, \end{cases} \tag{104}$$

$$g(\chi) = \begin{cases} -\cos 2\chi \text{ pentru } -\pi \leqslant \chi < \pi/2,\ \pi/2 < \chi \leqslant \pi, \\ \ \ \cos 2\chi \text{ pentru } -\pi/2 \leqslant \chi \leqslant \pi/2. \end{cases} \tag{105}$$

Aceste funcţii pot fi dezvoltate în serii Fourier în intervalul $[-\pi, \pi]$, iar suma celor două serii coincide în intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$ cu funcţia $1 + \cos 2\chi$.

Pentru funcţia $h(\chi)$ avem evident din (62), (63) dezvoltarea

$$h(\chi) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \cos (2h + 1)\chi. \tag{106}$$

Pentru coeficienţii Fourier g_m ai funcţiei $g(\chi)$ obţinem mai întîi

$$\pi g_m = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2\chi \cos m\chi \, d\chi - 2\int_{\pi/2}^{\pi} \cos 2\chi \cos m\chi \, d\chi. \tag{107}$$

Ţinînd seama că $2\cos 2\chi \cos m\chi = \cos (m + 2)\chi + \cos (m - 2)\chi$, obţinem din (107) pentru $m \neq \pm 2$:

$$\pi g_m = 2\left[\frac{\sin (m + 2)\chi}{m + 2} + \frac{\sin (m - 2)\chi}{m - 2}\right]\Bigg|_{\chi=\pi/2} \tag{108}$$

iar pentru $m = \pm 2$:

$$g_2 = 0. \tag{109}$$

Întrucît funcția $g(\chi)$ este pară, dezvoltarea în serie corespunzătoare nu conține termeni în sinus; din (108) urmează că coeficienții termenilor de indici pari sînt nuli. În definitiv avem deci

$$g(\chi) = \frac{2}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{h+1} \left(\frac{1}{2h+3} + \frac{1}{2h-1} \right) \cos(2h+1)\chi. \quad (110)$$

Cu aceasta deducem că în intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$ avem dezvoltarea

$$1 + \cos 2\chi = \sum_{h=0}^{\infty} l_{2h+1} \cos(2h+1)\chi, \quad (111)$$

unde coeficienții l_{2h+1} se obțin din (106) și (110):

$$l_{2h+1} = -\frac{16}{\pi} (-1)^h \frac{1}{(2h-1)(2h+1)(2h+3)}, \quad h \geqslant 0. \quad (112)$$

Vom nota uneori acești coeficienți și cu

$$l_m = -\frac{16}{\pi} (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{1}{m(m^2-4)}, \quad m = 2h+1 > 0, \quad (113)$$

și vom remarca că

$$l_{-m} = l_m, \quad m > 0. \quad (114)$$

Introducînd acum (111) în (103), obținem prin identificare sistemul de ecuații (valabil pentru $m = 2h+1 > 0$):

$$R_0^m B_m + R_0^{-m} B_{-m} = -R_0^2 l_m, \quad R_1^m B_m + R_1^{-m} B_{-m} = -R_1^2 l_m, \quad (115)$$

a cărui soluție (pentru *orice* m impar, negativ sau pozitiv) este

$$B_m = -\frac{R_0^{m+2} - R_1^{m+2}}{R_0^{2m} - R_1^{2m}} l_m. \quad (116)$$

Făcînd uz de parametrul nul-dimensional k din (93), această soluție poate fi pusă și sub formele echivalente

$$B_m = -\frac{1-k^{m+2}}{1-k^{2m}} R_0^{-m+2} l_m, \quad B_m = -\frac{1-k^{-m-2}}{1-k^{-2m}} R_1^{-m+2} l_m, \quad (117)$$

dintre care prima este convenabilă pentru $m > 0$ (întrucît își păstrează sensul pentru $R_1, k \to 0$), iar a doua, pentru $m < 0$ (din același motiv).

Cu aceasta, funcția lui Prandtl este complet determinată:

$$\mathsf{f}(R, \chi) = -\frac{1}{2} R^2 (1 + \cos 2\chi) + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} l_{2h+1} \times$$

$$\times \left[\frac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} R^{2h+1} + \frac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}} R_1^{2h+3} R^{-2h-1} \right] \cos(2h+1)\chi. \quad (118)$$

Sub formă complexă — utilă mai departe pentru determinarea tensiunii tangențiale complexe și a funcției $r(x_1, x_2)$, deci a deplasării u_3 — ea se scrie

$$f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = -\frac{1}{2}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} - \frac{1}{4}(\mathfrak{z}^2 + \bar{\mathfrak{z}}^2) + \frac{1}{4}\sum_{h=0}^{\infty} l_{2h+1}\left[\frac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} \times \right.$$

$$\left. \times (\mathfrak{z}^{2h+1} + \bar{\mathfrak{z}}^{2h+1}) + \frac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}} R_1^{2h+3}(\mathfrak{z}^{-2h-1} + \bar{\mathfrak{z}}^{-2h-1})\right]. \tag{119}$$

În fine, folosind și (111), deducem (vezi (94)) expresia:

$$f^*(R^*, \chi) = \sum_{h=0}^{\infty} f^*_{2h+1}(R^*) \cos(2h+1)\chi,$$

$$f^*_{2h+1}(R^*) = -\frac{1}{2} l_{2h+1}\left[R^{*2} - \frac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}} R^{*2h+1} - \frac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}} k^{2h+3} R^{*-2h-1}\right], \tag{120}$$

utilă pentru determinarea rigidității geometrice la torsiune.

Introducînd expresia (119) în formula (14.4), obținem ușor

$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = -2 i \mu \tau f_{,\bar{\mathfrak{z}}} = i \mu \tau \left\{\mathfrak{z} + \bar{\mathfrak{z}} - \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{\infty} (2h+1) l_{2h+1} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} \bar{\mathfrak{z}}^{2h} - \frac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}} R_1^{2h+3} \bar{\mathfrak{z}}^{-2h-2}\right]\right\}, \tag{121}$$

unde desigur putem pune în evidență, ca și în (120), parametrii nul-dimensionali R^* și k. Separînd partea reală și cea imaginară, obținem componentele σ_{31} și σ_{32}.

Să considerăm în fiecare punct axele locale orientate după raza polară și tangenta la cercul $R = \text{const.}$ și să notăm cu $\widehat{Rz}$, respectiv $\widehat{\chi z}$ componentele tensiunii tangențiale în raport cu aceste axe (vezi și § 4.1, pag. 121). Din (11.15) obținem

$$\widehat{Rz} + i\widehat{\chi z} = [\exp(-i\chi)]\, T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}). \tag{122}$$

Pentru determinarea componentei u_3, este necesară cunoașterea funcției $r(x_1, x_2)$. Or, întrucît din (14.6) avem $f = t - \frac{1}{2}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}$, conchidem că membrul al doilea din (119), cu excepția primului său termen, este pur și simplu $t = \operatorname{Im} \psi(\mathfrak{z})$. Pentru partea reală a lui $\psi(\mathfrak{z})$ deducem prin urmare

$$r(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = -\frac{1}{4} i(\mathfrak{z}^2 - \bar{\mathfrak{z}}^2) + \frac{1}{4} i \sum_{h=0}^{\infty} l_{2h+1} \times$$

$$\times \left[\frac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}} R_0^{-2h+1}(\mathfrak{z}^{2h+1} - \bar{\mathfrak{z}}^{2h+1}) + \frac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}} R_1^{2h+3}(\mathfrak{z}^{-2h-1} - \bar{\mathfrak{z}}^{-2h-1})\right], \tag{123}$$

sau încă

$$r(R,\chi)=\frac{1}{2}R^2\sin 2\chi-\frac{1}{2}\sum_{h=0}^{\infty}l_{2h+1}\left[\frac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}}R_0^{-2h+1}R^{2h+1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}}R_1^{2h+3}R^{-2h-1}\right]\sin(2h+1)\chi. \tag{124}$$

Pentru a obține funcția de torsiune nul-dimensională din (94), vom remarca mai întîi că din (111) urmează prin derivare

$$\sin 2\chi=\frac{1}{2}\sum_{h=0}^{\infty}(2h+1)\,l_{2h+1}\sin(2h+1)\chi. \tag{125}$$

Introducînd această dezvoltare în serie în (124), deducem

$$r^*(R^*,\chi)=\sum_{h=0}^{\infty}r^*_{2h+1}(R^*)\sin(2h+1)\chi,$$
$$r^*_{2h+1}(R^*)=\frac{1}{2}l_{2h+1}\left[\frac{2h+1}{2}R^{*2}-\frac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}}R^{*2h+1}+\right. \tag{126}$$
$$\left.+\frac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}}k^{2h+3}R^{*-2h-1}\right].$$

Pentru determinarea lui C este comodă utilizarea formulei (120). Făcînd uz și de (14.23), obținem

$$C=2\iint_{\mathscr{D}}f(x_1,x_2)\,dD=2\sum_{h=0}^{\infty}\int_k^1 l_{2h+1}R_0^4\left[R^{*3}-\frac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}}R^{*2h+2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}}k^{2h+3}R^{*-2h}\right]dR^*\int_{\pi/2}^{\pi/2}\cos(2h+1)\chi\,d\chi$$

de unde, după calcule elementare,

$$C=\frac{8}{\pi}R_0^4\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(2h-1)^2(1+k^{4h+6})-(2h+3)^2k^4(1+k^{4h-2})+16(2h+1)k^{2h+3}}{(2h-1)^2(2h+1)^2(2h+3)^2(1-k^{4h+2})}. \tag{127}$$

Ca și în problema lunulei circulare, prezintă interes examinarea cazurilor limită $k\to 0$ (semicerc cu o mică slăbire semicirculară pe frontieră, în origine) și cazul $k\to 1$ (semicoroană circulară cu pereți subțiri).

Soluția problemei semicercului se obține pornind tot de la forma (96) pentru soluția generală a ecuației omogene — luînd însă aci $n\geqslant 0$, și reținînd relația (103) numai pentru $R=R_0$, de unde deducem

$$B_{2h+1}=-R_0^{-2h+1}l_{2h+1},\qquad B_{-2h-1}=0,\ h\geqslant 0. \tag{128}$$

Or, aceleași valori se obțin drept caz limită din (117), dacă facem aci $R_1\to 0$, $k\to 0$. Ca și în cazul lunulei, acest fapt nu permite totuși să identificăm soluția problemei semicercului, cu cea a semicercului cu o slăbire pe frontieră — din cauza apariției concentrării tensiunilor.

Pentru rigiditatea geometrică, făcînd $k \to 0$ în (127), obținem

$$C\,|_{k=0} = \frac{8}{\pi} R_0^4 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2\,(2h+3)^2} = 0{,}2975\, R_0^4. \tag{129}$$

Întrucît pentru semicerc avem

$$D = \frac{1}{2}\pi R_0^2,\ x_1^0 = (4/3\,\pi)\, R_0, \quad J_0 = \frac{1}{4}\pi R_0^4, \quad I_0 = (\pi/4 - 9/8\,\pi)\, R_0^4 = 0{,}5021\, R_0^4,$$

și aceste valori sînt evident valabile și în cazul-limită al semicoroanei pentru $k \to 0$, din (129) deducem

$$C = 0{,}1204\, D^2 = 0{,}0245\,(D^4/I_0). \tag{130}$$

Valoarea (129) coincide cu cea care se obține tratînd direct cazul semicercului. Prin urmare, existența unei slăbiri semicirculare de rază $R_1 \to 0$ în origine nu modifică valorile globale C sau τ.

Pentru a studia problema concentrării tensiunilor în vecinătatea originii, să calculăm $T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ în punctul $\mathfrak{z} = R_1 \exp(\mathrm{i}\chi)$, și să facem apoi $R_1 \to 0$. Din (121) deducem ușor

$$\lim_{R_1\to 0} T(R_1, \chi) = \mathrm{i}\mu\tau \lim_{R_1\to 0} \left\{-\frac{1}{2} l_1 \left[R_0 - \frac{1-k^{-1}}{1-k^2} R_1^3\, R_1^{-2} \exp\,(2\,\mathrm{i}\,\chi)\right]\right\},$$

de unde (subliniind prin notație faptul că T depinde și de χ):

$$T(0,\ 0;\ \chi) = -\,(8/3\,\pi)\,\mathrm{i}\,\mu\,\tau\, R_0\,[1 + \exp\,(2\mathrm{i}\chi)]. \tag{131}$$

Folosind aceeași formulă pentru cazul semicercului, unde însă termenul ultim din paranteză nu apare, obținem valoarea (independentă de χ):

$$T(0,\ 0) = -\,(8/3\,\pi)\,\mathrm{i}\,\mu\,\tau\, R_0 = -\,2{,}8533\ (\mathcal{M}_3/R_0^3). \tag{132}$$

(Pentru calculul coeficientului, am făcut uz și de (129).)

Deosebirea provine din existența termenilor polari corespunzători coeficienților $[(1 - k^{2h-1})/(1 - k^{2h+3})]\, R_1^{2h+3}$. Pentru $h > 0$, aportul lor e nul; pentru $h = 0$, termenul corespunzător dispare din expresia-limită a funcției lui Prandtl — dar nu și din cea a derivatei acesteia.

Comparînd (131) cu (132), rezultă că în timp ce pentru $\chi = \pm\,\pi/2$ (punctele unghiulare ieșinde ale frontierei) tensiunea tangențială se anulează, în schimb pentru $\chi = 0$ ea este cu 100% mai mare decît în cazul semicercului.

Fenomenul are un vizibil caracter local: pentru $R_1 \to 0$ și $|\mathfrak{z}| > R_1$, în expresia funcției $T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ rămîne același termen perturbator de mai sus, avînd în factor raportul $R_1^2/|\mathfrak{z}|^2$ — care este mic, și descrește rapid.

În celălalt caz-limită ($\varepsilon \to 0$), vom calcula aci numai valoarea lui C. În acest scop, vom observa că, notînd numărătorul termenului general din (127) cu

$$c_h(k) = (2h-1)^2\,(1 + k^{4h+6}) - (2h+3)^2\, k^4\,(1 + k^{4h-2}) + 16\,(2h+1) k^{2h+3}, \tag{133}$$

obținem pe rînd

$$c_h(1) = c_h'(1) = c_h''(1) = c_h'''(1) = 0,\ c_h^{\mathrm{IV}}(1) = 16\,(2h-1)^2\,(2h+1)\,(2h+3)^2. \tag{134}$$

Dezvoltînd expresia (127) în serie după puterile lui ε (așadar în vecinătatea lui $k = 1$) și făcînd uz de (79), căpătăm

$$C = (8/3\,\pi)\, R_0^4\, \varepsilon^3 \sum_{h=0}^{\infty} (2h+1)^{-2} = \frac{1}{3}\,\pi R_0^4 \varepsilon^3. \tag{135}$$

g) *Tabel comparativ*

Pentru a încheia, prezentăm un tabel de rigidități geometrice la torsiune. (Vezi și G. Polya și G. Szegö[1], Anexe).

Prima coloană a tabelului evaluiază rigiditatea C în funcție de aria D — așadar de cheltuiala de material. Se remarcă scăderea catastrofală a lui C în cazul dreptunghiului îngust. De asemenea se vede că sectorul circular cu deschidere de 360° (disc circular cu o fisură radială pînă în centru) rezistă cu mult mai slab solicitării decît discul nefisurat.

A doua coloană dă valorile coeficientului $\varkappa$ din (28), înmulțite cu $4\pi^2$. Faptul că aceste valori sînt apropiate de 1 confirmă utilitatea formulei aproximative (23). Faptul că ele sînt în general subunitare arată că formula (23) dă valori *mai mari* decît cele reale. Aceasta se explică prin prezența colțurilor (unghiurilor) ieșinde, în care tensiunile sînt nule (vezi § 16, pag. 266). A folosi formula (23) înseamnă — printre altele — a neglija efectul acestor colțuri, ceea ce conduce pentru $\mathcal{M}_3$ (și deci și pentru C) la valori mai mari decît cele reale. Exemplul sectorului de 360° arată că formula nu poate fi în nici un caz folosită pentru secțiuni cu fisuri relativ adînci.

Secțiune	$2\pi C D^{-2}$	$4\pi^2 C I_0 D^{-4}$
Cerc	1,000	1,000
exagon regulat	0,964	0,972
patrat	0,883	0,925
triunghi echilateral	0,726	0,877
triunghi dreptunghi isoscel	0,656	0,916
triunghi dreptunghi cu un unghi de 30°	0,597	0,962
elipsă de semi-axe		
$b/a = 0{,}5$	0,800	1,000
$b/a = 0{,}1$	0,199	1,000
$b/a = 0{,}01$	0,020	1,000
dreptunghi de laturi		
$b/a = 0{,}5$	0,718	0,941
$b/a = 0{,}1$	0,196	1,038
$b/a = 0{,}01$	0,021	1,090
sector circular de deschidere		
30°	0,621	0,978
180°	0,758	0,970
360°	0,559	0,559

Cu privire la această tabelă, a se revedea și formulele (5), (39), (92), (130).

§ 16. ANALOGII MECANICE ALE PROBLEMEI TORSIUNII. EXEMPLE

Pentru indicații generale asupra analogiilor, vezi cele spuse în § 4.2, pag. 131. Cu referire specială la problema torsiunii, vezi încă N. Arutiunian și B. Abramian [1], §§ 1.8—1.9; C. Biezeno și R. Grammel [1], § 3.6; Th. Higgins [4]; P. Papkovici [4], §§ 13.1—13.5; I. Sokolnikoff [2], § 46; S. Timoshenko și J. Goodier [1], §§ 93, 99 și 100.

Pentru analogiile electrice, vezi Th. Higgins [6]. Aci, indicăm numai cîteva exemple consacrate problemei torsiunii: E. Antonov [1]; N. Arutiunian și B. Abramian [1], § 1.10; C. Biezeno și R. Grammel [1], § 3.7; I. Blagoveșcenski și P. Filciakov [1]; I. Edamoto [1]; H. Nakazawa [1]; H. Nakazawa și T. Yatsuka [1]; L. Naumov și G. Stepanov [1]; P. Papkovici [4], § 13.6; K. Rushton [1]; N. Waner și W. Soroka [1]; J. Weiner [1]. Lucrările lui A. Ugodcikov [1], [2] se ocupă de determinarea electro-analogică a funcției ce realizează reprezentarea conformă a domeniului (simplu conex sau dublu conex) de studiat, cu aplicație la problema torsiunii.

Menționăm încă metodele optice de studiu al stării de tensiune în torsiune (evident, nu mai e vorba de analogii, ci de metode experimentale), expuse de exemplu de M. Frocht [1], volumul 2, capitolul 12. (Vezi încă și cap. 9, consacrat studiului reprezentării conforme.) În acest sens, vezi de exemplu M. Nisida și M. Hondo [1].

Punctul de plecare al oricărei analogii pentru problema torsiunii rezidă în faptul că funcțiile de torsiune depind numai de configurația secțiunii (vezi § 13). Vom prezenta întîi două analogii hidrodinamice, după care ne vom fixa atenția asupra analogiei membranei elastice, care prezintă cea mai mare importanță.

a) Analogia lui lord Kelvin și P. Tait ([1], pct. 704—705)

Să considerăm un tub cilindric de secțiune $\mathscr{D}$, umplut cu un fluid ideal. Rotind tubul cu o viteză unghiulară constantă ω în jurul axei longitudinale Ox_3, obținem o mișcare irotațională a fluidului, avînd funcția de curent $\mathfrak{t}_1(x_1, x_2)$ care verifică ecuația

$$\Delta \mathfrak{t}_1 = 0 \tag{1}$$

și condiția la limită

$$\mathfrak{t}_1|_{\mathscr{L}} = -\frac{1}{2}\omega(x_1^2 + x_2^2) + \text{const.} \tag{2}$$

(vezi C. Iacob [5], §§ 7.3 și 7.8). Alegînd $\omega = -1$, funcția $\mathfrak{t}_1$ coincide cu funcția de torsiune conjugată pentru bara de secțiune $\mathscr{D}$ (vezi (13.11)).

b) *Analogia lui J. Boussinesq ([1], § 1.9)*

Scurgerea laminară a unui fluid vîscos incompresibil într-un tub cilindric de secțiune (simplu conexă) $\mathscr{D}$ este descrisă de ecuația

$$\Delta u_3 = (1/\mu_0)\, p_{,3}, \tag{3}$$

unde u_3 este viteza în lungul axei Ox_3, μ_0 este coeficientul de vîscozitate, iar $p_{,3}$ este căderea de presiune (constantă) în lungul tubului. (Vezi C. Iacob [5] § 4.36.)

Pe peretele tubului este satisfăcută condiția de aderență

$$u_3|_{\mathscr{L}} = 0. \tag{4}$$

Comparînd (3), (4) cu (14.21), constatăm că aceste relații coincid dacă luăm $p_{,3} = -2\,\mu_0$.

c) *Analogia membranei elastice (L. Prandtl [1])*

Să considerăm o membrană flexibilă (așadar putînd prelua sarcini de întindere în planul ei, dar nu și sarcini de compresiune, sau de încovoiere înafara acestui plan) de grosime constantă, ocupînd în planul Ox_1x_2 un domeniu simplu-conex $\mathscr{D}$. Să presupunem membrana fixată pe conturul $\mathscr{L}$, și solicitată de o sarcină normală uniform repartizată (constantă) Q. Sub acțiunea acestei sarcini, în membrană apar tensiuni de întindere S și deplasări normale w, acestea din urmă evident supuse condiției

$$w|_{\mathscr{L}} = 0. \tag{5}$$

Vom presupune că deplasările tangențiale sînt neglijabile, și că tensiunile S sînt constante în orice punct și după orice direcție. O astfel de stare este riguros realizată în membranele (filmele) de săpun, și cu satisfăcătoare precizie și în membranele de cauciuc, mult mai ușor utilizabile în practică.

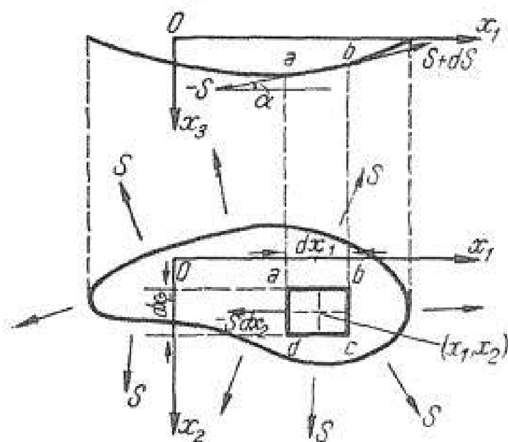


Fig. 5.16.1

Condiția de echilibru a unui element rectangular de laturi dx_1, dx_2 se scrie ținînd seama numai de proiecția forțelor pe axa Ox_3. Notînd cu α unghiul format de latura ab (sau cd) cu planul Ox_1x_2, conchidem că proiecția pe Ox_3 a forței de întindere $-S\ dx_2$ ce lucrează pe latura ad este egală cu $S\ dx_2 \cos(\pi/2-\alpha) = -S\,dx_2\,w_{,1}$ (formulă valabilă pentru deplasări suficient de mici).

În mod analog obținem proiecțiile pe latura bc : $S\,\mathrm{d}x_2\,w_{,1} + (S\,\mathrm{d}x_2 w_{,1})_{,1}\,\mathrm{d}x_1$;

pe latura ab : $-\,S\,\mathrm{d}x_1\,w_{,2}$;

pe latura cd : $S\,\mathrm{d}x_1\,w_{,2} + (S\,\mathrm{d}x_1\,w_{,2})_{,2}\,\mathrm{d}x_2$.

Condiția de echilibru conduce deci la ecuația

$$\Delta w = -\,Q/S. \tag{6}$$

Comparînd (5), (6) cu (14.21), se vede că pentru $Q = 2\,S$, soluția w coincide cu funcția lui Prandtl pentru domeniul $\mathscr{D}$.

Așadar, pentru a rezolva problema torsiunii elastice[11]) pentru o bară de secțiune simplu-conexă $\mathscr{D}$, este suficient să fixăm o membrană pe conturul $\mathscr{L}$, să o supunem unei sarcini normale uniforme Q (de obicei, mărind presiunea de aer într-un dispozitiv închis, cu un cadru pe care poate fi fixată membrana), și să măsurăm deplasările w. Rezultă

$$\mathsf{f}(x_1, x_2) = 2(S/Q)\,w(x_1, x_2). \tag{7}$$

Din (14.23) și (7) deducem pentru un domeniu simplu conex,

$$\mathsf{C} = 4(S/Q)\,\mathsf{V}, \tag{8}$$

unde V este volumul cuprins între planul Ox_1x_2 și membrana deformată.

Pentru a nu trebui să măsurăm sarcina Q și tensiunea S (necunoscută dinainte) este suficient ca în aparat să existe, pe lîngă conturul $\mathscr{L}$ de studiat, și un contur-etalon pentru care soluția exactă este cunoscută (un cerc). Folosind membrane din același material și asigurînd aceeași presiune Q (prin comunicarea camerelor prin care se transmite presiunea), raportul Q/S se determină măsurînd deplasările w pe membrana-etalon și comparînd cu funcția $\mathsf{f}(x_1, x_2)$ cunoscută pentru domeniul-etalon.

Pentru precizia măsurătorilor, este în general util să modificăm prin omotetie secțiunea de studiat. Întrucît funcția lui Prandtl are dimensiunea L^2, în urma transformării $\lambda x_1 = X_1$, $\lambda x_2 = X_2$, funcția $\mathsf{f}(x_1 x_2)$ este înlocuită prin $\lambda^{-2}\mathsf{f}(X_1, X_2)$. În acest caz, (7) se va scrie

$$\mathsf{f}(x_1, x_2) = (2S/\lambda^2\,Q)\,w(X_1, X_2), \tag{9}$$

iar (8) va deveni

$$\mathsf{C} = (4S/\lambda^4 Q)\,\mathsf{V}. \tag{10}$$

Materialul, dimensiunile domeniului, precum și presiunea trebuie alese în așa fel încît pantele să nu fie prea mari. (În caz contrar, derivatele funcției w din (6) trebuie înlocuite cu inversele razelor de curbură, și fenomenul nu mai este descris de ecuația lui Poisson.)

Pentru bibliografie, tehnica de lucru, și unele exemple, vezi de exemplu E. Nicolau [1].

Analogia membranei își păstrează valabilitatea în cazul unui domeniu multiplu-conex. În acest caz însă, constantele lui Prandtl trebuie cunoscute dinainte, pentru ca membrana să poată fi fixată la nivelul zero

---

[11]) Analogia membranei poate fi generalizată și pentru studiul torsiunii barelor anizotrope (W. Olszak [1]), și chiar a barelor în stare elasto-plastică (A. Nadai [1], cap.35).

pe conturul exterior, şi la nivelele $(Q/2S)\,f_j$ deasupra planului Ox_1x_2 pe conturele interioare $\mathscr{L}_j$.

Aceste constante se obţin, în principiu, din (14.14). Pe cale experimentală, ele pot fi determinate dacă domeniile interioare $\mathscr{D}_j^+$ sînt acoperite cu discuri de marginea cărora este lipită membrana; aceste discuri se deplasează numai vertical, şi efectul greutăţii lor trebuie anihilat. Pentru această tehnică, vezi de exemplu R. Mindlin şi M. Salvadori [1].

În practică, se dovedeşte mai simplă o cale legată de reprezentarea (14.12) a soluţiei, şi diferind de aceasta numai prin înlocuirea măsurilor armonice $b_j(x_1, x_2)$ din (14.10) prin nişte funcţii $c_j(x_1, x_2)$ care verifică aceleaşi condiţii la limită (14.11), dar sînt soluţii ale ecuaţiei Poisson (6).

Anume, să căutăm funcţia $w(x_1, x_2)$ sub forma

$$w(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{m} a_j c_j(x_1, x_2), \tag{11}$$

unde a_j sînt nişte constante necunoscute, şi unde

$$\Delta c_j(x_1, x_2) = -Q/S, \quad c_j(x_1, x_2)|_{\mathscr{L}_h} = a\delta_{jh}, \qquad j, h = 0, 1, 2, \ldots m, \tag{12}$$

a fiind o constantă de care vom dispune din considerente experimentale.

Funcţiile $c_j(x_1, x_2)$ pot fi determinate experimental, fixînd toate conturele la nivelul zero, cu excepţia conturului $\mathscr{L}_j$, care trebuie fixat la nivelul a. (Aşadar, această constantă trebuie aleasă în aşa fel încît pantele membranei să nu fie prea mari.) Totul revine deci la efectuarea măsurării cotelor pentru cele $(m + 1)$ membrane auxiliare astfel considerate.

Introducînd acum (11) şi (12) în (6), conchidem mai întîi că

$$\sum_{j=0}^{m} a_j = 1. \tag{13}$$

Introducînd (11) în formula lui Bredt (14.13) scrisă pentru cele m componente interioare ale frontierei, şi ţinînd seama de (7), obţinem

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \oint_{\mathscr{L}_h} c_{j,n}\, ds = -(Q/S)\, D_h, \quad h = 1, 2, \ldots m. \tag{14}$$

Întrucît funcţiile $c_j(x_1, x_2)$ sînt deja determinate experimental, derivatele lor normale în lungul tuturor componentelor $\mathscr{L}_j$ şi deci şi integralele din (14), pot fi de asemenea calculate. Prin urmare, relaţiile (13), (14) alcătuiesc un sistem de $m + 1$ ecuaţii liniare algebrice pentru cele $m + 1$ constante a_j.

Din (11) şi (12) urmează deci pe frontieră

$$w(x_1, x_2)|_{\mathscr{L}_h} = a_h a, \quad h = 0, 1, 2, \ldots, m, \tag{15}$$

şi problema este redusă la rezolvarea ecuaţiei (6) cu condiţiile la limită (15). De altfel, noi măsurători nu mai sînt necesare: soluţia este dată efectiv de (11).

După cum se vede din (15), pe $\mathscr{L}_0$ *nu avem* acum $w = 0$. Pentru a obţine $f_0 = 0$, este suficient să scădem din toate constantele a_h aceeaşi cantitate a_0.

Pentru $\mathscr{D}$ dublu-conex, sistemul (13), (14) are forma

$$a_0 + a_1 = 1, \quad a_0 \oint_{\mathscr{L}_1} c_{0,n} \, ds + a_1 \oint_{\mathscr{L}_1} c_{1,n} \, ds = -(Q/S) D_1, \tag{16}$$

de unde urmează

$$a_0 = \frac{\oint_{\mathscr{L}_1} c_{1,n} \, ds + (Q/S) D_1}{\oint_{\mathscr{L}_1} c_{1,n} \, ds - \oint_{\mathscr{L}_1} c_{0,n} \, ds}, \qquad a_1 = -\frac{\oint_{\mathscr{L}_1} c_{0,n} \, ds + (Q/S) D_1}{\oint_{\mathscr{L}_1} c_{1,n} \, ds - \oint_{\mathscr{L}_1} c_{0,n} \, ds},$$

sau încă, scăzînd din a_1 pe a_0 și notînd cu a_1' constanta obținută:

$$a_1' = \left[2(Q/S) D_1 + \oint_{\mathscr{L}_1} c_{0,n} \, ds + \oint_{\mathscr{L}_1} c_{1,n} \, ds \right] : \left[\oint_{\mathscr{L}_1} c_{0,n} \, ds - \oint_{\mathscr{L}_1} c_{1,n} \, ds \right]. \tag{17}$$

Precizia rezultatului depinde în mare măsură de diferența de la numitorul din (17): cu cît această diferență este mai mică, cu atît rezultatul este mai dubios. De aceea este de dorit ca una din integrale să fie nulă, sau cel puțin foarte mică — ceea ce se poate uneori realiza prin modificarea convenabilă a valorii a (vezi (12)), așadar ridicînd și coborînd nivelul discului interior pînă cînd constatăm că membrana este aproximativ *tangentă* la disc (și deci derivata normală $c_{1,n} \cong 0$ pe $\mathscr{L}_1$). În acest caz, (17) devine

$$a_1' \cong 1 + 2Q : \left[S \oint_{\mathscr{L}_1} c_{0,n} \, ds \right]. \tag{18}$$

Pentru alte indicații referitoare la cazul domeniilor multiplu conexe, vezi și F. Klapetek [1]; P. Nemenyi [1].

Importanța practică a analogiei lui Prandtl este excepțională: măsurători (ușor de efectuat) ale deplasării w permit determinarea efectivă a funcției $f(x_1, x_2)$. Mai mult, simplul *aspect* al frontierei domeniului permite acum să tragem unele concluzii asupra solicitării barei torsionate.

În primul rînd, în § 14 am văzut că vectorul tensiune este definit de tangenta la liniile $f = \text{const.}$, și de gradientul $f_{,n}$. Dar liniile $f = \text{const.}$ sînt liniile de nivel ale membranei deformate, și gradientul (panta maximă) e dat de densitatea liniilor de nivel în vecinătatea punctului considerat. Prin urmare, *caracterul* repartiției tensiunilor poate fi imediat sesizat.

De exemplu, dacă curbele $f = \text{const.}$ sînt incluse unele în celelalte, avem întotdeauna $f_{,n} < 0$, și vectorul tensiune nu-și poate schimba sensul. (Astfel, pentru un moment de torsiune pozitiv, el este întotdeauna dirijat în sens direct.) Dimpotrivă, dacă apar bifurcații ale liniilor de nivel, vectorul tensiune își schimbă sensul. (Aceasta se petrece adesea în secțiuni multiplu conexe. Vezi de exemplu figura 5.16.12.)

Pentru secțiuni convexe, densitatea liniilor de nivel este de obicei minimă în vecinătatea unui anumit punct interior. În particular, dacă $\mathscr{D}$ are două axe de simetrie, panta membranei este nulă la intersecția acestora. Întrucît tensiunea maximă apare pe frontieră, putem conchide că de obicei

materialul din interiorul lui $\mathscr{D}$ „nu lucrează", şi deci este avantajos ca secţiunile masive să fie înlocuite cu secţiuni cu pereţi subţiri. (Vezi şi § 6, pag. 190 ; § 9, pag. 208)

Uneori, tensiunile se anulează şi pe frontieră : de exemplu, densitatea liniilor de nivel pentru triunghiul echilateral tinde la zero în vecinătatea vîrfurilor sale. (Compară cu (15.35).) Mai general, orice punct unghiular *ieşind* este un punct de tensiune zero — căci vectorul tensiune trebuie să fie dirijat după tangenta la linia de nivel, iar această tangentă nu este aci unică.

Tensiunea maximală apare pe frontieră (vezi § 14, pag. 238). Este de aşteptat ca adesea ea să apară în punctele *cele mai apropiate* de zona centrală a secţiunii — întrucît aci densitatea liniilor de nivel trebuie să fie maximă. (Vezi § 15, pag. 241 şi 251 — cazul dreptunghiului şi elipsei).

Analogia membranei arată de asemenea că pentru dreptunghi este imposibil să ne aşteptăm la apariţia altui punct de maxim pentru $\sigma_{32}(a,x_2)$, în afară de punctul $x_2 = 0$. Ca şi în cazul triunghiului echilateral, tensiunile sînt nule în vîrfuri.

Caracterul general al fenomenului descris în § 15, pag. 248 şi 259 poate fi acum cu uşurinţă explicat. Mici modificări ale frontierei nu alterează sensibil nici rigiditatea geometrică la torsiune (care este proporţional cu volumul acoperit de membrană), nici tensiunile la o distanţă suficientă de zona acestei modificări (întrucît liniile de nivel rămîn aci practic intacte). În schimb, ele pot da mari concentrări de tensiuni, pentrucă liniile de nivel pot fi puternic alterate *local*.

Raţionamente de acelaşi tip rămîn valabile şi pentru secţiuni multiplu-conexe. În particular, se poate urmări efectul deplasării spre $\mathscr{L}_0$ a vreuneia din componentele interioare ale frontierei (ceea ce duce inevitabil la apariţia de concentrări de tensiuni), efectul apariţiei de fisuri ale secţiunii etc.

Exemple

d) Fisură rectilinie în lungul razei unei secţiuni circulare

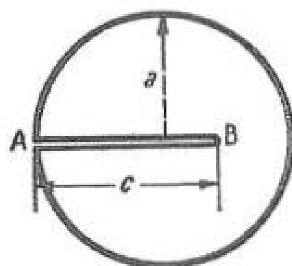


Fig. 5.16.2

Să considerăm secţiunea din figura 5.16.2. Frontiera ei este compusă dintr-un cerc de rază a, *plus* segmentul AB de lungime c. Acesta este un caz particular al problemei studiate de E. Şiriaev [1]. Măsurătorile necesare pentru analiza ce urmează au fost efectuate de E. Nicolau [2].

În figura 5.16.3 reproducem liniile de nivel pentru diferite adîncimi ale fisurii. (Linia punctată este „cumpăna apelor" pe suprafaţa membranei.)

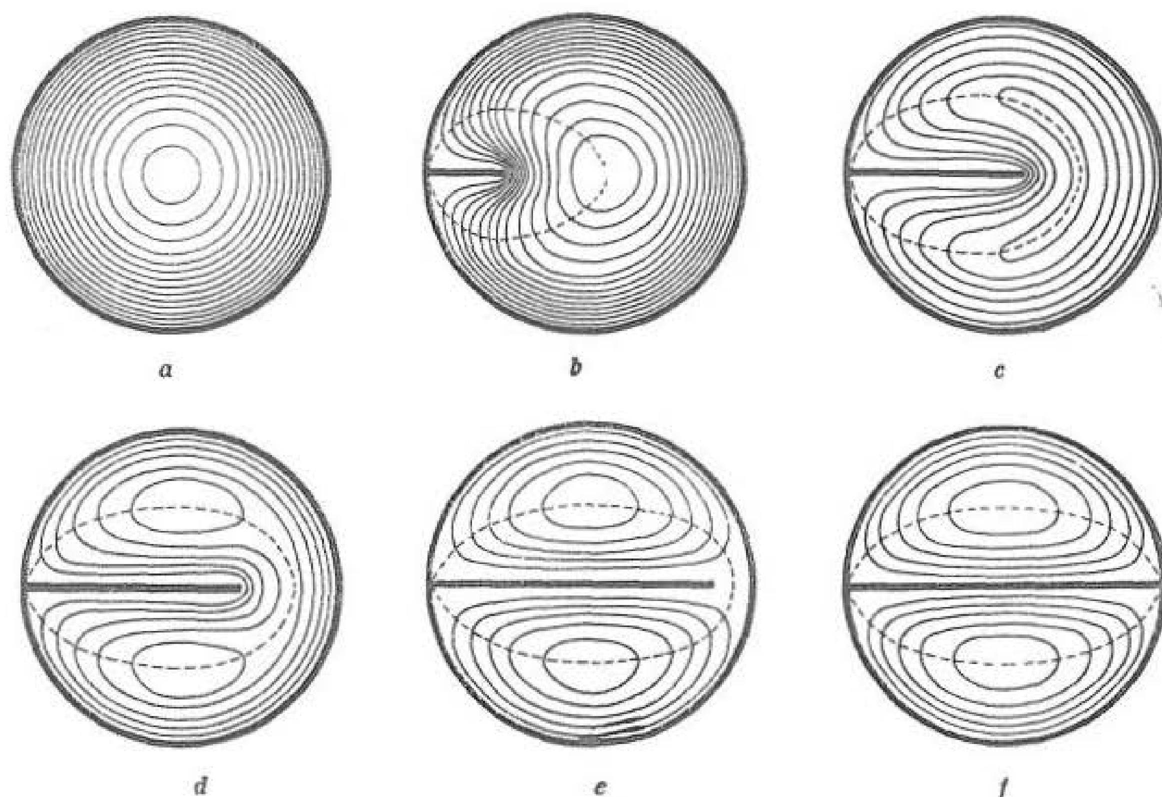


Fig. 5.16.3

Mai departe, în figura 5.16.4 este dată variația rigidității geometrice la torsiune (raportată la cea a secțiunii circulare $C_0 = \pi a^4/2$) ca funcție de adîncimea relativă c/a a fisurii.

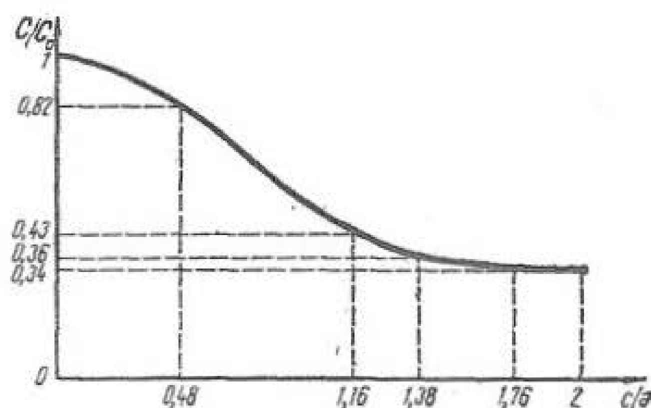


Fig. 5.16.4

În fine, în figura 5.16.5 se dă valoarea pantei α în vîrful fisurii (raportată la panta α_0 pe frontiera discului circular în absența fisurii) ca funcție de c/a.

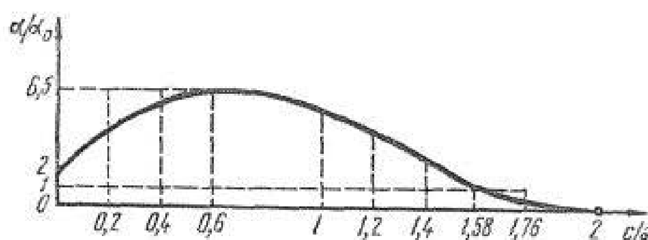


Fig. 5.16.5

Micşorarea *numărului* de linii de nivel pe măsură ce fisura avansează, arată că volumul acoperit de membrană (şi deci şi C) descreşte, şi deci τ (pentru un $\mathcal{M}_3$ dat) creşte. Pentru a evalua concentrarea de tensiuni efectivă, fenomenele descrise de figurile 5.16.4 şi 5.16.5 trebuie suprapuse (prin multiplicare).

O fisură de adîncime $c = 0{,}48\ a$ produce concentrări de tensiune considerabile, dar nu modifică sensibil rigiditatea C. Totuşi (vezi configuraţia în potcoavă a liniilor de nivel în fig. 5.16.3, *b*, şi *c*), bara începe să se comporte ca o bară în U (profil deschis cu pereţi subţiri), cu o cu totul altă repartiţie a tensiunilor decît în bara de secţiune circulară. (Vezi şi mai departe exemplul *j* şi ultima figură 5.16.19.)

În intervalul $c \in]0{,}48\ a;\ 1{,}16\ a[$, rigiditatea C descreşte rapid. Această descreştere încetează practic vorbind pentru $c \geqslant 1{,}38\ a$: în fapt, avem acum de-a face (chiar înainte de despicarea profilului) cu *două* bare de secţiune *semicirculară* care rezistă *separat* sarcinii. Valoarea experimentală finală a lui C este de 34% din cea iniţială — şi este ceva mai mică decît valoarea teoretică ce decurge din (15.129).

În ce priveşte concentrarea de tensiuni în vîrful fisurii, se observă că pentru $c \to 0$, rigiditatea C este aceeaşi ca pentru discul circular ; în schimb, $\alpha/\alpha_0 \to 2$. (Compară cu § 15, exemplul *d*.) Pentru $c = 0{,}6\ a$, raportul α/α_0 îşi atinge maximul (egal cu 6,5), şi tensiunea tangenţială este de cca. 9 ori mai mare decît în discul fără fisură. Panta începe acum să scadă, dar coeficientul de concentrare a tensiunilor îşi menţine un timp valoarea, întrucît C continuă să scadă. Pentru $c \geqslant 1{,}58\ a$, raportul α/α_0 devine subunitar ; aceasta se datoreşte faptului că tensiunile se comportă acum ca în vecinătatea unui punct unghiular *ieşind*.

Desigur, aceasta este numai o descriere *analogică* a înrăutăţirii condiţiilor de rezistenţă în bara fisurată. Pentru a înţelege semnificaţia mecanică a fenomenului, să considerăm o secţiune longitudinală *imaginară* ce trece prin axa Ox_3, şi să separăm — pentru claritate — bordurile sale, aşa cum se vede în figura 5.16.6. Întrucît în bara de secţiune circulară tensiunile variază liniar (vezi (15.3)), teorema de reciprocitate (2.4.16) permite să obţinem repartiţia de tensiuni din figură. (Tensiunile tangenţiale ce apar în secţiunile longitudinale au rolul de a deforma secţiunile normale în conformitate cu ipoteza de deplanare a lui Saint-Venant. În cazul de faţă, ele asigură conservarea configuraţiei plane a acestor secţiuni.)

Dar dacă secțiunea longitudinală este o secțiune *reală*, cele două borduri ale ei aparțin suprafeței laterale *libere* ale barei, și tensiunile tangențiale corespunzătoare dispar. O parte din materialul barei încetează să lucreze, și condițiile de rezistență ale barei în ansamblu se înrăutățesc. Dispariția tensiunilor tangențiale longitudinale duce acum la deplanarea secțiunii circulare fisurate. Este vizibil că avem $u_3 < 0$ în acele puncte, *înspre* care se rotesc secțiunile normale. (Vezi și mai departe pag. 276.)

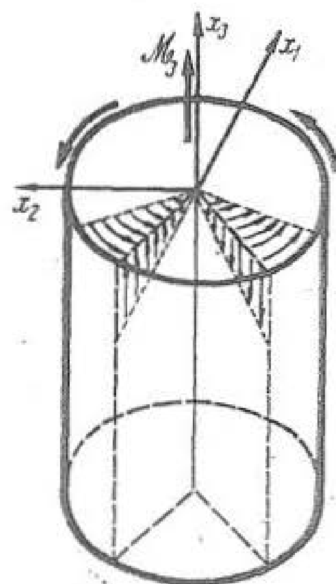


Fig. 5.16.6

Cazul unei secțiuni circulare cu *două* fisuri radiale egale și opuse (pentru soluția teoretică, vezi E. Șiriaev [2]) a fost studiat cu ajutorul unei analogii electrice de către K. Rushton [1].

e) *Secțiune dreptunghiulară îngustă*

Acesta este un caz particular al problemei din § 15, exemplul *e*. Îl vom examina aci pentru a pune în evidență posibilitățile de *calcul* sugerate de analogia membranei, și a compara cu soluția exactă.

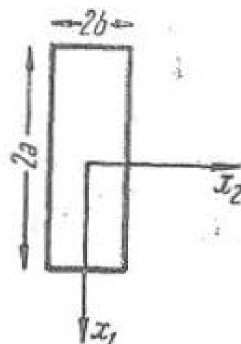


Fig. 5.16.7

Întrucît $b \ll a$, sub acțiunea sarcinii normale Q membrana va lua o formă aproape cilindrică — exceptînd vecinătatea laturilor mici ale dreptunghiului.

În primă aproximație, avem deci $w_{,1} \cong w_{,11} \cong 0$, astfel că ecuația (6) se reduce la

$$w_{,22} = -Q/S, \tag{19}$$

de unde urmează

$$w = (Q/2S)\, x_2^2 + \gamma x_2 + \delta. \tag{20}$$

Condiția la limită (5), din care nu mai putem reține decît

$$w\big|_{x_2 = \pm b} = 0, \tag{21}$$

permit să deducem din (20):

$$w = -(Q/2S)\,(x_2^2 - b^2). \tag{22}$$

Prin urmare, membrana ia forma unui cilindru parabolic de curbă directoare (22) avînd drept linii de nivel, liniile $x_2 = \text{const}$. Din (7) și (22) avem acum soluția aproximativă

$$\mathfrak{f}(x_1, x_2) = b^2 - x_2^2. \tag{23}$$

Făcînd uz și de (14.26), tensiunea tangențială se obține sub forma

$$T(s) = -\mu\tau\, \mathfrak{f}_{,n} = 2\mu\tau\, x_2 = \sigma_{31}. \tag{24}$$

După cum se vede, sîntem conduşi la a neglija componenta σ_{32} — ceea ce este îngăduit la distanţă suficientă de laturile mici ale dreptunghiului.

Volumul V acoperit de membrană este produsul ariei A a segmentului de parabolă definit de (22), cu lungimea $2a$. Avem

$$A = -\frac{1}{2}(Q/S)\int_{-b}^{+b}(x_2^2 - b^2)\,\mathrm{d}x_2 = \frac{2}{3}(Q/S)\,b^3,$$

de unde, folosind şi (8):

$$V = \frac{4}{3}(Q/S)\,ab^3, \quad C = \frac{16}{3}ab^3, \tag{25}$$

astfel că (13.15) devine

$$\mathcal{M}_3 = \frac{16}{3}\mu\tau\,ab^3. \tag{26}$$

Formulele (24) şi (25) coincid cu formulele limită (15.90). Să remarcăm că dacă am calcula momentul $\mathcal{M}_3$ ţinînd seama de (24), am obţine numai *jumătate* din valoarea corectă din (26):

$$\mathcal{M}_3 = \iint_{\mathcal{D}} x_2\,\sigma_{31}\,\mathrm{d}D = \frac{8}{3}\mu\tau\,ab^3. \tag{27}$$

Explicaţia acestei nepotriviri este simplă: volumul V este bine aproximat (cu un uşor exces) de prima expresia (25), în care se neglijează comportarea reală a membranei într-o porţiune ce contribuie numai cu puţin la valoarea totală a volumului real: în schimb, neglijînd componenta σ_{32} în (27), neglijăm termeni de forma $x_1\,\sigma_{32}$, în care tensiunile încetează de a fi neglijabile tocmai în vecinătatea laturilor mici ale dreptunghiului, aşadar acolo unde variabila x_1 ia valori mari.

Acest exemplu ne arată că analogia lui Prandtl (ca orice analogie de altfel) trebuie folosită cu atenţie. Ea va da întotdeauna o bună aproximare a gradului de torsiune (mărime cu caracter *integral*) şi o aproximaţie mai puţin satisfăcătoare pentru componentele tensiunii (mărimi legate de *derivatele* funcţiei $\mathrm{f}(x_1, x_2)$).

f) Bare cu pereţi subţiri

Soluţia problemei anterioare poate fi extinsă, ca primă aproximaţie, şi la cazul altor secţiuni de formă alungită.

Astfel, pentru secţiunea din figura 5.16.8, vom alege drept linie x_1, linia mediană (convenabil definită) a secţiunii. Soluţia (23) rămîne desigur — din aceleaşi considerente mecanice — aproximativ valabilă, distanţa b fiind acum o funcţie $b(x_1)$. Întrucît coordonatele sînt curbilinii, ecuaţia (14.21) nu mai este riguros verificată — dar analogia membranei arată că această abatere nu are importanţă esenţială. Condiţia la limită din (14.21) este verificată, cu excepţia capetelor secţiunii.

Pentru rigiditatea geometrică la torsiune obținem din (14.23)

$$C = 2\iint_{\mathscr{D}} f(x_1, x_2)\, dD \cong 2\left[\int_{x_1'}^{x_1''} b^2(x_1)\, dx_1 \int_{-b(x_1)}^{+b(x_1)} dx_2 - \right.$$

$$\left. - \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{-b(x_1)}^{+b(x_1)} x_2^2\, dx_2 \right],$$

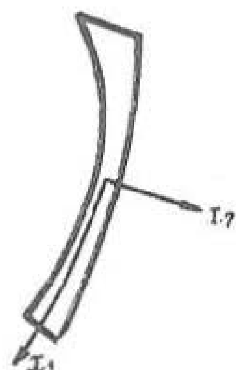


Fig. 5.16.8

de unde urmează

$$C \cong \frac{8}{3}\int_{x_1'}^{x_1''} b^3(x_1)\, dx_1. \tag{28}$$

Pentru $b(x_1) = \text{const.}$, $x_1' = -a$, $x_1'' = a$, aceasta coincide cu (25). Pentru o justificare riguroasă a formulei (28), vezi A. Martin [1].

Ca exemplu, să considerăm cazul unei lunule subțiri a cărei frontieră se obține prin intersectarea a două cercuri definite prin razele lor și prin distanța centrelor (fig. 5.16.9). Trasînd cercul median — convenabil definit — al lunulei, determinăm centrul, raza sa r_0, și unghiul de deschidere $2\chi'$ al lunulei. Vom nota cu a semi-lungimea medie desfășurată, și cu b_0 semi-grosimea maximă. Cunoscînd razele și distanța centrelor, mărimile χ', a, b_0 pot fi determinate exact — și reciproc. În practică, mărimile a, b_0 se măsoară direct, iar χ' se calculează ușor.

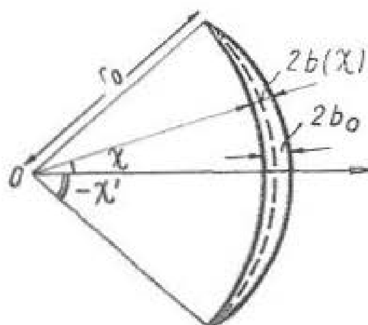


Fig. 5.16.9

Funcția $b(\chi)$ poate fi și ea determinată exact, după calcule elementare, dar laborioase. O expresie aproximativă a ei se obține, ținînd seama că b/b_0 este o funcție pară în χ, nulă pentru $\chi = \chi'$, și egală cu 1 pentru $\chi = 0$. Prin urmare, avem

$$a = r_0\chi', \qquad b(\chi) \cong b_0\,[1 - (\chi/\chi')^2]. \tag{29}$$

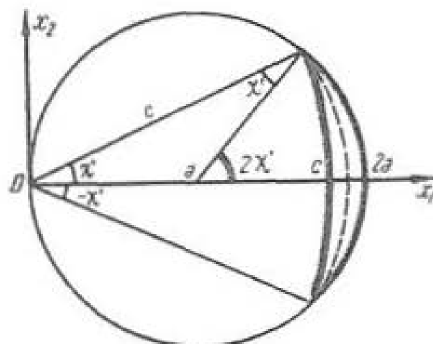


Fig. 5.16.10

Introducînd (29) în (28), unde $x_1 = r_0\chi$, obținem

$$C = \frac{8}{3}\int_{-\chi'}^{\chi'} b_0^3\,[1 - (\chi/\chi')^2]^3\, r_0\, d\chi =$$

$$= \frac{256}{105}\, b_0^3\, a. \tag{30}$$

În cazul particular (cercetat însă cu mijloace exacte) din § 15, *d*, am obținut pentru C expresia (15.59) (notațiile diferă!). Comparînd figurile 5.15.2

şi 5.16.10, obţinem pentru semi-lungimea medie a (în notaţiile din § 15) valoarea $2a\chi'$, iar pentru semi-grosimea maximă, valoarea $b_0 = \frac{1}{2}(2a - c) = a(1 - \cos\chi') \cong \frac{1}{2} a\chi'^2$, astfel că formula (30) coincide cu (15.59).

Exemplul confirmă desigur utilitatea formulei aproximative (28).

g) *Secţiuni compuse*

Analogia membranei permite înţelegerea calitativă a comportării barelor a căror secţiune este alcătuită prin juxtapunere de domenii. Studiului exact al problemei îi este consacrată o vastă literatură. (Pentru detalii, vezi mai departe § 18, pag. 301.)

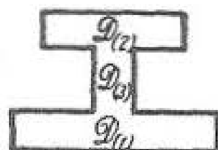


Fig. 5.16.11

Să considerăm ca exemplu o secţiune în I, compusă din dreptunghiuri înguste. Vom folosi notaţiile $\mathscr{D}_{(i)}$ pentru componentele dreptunghiulare ale secţiunii. Conform formulei (8), avem în primă aproximaţie $C \cong C_{(1)} + C_{(2)} + C_{(3)}$ sau încă, ţinînd seama de (25):

$$C \cong \frac{16}{3} \sum_{i=1}^{3} a_i b_i^3, \tag{31}$$

unde $2b_i$ sînt înălţimile dreptunghiurilor. Se vede limpede că, la oarecare distanţă de frontierele comune ale domeniilor $\mathscr{D}_{(i)}$, tensiunile rămîn aproximativ aceleaşi în $\mathscr{D}$ ca în fiecare din subdomeniile $\mathscr{D}_{(i)}$ în parte (pentru acelaşi τ). Modificări se constată numai în punctele de „lipire" a domeniilor, şi au caracterul unor concentrări locale de tensiuni.

Din (31) rezultă că profilele *deschise* cu pereţi subţiri (aşadar cu secţiuni simplu conexe şi cu pereţi subţiri, putînd fi întotdeauna aproximate prin juxtapunere de dreptunghiuri) rezistă slab la torsiune. În fapt, tocmai pentru astfel de profile capătă deosebită importanţă fenomenul de torsiune împiedicată: tensiunile normale ce apar atunci constituie o importantă sursă suplimentară de rezistenţă a barei.

h) *Coroană circulară excentrică*

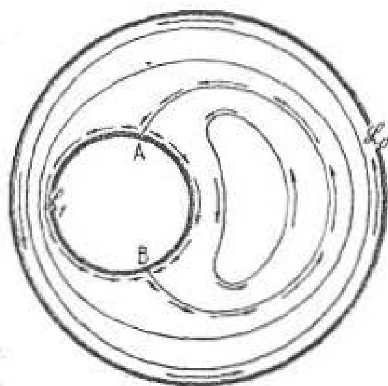


Fig. 5.16.12

Soluţia exactă a problemei este dată în § 18, exemplul **e**. Dacă se determină liniile de nivel corespunzătoare, se vede că pe măsură ce componenta interioară a frontierei se deplasează spre cea exterioară, apar concentrări de tensiuni şi numărul de linii de nivel scade.

Un caz posibil, prezentat pe figura 5.16.12, arată prezenţa unei linii de nivel bifurcate. Vectorul tensiune are sensul indicat de săgeţi. În punctele A şi B, tensiunea schimbă de sens pe $\mathscr{L}_1$, trecînd prin zero.

i) Secțiuni multiplu conexe cu pereți subțiri

Determinarea constantelor lui Prandtl poate fi ușor realizată în cazul barelor cu pereți subțiri.

Să considerăm (pentru simplitate) o bară de secțiune dublu conexă. Să notăm cu $2h$ distanța (variabilă) între curbele $\mathscr{L}_0$ și $\mathscr{L}_1$, măsurată de exemplu după normala interioară la $\mathscr{L}_0$. În acest caz relația (14.18) se scrie

$$C = 2f_1 D_1 + 2\iint_{\mathscr{D}} f(x_1, x_2)\, dD. \qquad (32)$$

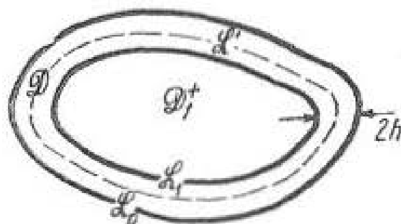


Fig. 5.16.13

Întrucît grosimea $2h$ este mică, analogia membranei ne permite să presupunem că funcția lui Prandtl variază *liniar* după direcția normalei interne la $\mathscr{L}_0$. (O lege parabolică nu modifică cu mult rezultatul). Dacă notăm cu $\mathscr{L}'$ locul geometric (convenabil definit) al punctelor egal depărtate de $\mathscr{L}_0$ și $\mathscr{L}_1$, avem

$$f|_{\mathscr{L}'} \cong \frac{1}{2} f_1, \quad f_{,n}|_{\mathscr{L}'} = -\frac{1}{2} f_1/h, \qquad (33)$$

unde n este normala externă la $\mathscr{L}'$. Făcînd uz de formula lui Bredt (14.13) pe $\mathscr{L}'$, obținem

$$f_1 \oint_{\mathscr{L}'} h^{-1}\, ds = 4 D', \qquad (34)$$

unde $D' = D_1 + \frac{1}{2} D$ este aria mărginită de $\mathscr{L}'$. Din (34) căpătăm astfel pe f_1.

Mai departe, ținînd seama de (33) în (32), obținem

$$C = 2 f_1 D_1 + f_1 \iint_{\mathscr{D}} dD = 2 f_1 D', \qquad (35)$$

astfel că (13.15) dă pentru momentul de torsiune expresia

$$\mathscr{M}_3 = 2\,\mu\,\tau\, f_1 D'. \qquad (36)$$

Utilizînd și (34), căpătăm astfel

$$\tau = \left(\mathscr{M}_3 \oint_{\mathscr{L}'} h^{-1}\, ds\right) : 8\mu (D')^2. \qquad (37)$$

Într-un astfel de calcul nu poate fi vorba de determinarea tensiunilor tangențiale, ci numai a unor valori medii ale lor, ceea ce se obține ușor din (14.26), (33) și (36):

$$T(s) = -\,\mu\,\tau\, f_{,n} \cong \mu\,\tau (f_1/2h) = \mathscr{M}_3/4h D'. \qquad (38)$$

Pentru secțiuni de un ordin de conexiune mai înalt, raționamentul rămîne în principiu același. Exemple de acest fel sînt date de pildă de Chi-Teh Wang [1], § 5.6; A. Föppl și L. Föppl [1], §§ 70–72; P. Papkovici [4], § 7.11; S. Timoshenko și J. Goodier [1], §§ 101, 102. Indicații bibliografice asupra puțin numeroaselor soluții exacte sînt date de I. Sokolnikoff [2], § 47.

j) *Secțiuni simplu conexe și multiplu conexe*

Analogia membranei permite să înțelegem comportarea complet diferită a barelor de secțiune simplu conexă, respectiv multiplu conexă, supuse la torsiune liberă. Pentru a simplifica raționamentele, vom consi-

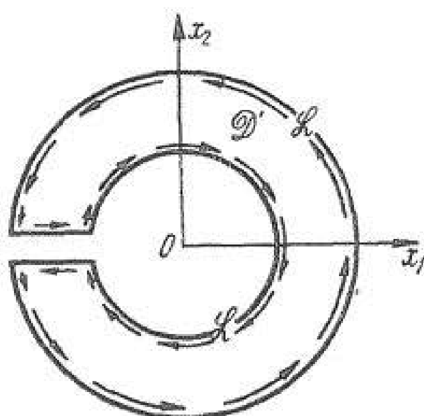


Fig. 5.16.14

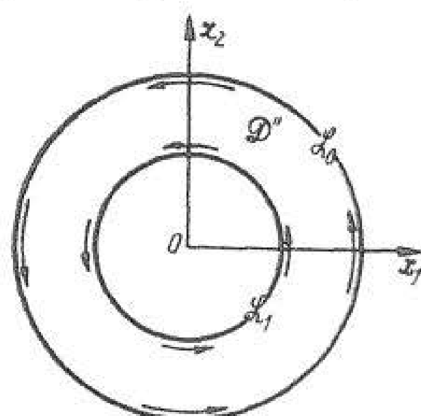


Fig. 5.16.15

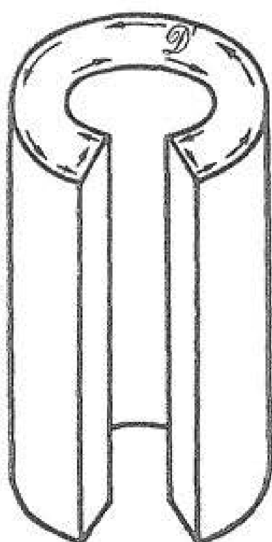


Fig. 5.16.16

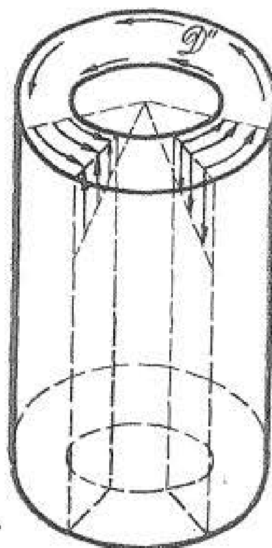


Fig. 5.16.17

dera o coroană circulară (de raze $R_1 < R_0$) cu o fisură radială completă și aceeași coroană circulară, fără fisură. Prima este un domeniu simplu conex $\mathscr{D}'$, iar a doua un domeniu dublu conex $\mathscr{D}''$(vezi fig.5.16.14–5.16.17).

În cazul ('), avem $\mathfrak{f}|_{\mathscr{L}} = 0$. În cazul ("), avem $\mathfrak{f}|_{\mathscr{L}_0} = 0$, $\mathfrak{f}|_{\mathscr{L}_1} = f_1 > 0$. Vectorul tensiune fiind dirijat după tangenta la liniile $\mathfrak{f} =$ const., urmează că tensiunile pe frontieră sînt dirijate după cum arată săgețile din figură, așadar în mod esențial diferit în cele două cazuri.

În figura 5.16.17 (care e similară cu 5.16.6), tensiunile tangențiale pe secțiunile longitudinale imaginare mențin secțiunile normale în forma lor plană inițială. În schimb din figura 5.16.16 este vizibil că trebuie să se manifeste deplanarea secțiunilor; deplasarea longitudinală u_3 va fi *negativă* pe bordul superior al fisurii (în lungul semiaxei negative Ox_1 din fig. 5.16.14), și *pozitivă* pe bordul ei inferior.

Argumentele referitoare la înrăutățirea condițiilor de rezistență (pag. 269) își păstrează valabilitatea. Pe lîngă aceasta, din considerente evidente de continuitate, este limpede că tensiunile vor fi nule undeva în lungul unei linii din interiorul lui $\mathscr{D}'$ — și deci materialul corespunzător nu va „lucra". (Vezi și § 6, pag. 190.)

Să calculăm acum rigiditatea C cu ajutorul formulei (14.18) — unde în primul caz avem $m = 0$, iar în al doilea, $m = 1$. Integrala este proporțională cu volumul acoperit de membrană; aceasta din urmă satisface în primul caz condiția $w|_{\mathscr{L}} = 0$, iar în al doilea, condițiile $w|_{\mathscr{L}_0} = 0$, $w|_{\mathscr{L}_1} = W_1 > 0$.

În cazul ('), acest volum este aproximativ egal cu cel acoperit de o membrană dublu conexă, ce satisface însă condițiile $w|_{\mathscr{L}_0} = w|_{\mathscr{L}_1} = 0$. Îl vom determina, integrînd ecuația $\Delta\mathfrak{f} = -2$, și presupunînd că forma membranei nu depinde de unghiul polar χ. În coordonate polare (vezi (A.4.11) pentru $\partial/\partial\chi = 0$), deducem

$$\mathfrak{f}(R) = -\frac{1}{2} R^2 + \gamma \ln (R/R_0) + \delta, \tag{39}$$

unde termenul logaritmic este scris sub o formă care nu depinde de alegerea unității de măsură. (Spre deosebire de cele spuse în observația din § 15, pag. 239, o astfel de soluție este acum justificată, întrucît facem uz de ea pentru domeniul $\mathscr{D}'$, care este în fapt simplu conex.)

Impunînd în general condițiile $\mathfrak{f}(R_0) = 0$, $\mathfrak{f}(R_1) = f_1$, deducem din (39):

$$\gamma = [2f_1 - (R_0^2 - R_1^2)] : 2 \ln (R_1/R_0), \qquad \delta = \frac{1}{2} R_0^2 . \tag{40}$$

Întrucît în cazul (') avem $f_1 = 0$, soluția (39) se scrie

$$\mathfrak{f}^{(')} = \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2) - [(R_0^2 - R_1^2)/2 \ln (R_1/R_0)] \ln (R/R_0). \tag{41}$$

În cazul (") putem face uz de formula (34), care ne dă $f_1 = \frac{1}{2} (R_0^2 - R_1^2)$ (ceea ce coincide de altfel cu valoarea exactă, după cum urmează din (15.2)); astfel obținem

$$\mathfrak{f}^{('')} = \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2), \tag{42}$$

așadar chiar funcția lui Prandtl (soluția exactă) pentru $\mathscr{D}''$ (vezi (15.2)).

Trecînd la calculul deplasărilor, constatăm evident că $r^{('')} \equiv 0$. Pentru cazul ($'$), avem mai întîi din (14.6)

$$\mathrm{t}(x_1, x_2) = \mathrm{f} + \frac{1}{2} R^2 = \gamma \ln (R/R_0) + \frac{1}{2} R_0^2,$$

şi deci

$$\psi(\mathfrak{z}) = \mathrm{r}(x_1, x_2) + \mathrm{i}\gamma \ln (R/R_0) + \frac{1}{2} \mathrm{i} R_0^2,$$

ceea ce conduce la expresiile

$$\psi^{(')}(\mathfrak{z}) = \mathrm{i}\gamma' \ln (\mathfrak{z}/R_0) + \frac{1}{2}\mathrm{i}R_0^2, \quad r^{(')}(x_1, x_2) = -\gamma'\chi, \quad \gamma' = -(R_0^2 - R_1^2)/2 \ln (R_1/R_0). \quad (43)$$

OBSERVAŢIE. Aceleaşi relaţii aproximative pot fi utilizate cu succes chiar şi pentru *semi*coroana circulară cu pereţi subţiri. Astfel, luînd $R_0 = 1$, $R_1 = 0{,}9$, din (15.123) obţinem $r(1, \pm \pi/2) = \mp 1{,}41$ (unde am reţinut 4 termeni ai seriei). Or, soluţia aproximativă (43) dă *exact* acelaşi rezultat. (Subliniem că nu este vorba de o comparare numai a parametrilor globali!) În particular, este vizibil că pentru $x_1 > 0$ şi $\mathscr{M}_3 > 0$, căpătăm $u_3 < 0$ — după cum era de aşteptat.

Considerînd mărimile nul-dimensionale R^*, k, ε din (15.93) şi funcţia lui Prandtl nul-dimensională (15.94), care se scrie acum

$$\mathrm{f}^*(R^*) = \mathrm{f}(R)/R_0^2, \quad (44)$$

obţinem din (41), (42)

$$\mathrm{f}^*_{(')} = \frac{1}{2}(1 - R^{*2}) - [(1 - k^2)/2 \ln k] \ln R^*, \quad \mathrm{f}^*_{('')} = \frac{1}{2}(1 - R^{*2}). \quad (45)$$

Să calculăm pentru ambele variante integrala

$$H = \iint_{\mathscr{D}} \mathrm{f}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}D = 2\pi R_0^4 \int_k^1 \mathrm{f}^*(R^*)\, R^*\, dR^*. \quad (46)$$

În cazul coroanei circulare deducem imediat

$$H'' = \frac{1}{4}\pi R_0^4 (1 - k^2)^2 = \pi R_0^4 \varepsilon^2 \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2\right). \quad (47)$$

Ţinînd seama că în general

$$\int x^n \ln x\, \mathrm{d}x = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right], \quad (48)$$

obţinem

$$\int_k^1 R^* \ln R^*\, \mathrm{d}R^* = -\frac{1}{4}[1 + k^2(2 \ln k - 1)] \cong -\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(1 - \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{12}\varepsilon^3\right). \quad (49)$$

Întrucît din (43) urmează

$$\gamma' = -R_0^2[(1-k^2)/2\ln k] \cong R_0^2\left(1-\varepsilon+\frac{1}{6}\varepsilon^2\right), \tag{50}$$

deducem

$$H' = H'' + 2\pi R_0^2\gamma'\int_k^1 R^*\ln R^*\,\mathrm{d}R^* = \frac{1}{3}\pi R_0^4\varepsilon^3\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right). \tag{51}$$

În definitiv, avem deci

$$\begin{aligned} C' &= 2\,H' = \frac{2}{3}\pi R_0^4\,\varepsilon^3\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right),\\ C'' &= 2\,H'' + 2f_1D_1 = 2\pi R_0^4\,\varepsilon\left(1-\frac{3}{2}\varepsilon+\varepsilon^2\right), \end{aligned} \tag{52}$$

unde C'' coincide cu valoarea exactă ce rezultă din (15.4).

Aşadar, mărimea C' are în factor pe ε^3; mărimea H'', pe ε^2; iar C'', pe ε. Prin urmare, profilul închis $\mathscr{D}''$ rezistă cu mult mai bine nu numai din cauză că volumul H'' e mult mai mare decît volumul H', ci *mai ales* datorită prezenţei termenului f_1D_1. (Desigur, şi acest din urmă termen tinde la zero odată cu ε.)

Lucrurile se petrec deci ca şi cum orificiul $\mathscr{D}_1^+$ participă (şi joacă chiar rolul esenţial) în rezistenţa la solicitare. Acelaşi orificiu, deschis spre exterior, încetează de a participa la rezistenţă, şi provoacă o redistribuire nefavorabilă de tensiuni în material, care face ca valoarea f_1 să cadă la zero, iar valoarea volumului H'', la H'.

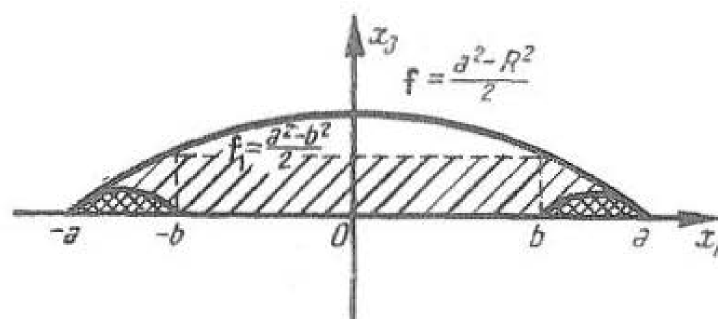


Fig. 5.16.18

Secţionînd volumele acoperite de membrană printr-un plan perpendicular pe Ox_1x_2, obţinem situaţia din figura 5.16.18 (unde secţiunea volumului $f_1D_1 + H''$ este haşurată simplu, iar cea a volumului H' este haşurată dublu). Întrucît materialul utilizat este proporţional cu $\pi(R_0^2 - R_1^2) = 2\pi R_0^2\varepsilon$, iar C'' este proporţional cu $2\pi R_0^4\,\varepsilon$, rezultă limpede marea economie de material realizată prin utilizarea de profile *închise* cu pereţi subţiri. (Vezi şi § 6, pag. 190.)

Aceste raționamente clarifică semnificația mecanică a formulei (14.18) : integrala $\iint_{\mathscr{D}} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}D$ măsoară participarea la rezistență a materialului *folosit*, în timp ce suma $\sum_{j=1}^{m} f_j D_j$ măsoară, paradoxal, participarea la rezistență a orificiilor, așadar a materialului *economisit*.

Se înțelege că aceste raționamente își pierd sensul în cazul torsiunii împiedecate.

Pentru a încheia, reproducem încă liniile de nivel obținute prin analogia membranei pentru o coroană circulară (cu $R_1/R_0 = 0{,}2$) cu o fisură exterioară radială, permițînd urmărirea procesului de fisurare. Se pot repeta aci cele spuse relativ la exemplul ***d***.

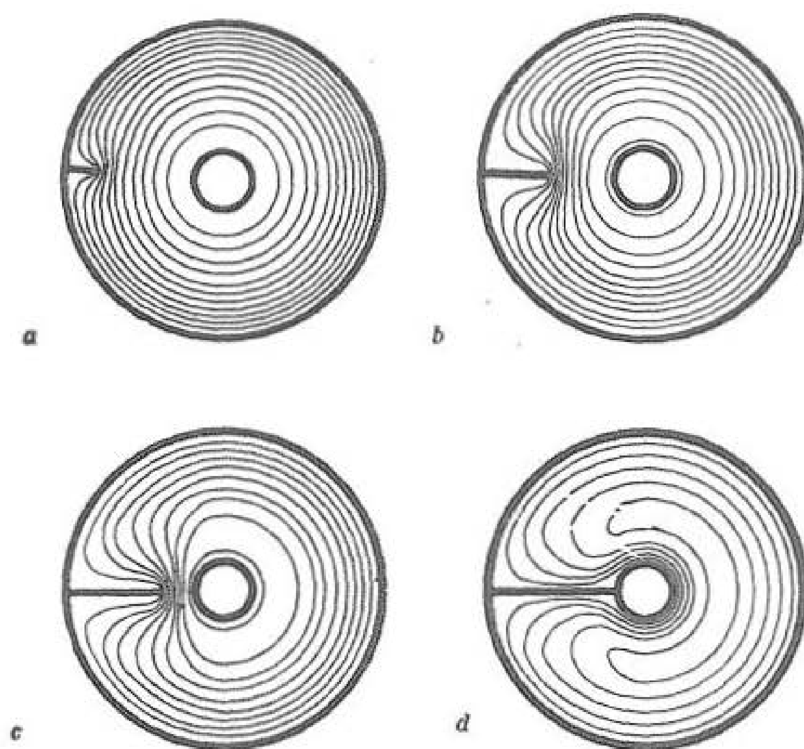


Fig. 5.16.19

§ 17. PROBLEMA TORSIUNII PENTRU BARE DE SECȚIUNE SIMPLU-CONEXĂ. METODA REPREZENTĂRII CONFORME

În cele ce urmează, ne vom limita la cazul unei secțiuni *simplu conexe* $\mathscr{D}$ în planul $\mathfrak{z}$. Problema torsiunii se reduce la determinarea funcției $\psi(\mathfrak{z})$, olomorfe în $\mathscr{D}$, din condiția la limită (13.3) sau (13.5). Întrucît

avem $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0$ şi $f_0 = 0$, notînd cu t un punct curent pe frontiera $\mathscr{L}$, avem

$$\operatorname{Im} \psi(t) = \frac{1}{2} t \bar{t}. \tag{1}$$

Uneori, problema astfel formulată se rezolvă elementar cu ajutorul aşa numitei „metod, $\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}$" (A. Stevenson [1]; Th. Higgins [1]). Anume, dacă ecuaţia $G(x_1, x_2) = 0$ a frontierei $\mathscr{L}$ transcrisă în variabilele $\mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{z}}$, poate fi pusă sub forma

$$g(t) + \overline{g(t)} = t\bar{t} + \text{const.}, \tag{2}$$

unde $g(.)$ este valoarea la limită a unei funcţii $g(\mathfrak{z})$ olomorfe în $\mathscr{D}$, atunci soluţia problemei (1) este direct construită sub forma

$$\psi(\mathfrak{z}) = i g(\mathfrak{z}) + \text{const.} \tag{3}$$

Unele exemple de acest fel vor fi date în § 18, ***a*** şi ***b***. Totuşi, metoda nu se dovedeşte decît rareori eficace.

Linia principală de abordare a problemei torsiunii o constituie utilizarea mijloacelor teoriei funcţiilor complexe, ale căror posibilităţi practice sînt limitate numai de posibilitatea construirii efective a reprezentării conforme corespunzătoare (exacte sau aproximative) a domeniului $\mathscr{D}$ pe discul unitate $Д^*$ (pe care-l vom nota aci cel mai adesea numai cu $Д$). Rezultatele şi formulele necesare în cele ce urmează sînt date în §§ A.6-A.8. Cazul domeniului dublu conex nu este principial mai greu — dar calculele devin mult mai complicate. Pentru un ordin de conexiune superior, problema îşi schimbă caracterul, şi rezolvarea ei este considerabil mai dificilă.

Fie deci cunoscută funcţia

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta), \tag{4}$$

care reprezintă conform discul unitate $Д$ de frontieră γ din planul ζ, pe domeniul simplu conex $\mathscr{D}$. Inversa acestei funcţii este

$$\zeta = \omega^{-1}(\mathfrak{z}). \tag{5}$$

Prin ipoteză, funcţia (4) este olomorfă în $Д$, iar derivata ei nu are zerouri în $Д$ (putînd avea totuşi zerouri sau puncte singulare pe γ). Pentru comportarea la limită a funcţiei $\omega(\zeta)$ şi a derivatelor sale, vezi § A.6, pag. 728—730.

Pe cercul unitate vom nota

$$\zeta|_\gamma = \sigma = \exp(i\theta), \quad \bar{\sigma} = \exp(-i\theta) = \sigma^{-1}, \qquad d\sigma = i\sigma\, d\theta, \tag{6}$$

astfel că pentru orice domeniu mărginit de o curbă simplă jordaniană $\mathscr{L}$ avem (vezi şi § A.11, pag. 781)

$$t = \mathfrak{z}|_{\mathscr{L}} = \omega(\sigma) = \omega^+, \qquad \bar{t} = \bar{\mathfrak{z}}|_{\mathscr{L}} = \overline{\omega(\sigma)} = \omega_*^-, \tag{7}$$

Cunoașterea funcției $\omega(\zeta)$ permite determinarea efectivă a diferitelor elemente ce depind de geometria domeniului (vezi § A.7). Exemple de reprezentări conforme relativ simple și utile în cele ce urmează sînt date în § A.8.

În general, problema la limită (1) nu poate fi rezolvată direct. Ea poate fi însă abordată prin transcrierea tuturor elementelor problemei în coordonate naturale (vezi § A.7) și prin rezolvarea problemei la limită corespunzător transformate în planul ζ (vezi § A.7, pag. 735).

Atunci cînt este cazul, vom atribui funcțiilor de $\mathfrak{z}$ (considerate deci în planul „fizic") indicele inferior „1", păstrînd aceleași notații, dar fără indice, pentru transformatele lor prin intermediul reprezentării (4). Avem deci (vezi (A.7.4) — (A.7.5)):

$$\psi_{(1)}(\mathfrak{z}) = \psi_{(1)}[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta),$$
$$\Psi_{(1)}(\mathfrak{z}) = d\psi_{(1)}(\mathfrak{z})/d\mathfrak{z} = \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta). \tag{8}$$

Funcția $\psi(\mathfrak{z})$ odată determinată, obținem imediat

$$\psi_{(1)}(\mathfrak{z}) = \psi[\omega^{-1}(\mathfrak{z})], \tag{9}$$

ceea ce se poate calcula efectiv dacă (5) poate fi explicitat. În caz contrar, funcțiile $\omega(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ dau soluția sub formă parametrică: pentru orice $\zeta \in \mathcal{D}$ cunoaștem punctul $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}$ care îi corespunde, și componentele deplasării și tensiunii în acest punct. Anume, formulele (13.6), (13.9) devin

$$T = \mu\tau[\overline{\psi'(\zeta)}/\overline{\omega'(\zeta)} + i\omega(\zeta)], \quad U = i\tau x_3\omega(\zeta), \quad u_3 = \tau \operatorname{Re}\psi(\zeta). \tag{10}$$

În aceste notații, condiția la limită (1) se scrie

$$\operatorname{Im}\psi(\sigma) = \frac{1}{2}\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}, \tag{11}$$

ceea ce trebuie să permită determinarea funcției $\psi(\zeta)$, olomorfe în $\mathcal{D}$. Pentru găsirea rigidității rămîne să facem uz de (13.25), ceea ce se va scrie

$$C = J_0 - \operatorname{Re} C_1, \tag{12}$$

unde J_0 este momentul polar de inerție în axele ce rezultă din (4), iar

$$C_1 = \oint_{\mathscr{L}} r\bar{t}\,dt, \quad \operatorname{Re} C_1 = \frac{1}{2}\oint_{\mathscr{L}} r\,d(t\bar{t}). \tag{13}$$

Pentru J_0 dispunem de formula (A.7.32), iar pentru $\operatorname{Re} C_1$ avem de introdus în (13) funcția deja găsită $\psi(\zeta)$, de ținut seama de valorile la limită ce decurg din (4), și de calculat integrala corespunzătoare pe γ.

Pentru rezolvarea acestei probleme, vom expune aici trei metode.

a) *Metoda* $\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}$

Ca şi la începutul paragrafului, dacă produsul $\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}$ poate fi pus sub forma sumei unei funcţii de σ cu funcţia conjugată acesteia, şi dacă această funcţie este valoarea pe γ a unei funcţii olomorfe în $\mathcal{D}$, problema este rezolvată.

În particular, metoda este întotdeauna aplicabilă dacă $\omega(\zeta)$ este o funcţie raţională (în particular, un polinom). Într-adevăr, din (7) urmează că produsul $\omega\,\overline{\omega}$ este valoarea la limită a produsului de funcţii raţionale $\omega(\zeta)\,\omega_*(\zeta)$, dintre care prima are poli numai în $\mathcal{D}^-$, iar a doua, numai în $\mathcal{D}^+$. Descompunînd acest produs în sumă de fracţii simple, şi notînd cu $R(\zeta)$ suma tuturor termenilor corespunzători polilor din $\mathcal{D}$, rezultă — întrucît produsul $\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}$ este real — că trebuie să avem

$$\omega(\zeta)\,\omega_*(\zeta) = R(\zeta) + R_*(\zeta) \tag{14}$$

(plus eventual o constantă reală determinată). Întrucît $R(\zeta)$ este prin construcţie olomorfă în $\mathcal{D}^+$, soluţia problemei este

$$\psi(\zeta) = \mathrm{i}\,R(\zeta). \tag{15}$$

În acest caz, soluţia problemei se obţine deci efectiv, sub o formă elementară, prin operaţii de descompunere a unei funcţii raţionale în sumă de fracţii simple. Rezultatul rămîne valabil dacă $R(\zeta)$ este o funcţie olomorfă în $\mathcal{D}^+$, dar altfel oarecare.

Chestiunea este examinată amănunţit, şi sub o formă mult mai generală, de C. Iacob [6].

b) *Metoda seriilor*

Dacă soluţia nu poate fi găsită direct sub forma (15), vom ţine seama că $\omega(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ sînt olomorfe în $\mathcal{D}$, şi deci au forma

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\,\zeta^n \tag{16}$$

(unde coeficienţii ω_n sînt cunoscuţi), respectiv

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,\zeta^n, \tag{17}$$

unde coeficienţii b_n urmează a fi determinaţi din (11).

Pentru membrul al doilea din (11) obţinem mai întîi:

$$\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \omega_k\,\omega_h\,\sigma^{k-h},$$

sau încă, scriind $k-h=n$ pentru $k>h$, şi $k-h=-n$ pentru $k<h$:

$$\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)} = 2B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_{-n}\,\sigma^{-n}, \tag{18}$$

unde am notat (pentru $n = 1, 2\ldots$)

$$2B_0 = \sum_{h=0}^{\infty} \omega_h \overline{\omega}_h, \quad B_n = \sum_{h=0}^{\infty} \omega_{n+h} \overline{\omega}_h, \quad B_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \overline{\omega}_{n+k} = \overline{B}_n. \tag{19}$$

Coeficienţii B_n sînt aşadar cunoscuţi. În particular B_0 este real. Cu aceasta, condiţia la limită (11) ia forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sigma^n - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b}_n \sigma^{-n} = 2\mathrm{i}\, B_0 + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sigma^n + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \sigma^{-n}, \tag{20}$$

de unde, ţinînd seama de proprietatea de unicitate a coeficienţilor Fourier (vezi § A.9, pag. 759) obţinem prin identificare

$$b_0 - \overline{b}_0 = 2\mathrm{i}\, B_0, \quad b_n = \mathrm{i} B_n, \qquad n = 1,2\ldots \tag{21}$$

şi deci şi soluţia problemei, sub forma

$$\psi(\zeta) = \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n, \tag{22}$$

unde termenul liber este determinat numai abstracţie făcînd de o constantă reală. (Alegerea făcută aci revine la a cere Re $\psi(0) = 0$ şi $f_0 = 0$.) Dacă $\omega(\zeta)$ este un polinom, calculele sînt identice cu cele cerute de metoda $\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}$.

Ideea de a dezvolta datele la limită în serie Fourier pe γ şi a obţine în felul acesta soluţia sub forma unei dezvoltări în serie Taylor în $Д$, este larg folosită atît în studiul problemei torsiunii, cît şi în cel al încovoierii, şi al problemei plane.

Pentru determinarea lui C, vom face uz de formulele (12), (13). Momentul polar J_0 se calculează după formula (A.7.32):

$$J_0 = -\frac{1}{8}\mathrm{i} \oint_{\gamma} [\overline{\omega(\sigma)}]^2 \,\mathrm{d}\, [\omega(\sigma)]^2. \tag{23}$$

Or, din (16) avem evident

$$[\omega(\sigma)]^2 = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_h \omega_k \sigma^{h+k},$$

de unde mai departe, notînd $h + k = n$ şi considerînd coeficienţii

$$E_n = \sum_{l=0}^{n} \omega_{n-l}\, \omega_l, \tag{24}$$

obţinem

$$[\omega(\sigma)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \sigma^n. \tag{25}$$

Pentru J_0 avem acum

$$J_0 = -\frac{1}{8}\mathrm{i}\oint_\gamma \left[\sum_{n=0}^{\infty} \overline{E}_n\, \sigma^{-n}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} m\, E_m\, \sigma^{m-1}\right] \mathrm{d}\sigma. \tag{26}$$

Datorită relațiilor de ortogonalitate

$$\oint_\gamma \sigma^{m-n-1}\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi\mathrm{i}\,\delta_{mn},$$

urmează

$$J_0 = \frac{1}{4}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, E_n\, \overline{E}_n. \tag{27}$$

Mai departe, pentru cantitatea Re C_1 din (13), ținînd seama de (22) (unde B_0 este o cantitate reală) și de (18), obținem

$$\mathrm{Re}\, C_1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\mathrm{i}\oint_\gamma \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n\, \sigma^n - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n\, \sigma^{-n}\right]\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} m\, B_m\, \sigma^{m-1}\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left[-\sum_{n=1}^{\infty} n B_n B_{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, \overline{B}_n\, B_n\right],$$

de unde în definitiv

$$\mathrm{Re}\, C_1 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, B_n\, \overline{B}_n. \tag{28}$$

Cu aceasta, formula (12) devine

$$C = \frac{1}{4}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,(E_n \overline{E}_n - 4\, B_n \overline{B}_n), \tag{29}$$

unde coeficienții E_n și B_n sînt cunoscuți.

OBSERVAȚIA 1. Metoda este ușor utilizabilă dacă $\omega(\zeta)$ este un polinom. Cazuri în care și soluția exactă este cunoscută permit să ne facem o idee despre utilitatea metodei aproximative corespunzătoare (vezi § 18, exemplul *f*).

c) *Metoda integralelor de tip Cauchy*

Dacă funția $\omega(\zeta)$ este cunoscută sub formă compactă, problema (11) poate fi întotdeauna rezolvată — adesea chiar efectiv — cu ajutorul integralelor de tip Cauchy.

În acest scop, să înmulțim ambii membri ai condiției la limită (11) cu $\mathrm{d}\sigma/2\pi\mathrm{i}\,(\sigma-\zeta)$, și să integrăm pe γ, pentru $\zeta \in Д^+$:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\psi(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\overline{\psi(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{i}\oint_\gamma \frac{\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{30}$$

Întrucît funcțiile ω, ψ sînt olomorfe în $\mathcal{D}^+$, putem face uz de formulele (A.10.1) și (A.11.37), astfel că (30) devine

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma + \overline{\psi(0)}, \tag{31}$$

ceea ce dă explicit soluția sub forma unei integrale definite, de tip Cauchy. Dacă am introduce (16) în (31), am obține din nou soluția (22). (Vezi și finele § A.11.) Dacă ω (ζ) este rațională, integrala din (31) se calculează ușor cu ajutorul formulelor din § A.10.

Pentru a găsi pe C, trebuie să facem din nou uz de formulele (12) și (13); dacă ω (ζ) este funcție rațională, aceasta conduce la utilizarea teoremei reziduurilor.

Cele trei metode expuse reduc deci dificultatea la determinarea funcției $\omega(\zeta)$. Problema torsiunii nu e deci principial mai complicată decît cea a reprezentării conforme a lui $\mathcal{D}^+$ pe $\mathscr{D}$: aceasta este de înțeles, întrucît ambele conduc la cîte o problemă Dirichlet cu date pur geometrice pentru ecuația lui Laplace.

OBSERVAȚIA 2. Dacă domeniul $\mathscr{D}$ este *dublu conex*, deci reprezentabil conform pe o coroană circulară, expresiile (16), (17) se înlocuiesc prin

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \zeta^n, \qquad \psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n, \tag{32}$$

iar în locul condiției (11) căpătăm condițiile

$$\operatorname{Im}\, \psi(\zeta)\big|_{\Lambda_j} = \frac{1}{2}\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}\big|_{\Lambda_j} + f_j, \qquad j = 0,1, \tag{33}$$

unde Λ_j sînt cele două cercuri-frontieră, iar f_j — valorile constantelor lui Prandtl.

Raționamente de același tip cu cele de mai sus duc la determinarea efectivă a funcției $\psi(\zeta)$ sub forma unor integrale definite (L. Bartels [1]) sau a unor serii Laurent (E. Deutsch [1]). Ne vom mărgini numai la a cerceta două exemple în § 18, ***d*** și ***e***.

Remarcăm că utilizarea acestei metode nu pretinde cunoașterea prealabilă a constantelor lui Prandtl. Aceasta era de așteptat, întrucît ele depind explicit de funcția lui Green a domeniului (vezi (14.14)), așadar în definitiv de ω (ζ).

§ 18. PROBLEMA TORSIUNII PENTRU BARE DE SECȚIUNI SIMPLU CONEXE ȘI DUBLU CONEXE. EXEMPLE

Vom da cîteva exemple de secțiuni, eventual fără utilitate practică directă, dar pentru care metodele de mai sus pot fi aplicate ușor. Ele își păstrează valabilitatea în numeroase probleme mai complicate din punctul de vedere al calculului — dar nu diferite principial de acestea.

a) Elipsă

Ecuația frontierei (15.6) se pune ușor sub forma

$$\frac{1}{2}\,[(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)]\,(t^2 + \bar{t}^2) = t\bar{t} + \text{const.}, \tag{1}$$

astfel că (17.3) dă imediat soluția sub forma (compară cu (15.21))

$$\psi(z) = \frac{1}{2}\,[(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)]\,\mathrm{i}\,z^2 + \text{const.} \tag{2}$$

Constanta din (2) poate fi determinată din condițiile Re $\psi(0) = 0$, $f_0 = 0$.

OBSERVAȚIA 1. Problema triunghiului echilateral și a lunulei circulare (cazul elementar) se rezolvă tot atît de ușor prin metoda $z\bar{z}$. Aceeași metodă poate fi folosită și pentru problema dreptunghiului – dar în acest caz aplicarea ei este în fond un decalc al metodei separării variabilelor.

b) Cardioidă

În § A.8, exemplu **c**, sînt calculate diferitele date geometrice necesare pentru studiul secțiunii mărginite de o cardioidă – exemplu simplu de studiu al unei secțiuni cu funcția $\omega(\zeta)$ *polinomială*. Amintim că avem

$$z = \omega(\zeta) = a(1 + \zeta)^2, \qquad \zeta = (z/a)^{1/2} - 1. \tag{3}$$

Condiția la limită (17.11) se scrie deci

$$\psi(\sigma) - \overline{\psi(\sigma)} = \mathrm{i}a^2\,(\sigma^2 + 4\sigma + 6 + 4\sigma^{-1} + \sigma^{-2}). \tag{4}$$

Metoda $z\bar{z}$ dă imediat soluția (vezi (17.15)) sub forma

$$\psi(\zeta) = \mathrm{i}a^2\,(6 + 4\zeta + \zeta^2) + \text{const.} \tag{5}$$

Punînd condiția Re $\psi(0) = 0$, deducem că constanta din (5) este pur imaginară, fie ea iK (cu K real). Punînd și condiția $f_0 = 0$, obținem

$$f_0 = \mathrm{Im}\ \psi(\sigma) - \frac{1}{2}\,\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)} = 0,$$

de unde $K = -3\,a^2$. Cu aceasta, (5) devine în definitiv

$$\psi(\zeta) = \mathrm{i}a^2(3 + 4\zeta + \zeta^2). \tag{6}$$

Același rezultat poate fi obținut prin metoda seriilor. Constantele ω_n din (17.16) au valorile $\omega_0 = a$, $\omega_1 = 2a$, $\omega_2 = a$, toate celelalte fiind nule. Din (17.19) și (17.24) obținem acum $B_0 = 3a^2$, $B_1 = 4a^2$, $B_2 = a^2$, $E_0 = E_4 = a^2$, $E_1 = E_3 = 4a^2$, $E_2 = 6a^2$. Din (17.22) obținem deci funcția de torsiune sub aceeași formă (6).

Aceeaşi problemă se rezolvă (după calcule şi mai puţin laborioase) şi cu ajutorul integralelor de tip Cauchy. Anume, din (17.31) deducem

$$\psi(\zeta) = \frac{ia^2}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{(1+\sigma)^2 (1+\sigma^{-1})^2}{\sigma - \zeta} \, d\sigma + \overline{\psi(0)}. \tag{7}$$

Numărătorul integrandului este valoarea la limită a funcţiei $(1+\zeta)^4/\zeta^2$, olomorfă în Π, cu excepţia punctului $\zeta = 0$, în vecinătatea căruia ea are forma

$$(1+\zeta)^4/\zeta^2 = \zeta^{-2} + 4\zeta^{-1} + f_0(\zeta), \quad f_0(\zeta) = 6 + 4\zeta + \zeta^2, \tag{8}$$

$f_0(\zeta)$ fiind olomorfă în Π. Din formula (A.10.20) obţinem deci pentru integrala din (7) valoarea $ia^2 f_0(\zeta)$, şi (7) devine

$$\psi(\zeta) = i a^2 (6 + 4\zeta + \zeta^2) + \overline{\psi(0)}. \tag{9}$$

Luînd aci $\zeta = 0$ obţinem (abstracţie făcînd de o constantă reală nedeterminabilă) $\overline{\psi(0)} = -3ia^2$, astfel că (9) conduce din nou la (6).

Pentru a calcula C, din (17.29) se obţine

$$C = 17\pi a^4. \tag{10}$$

Pe de altă parte, putem utiliza formulele (17.12), (17.13). Integrala J_0 se calculează cu ajutorul teoremei reziduurilor şi are valoarea (vezi (A.8.43))

$$J_0 = 35\pi a^4. \tag{11}$$

Cantitatea Re C_1 se calculează utilizînd (17.13), (3), (6) şi teorema reziduurilor, de unde

$$\operatorname{Re} C_1 = \frac{1}{4} i a^4 \oint_\gamma [\sigma^2 + 4\sigma - 4\sigma^{-1} - \sigma^{-2}] \times$$
$$\times d[(1+\sigma)^2 (1+\sigma^{-1})^2] = 18\pi a^4. \tag{12}$$

Ţinînd seama de (17.12), regăsim deci pentru C valoarea din (10).

Funcţia de torsiune şi constanta C (şi deci şi τ) odată determinate, din (17.10), (3) şi (6) obţinem componentele tensiunii şi deplasării. Astfel de pildă deducem

$$T(\zeta, \bar\zeta) = i\mu\tau a\, [(1+\zeta)^2 - (2+\bar\zeta)(1+\bar\zeta)^{-1}]. \tag{13}$$

Soluţia se transcrie uşor în planul fizic. Anume, avem

$$\psi_{(1)}(\mathfrak{z}) = i a^2\, [(\mathfrak{z}/a) + 2\, (\mathfrak{z}/a)^{1/2}], \tag{14}$$

$$T_{(1)}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = -i\mu\tau a\, [1 - (\mathfrak{z}/a) + (\bar{\mathfrak{z}}/a)^{-1/2}]. \tag{15}$$

Deplasările — care depind numai de $\psi(\zeta)$ şi $\omega(\zeta)$ — rămîn finite în punctul singular al frontierei ($\mathfrak{z} = 0$, sau punctul corespunzător $\zeta = -1$). Tensiunile în schimb tind la infinit în acest punct.

OBSERVAȚIA 2. Soluția a fost obținută presupunînd desigur că teorema de existență este valabilă. Întrucît apariția de tensiuni infinite nu are sens mecanic, aceasta înseamnă de fapt că teorema de existență este pusă sub semnul întrebării (vezi § 4,4, pag. 135). Soluția își păstrează totuși utilitatea practică — dacă se indică numai faptul că în vecinătatea punctului singular apar tensiuni atît de mari, încît ecuațiile elasticității liniare nu mai sînt respectate.

Fenomenul se manifestă întotdeauna în torsiunea barelor care prezintă pe frontiera secțiunii puncte unghiulare *intrînde*, și conduce la apariția de fisuri, sau de zone de deformație elasto-plastică. (Vezi și § 16, pag. 265–266).

OBSERVAȚIA 3. Raționamentele relative la cazul cardioidei rămîn ușor utilizabile în cazul oricărei funcții $\omega(\zeta)$ raționale.

c) Lemniscata lui Bernoulli

Acesta este un exemplu de problemă în care funcția de reprezentare *nu este rațională* ; anume, avem (vezi § A.8, exemplul *d*)

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = a(1+\zeta)^{1/2}, \quad \zeta = (\mathfrak{z}/a)^2 - 1. \tag{16}$$

Metoda $\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}$ nu conduce aci la soluție. Într-adevăr, obținem ușor

$$\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)} = a^2\,(\sqrt{\sigma} + 1/\sqrt{\sigma}), \tag{17}$$

dar funcția $\sqrt{\zeta}$ *nu* este olomorfă în $\mathcal{D}$, și deci soluția nu poate fi scrisă sub forma (17.15).

Nici metoda seriilor nu este indicată : ca metodă exactă, ea este depășită în eficacitate de metoda integralei de tip Cauchy ; ca metodă aproximativă ea nu e recomandabilă datorită prezenței punctului critic $\zeta = -1$ al reprezentării. (În cazul cardioidei, prezența aceluiași punct critic $\zeta = -1$ nu se făcea simțită, întrucît $\omega(\zeta)$ era un polinom.)

Ne rămîne la dispoziție metoda integralelor de tip Cauchy, care dă funcția de torsiune sub forma ce rezultă din (17.31) :

$$\psi(\zeta) = \frac{a^2}{2\pi}\oint_\gamma \frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma}}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \overline{\psi(0)}, \qquad \zeta \in \mathcal{D}^+. \tag{18}$$

Avem evident

$$\frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma}\,(\sigma-\zeta)} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma-\zeta} + \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma(\sigma-\zeta)}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\sigma\,(\sigma-\zeta)} = \frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{\sigma}\right), \tag{20}$$

astfel încît, considerînd integrala

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma, \tag{21}$$

rezultă că (18) ia forma, ce depinde numai de $f(\zeta)$:

$$\psi(\zeta) = ia^2\,\{f(\zeta) + \zeta^{-1}\,[f(\zeta) - f(0)]\} + \overline{\psi(0)}. \tag{22}$$

Funcţia $\sqrt{Z}/(Z - \zeta)$ (unde Z este o valoare curentă a variabilei ζ) are în $Д^+$ două sigularităţi : punctul critic algebric $Z = 0$, şi polul simplu $Z = \zeta \neq 0$. Efectuînd o tăietură în lungul semi-axei $O\xi_1$ negative de la frontiera γ la punctul critic $Z = 0$, putem aplica teorema reziduurilor relativ la domeniul astfel modificat. (Evident, şi alte tăieturi sînt posibile.) Pentru valoarea $\sqrt{\zeta}$ a reziduului relativ la polul $Z = \zeta$, obţinem astfel expresia

$$\sqrt{\zeta} = f(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{Z}}{Z - \zeta} dZ + \oint_{\gamma'} \frac{\sqrt{Z}}{Z - \zeta} dZ + \int_{0}^{-1} \frac{\sqrt{Z}}{Z - \zeta} dZ\right], \quad (23)$$

unde punctul de integrare Z parcurge conturul din prima figură A.5.2; γ' este arcul *def*; iar în integralele de pe cele două borduri ale tăieturii trebuie să ţinem seama de (A.5.45).

Întrucît avem $\zeta \neq 0$, integrala curbilinie pe γ' tinde la zero odată cu $\sqrt{|Z|}$. Obţinem deci, notînd [12] $Z = -T$ pe tăietură :

$$f(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_{1}^{0} \frac{i\sqrt{T}}{T + \zeta} dT + \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{1} \frac{-i\sqrt{T}}{T + \zeta} dT = \sqrt{\zeta},$$

de unde

$$f(\zeta) = \sqrt{\zeta} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{T}}{T + \zeta} dT. \quad (24)$$

Făcînd substituţiile $T = u^2$, $u = \zeta v$, avem

$$\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{T}}{T + \zeta} dT = 2 - 2\zeta\int_{0}^{1} \frac{du}{u^2 + \zeta} = 2\left[1 - \sqrt{\zeta}\ \mathrm{arctg}\ \frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right];$$

întrucît $\mathrm{arc\ tg}\ (1/\sqrt{\zeta}) = \pi/2 - \mathrm{arctg}\sqrt{\zeta}$, (24) devine

$$f(\zeta) = (2/\pi)\ [1 + \sqrt{\zeta}\ \mathrm{arc\ tg}\ \sqrt{\zeta}]. \quad (25)$$

Amintim aci dezvoltările în serie cunoscute, valabile pentru $|\zeta| \leqslant 1$:

$$\mathrm{arctg}\sqrt{\zeta} = \frac{1}{2i}\ln\frac{1 + i\sqrt{\zeta}}{1 - i\sqrt{\zeta}} = \sqrt{\zeta}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\zeta^h. \quad (26)$$

Ţinînd seama de (25) şi (26) în (22), obţinem mai întîi

$$\psi(\zeta) = \frac{2i a^2}{\pi}\frac{1 + \zeta}{\sqrt{\zeta}}\ \mathrm{arctg}\sqrt{\zeta} + \frac{2i a^2}{\pi} + \overline{\psi(0)},$$

---

[12]) A nu se confunda cu tensiunea complexă!

de unde, luînd $\zeta = 0$, obținem (abstracție făcînd de o constantă reală)

$$\psi(0) = 2\mathrm{i}\, a^2/\pi, \tag{27}$$

astfel că în definitiv avem

$$\psi(\zeta) = \frac{2\mathrm{i}\, a^2}{\pi} \frac{1+\zeta}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta}, \tag{28}$$

sau încă

$$\psi(\zeta) = \frac{a^2}{\pi} \frac{1+\zeta}{\sqrt{\zeta}} \ln \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{\zeta}}{1-\mathrm{i}\sqrt{\zeta}}, \tag{29}$$

sau în fine

$$\psi(\zeta) = \frac{2\mathrm{i}\, a^2}{\pi} (1+\zeta) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \zeta^h. \tag{30}$$

Expresia astfel determinată corespunde condițiilor $\operatorname{Re} \psi(0) = 0$, $f_0 = 0$. Prima din ele rezultă din (27). Pentru cea de a doua, se verifică ușor că $\psi(\sigma) - \overline{\psi(\sigma)} = (a^2/\pi)(\sqrt{\sigma} + 1/\sqrt{\sigma}) \ln(-1) = \mathrm{i}a^2(\sqrt{\sigma} + 1/\sqrt{\sigma}) = \mathrm{i}\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}$, unde am ținut seama că $\ln(-1) = \mathrm{i}\pi$.

Pentru a determina rigiditatea geometrică la torsiune, avem de calculat mărimile J_0 și $\operatorname{Re} C_1$. Obținem mai întîi din (A.7.32)

$$J_0 = -\frac{1}{8}\mathrm{i}a^4 \oint_{\gamma} (1 + \sigma^{-1})\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4}\pi a^4. \tag{31}$$

Pentru a face uz de formula (17.13), vom ține seama că din (28) urmează

$$2\mathrm{r}|_{\mathscr{L}} = \psi(\sigma) + \overline{\psi(\sigma)} = \frac{2\mathrm{i}\, a^2}{\pi} \frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma}} \left[2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sigma} - \frac{1}{2}\pi\right],$$

și deci, utilizînd dezvoltarea în serie (26):

$$\mathrm{r}|_{\mathscr{L}} = \frac{\mathrm{i}a^2}{2\pi}(1+\sigma)\left[-\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}} + 4\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1}\sigma^h\right]. \tag{32}$$

Aceasta este o funcție reală. Într-adevăr, să considerăm seria Fourier:

$$1/\sqrt{\sigma} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h \sigma^h, \tag{33}$$

de unde, înmulțind cu σ^{-j-1} și integrînd pe γ:

$$\oint_{\gamma} (\sigma^{-j-1}/\sqrt{\sigma})\, \mathrm{d}\sigma = c_j \oint_{\gamma} \sigma^{-1}\, \mathrm{d}\sigma = 2\pi\mathrm{i}\, c_j. \tag{34}$$

Pentru integrala din (34) avem pe rînd

$$M_h = \oint_{\gamma} (\sigma^h/\sqrt{\sigma})\, \mathrm{d}\sigma = 2\oint_{\gamma} \sigma^h\, \mathrm{d}\sqrt{\sigma} = 2\sigma^h\sqrt{\sigma}\Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} - 2h\oint_{\gamma} \sigma^{h-1}\sqrt{\sigma}\, \mathrm{d}\sigma,$$

unde pentru $\theta = \pi$ avem $\sigma = -1$ și $\sqrt{\sigma} = \mathrm{i}$, iar pentru $\theta = -\pi$ avem $\sigma = -1$ și $\sqrt{\sigma} = -\mathrm{i}$; prin urmare deducem $M_h = 2(-1)^h 2\mathrm{i} - 2h M_h$, ceea ce dă

$$M_h = \oint_\gamma (\sigma^h / \sqrt{\sigma})\,\mathrm{d}\sigma = \frac{4(-1)^h}{2h+1}\mathrm{i}, \qquad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{35}$$

și evident

$$M_{-h-1} = M_h. \tag{36}$$

Prin urmare, (33) devine

$$1/\sqrt{\sigma} = \frac{2}{\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \sigma^h, \tag{37}$$

astfel că dezvoltarea în serie (32) se poate pune sub forma — vizibil reală —

$$\begin{aligned} \mathrm{r}|_{\mathscr{L}} &= \frac{a^2}{\pi} \mathrm{i}\,(1+\sigma)\left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1}\sigma^h + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-h}}{2h-1}\sigma^{-h}\right] = \\ &= \frac{a^2}{\pi}\mathrm{i}\left[\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\sigma^h - \sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h-1}\sigma^h + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h-1}\sigma^{-h} - \right. \\ &\left. - \sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\sigma^{-h}\right] = -\frac{a^2}{\pi}\mathrm{i}\sum_{h=1}^{\infty}(-1)^h\left(\frac{1}{2h-1} - \frac{1}{2h+1}\right)(\sigma^h - \sigma^{-h}). \end{aligned} \tag{38}$$

Introducînd acum (16), (32) și (35) în (17.13), obținem

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{a^4}{4\pi}\mathrm{i}\oint_\gamma\left[-\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}} + 4\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h\sigma^h}{2h+1}\right]\frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma}}\,\mathrm{d}\sigma = \\ &= \frac{a^4}{4\pi}\mathrm{i}\left[-\pi\oint_\gamma\frac{1+\sigma}{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma + 4\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}(M_h + M_{h+1})\right] = \\ &= \frac{a^4}{4\pi}\mathrm{i}\left[-\pi\cdot 2\pi\mathrm{i} + 16\mathrm{i}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{2h+1}\left(\frac{1}{2h+1} - \frac{1}{2h+3}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ținînd seama de formulele 0.234.2 și 0.237.1 din I. Rîjik și I. Gradștein [1]:

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2, \qquad \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)(2h+3)} = \frac{1}{2}, \tag{39}$$

găsim așadar

$$C_1 = \frac{2}{\pi}a^4. \tag{40}$$

În definitiv, din (17.12) obținem astfel

$$C = (\pi/4 - 2/\pi)\,a^4 \cong 0{,}149\ a^4, \tag{41}$$

și cu aceasta problema este complet rezolvată.

Din (28) şi (17.10) avem de exemplu:

$$T(\zeta,\bar\zeta) = i\mu\tau\, a\left\{\sqrt{1+\zeta} - \frac{2}{\pi}\sqrt{1+\bar\zeta}\left[\frac{1}{\bar\zeta} + \frac{\bar\zeta - 1}{\bar\zeta\sqrt{\bar\zeta}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\bar\zeta}\right]\right\}. \tag{42}$$

Expresiile (28) şi (42) se transcriu uşor în planul fizic cu ajutorul reprezentării inverse din (16). În punctul critic $\zeta = -1$ (punct unghiular *ieşind*), atît deplasările cît şi tensiunile rămîn finite; mai mult, în acest punct avem chiar $U = u_3 = T = 0$ (Vezi şi § 16, pag. 266.)

d) Coroana eliptică. Concentrarea tensiunilor

Să considerăm funcţia din (A.8.17)

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = c\,(\zeta + \zeta^{-1}) \tag{43}$$

care reprezintă conform interiorul coroanei circulare de raze $\rho_0 > \rho_1 \geqslant 1$ date în (A.8.18), pe domeniul mărginit de două elipse confocale $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ (E. Deutsch [1]). Căutînd funcţia de torsiune sub forma seriei Laurent din (17.32) şi ţinînd seama de faptul că pe cercurile-frontieră avem

$$\zeta\,|_{\Lambda_1} = \rho_1\,\sigma, \quad \zeta\,|_{\Lambda_0} = \rho_0\,\sigma, \tag{44}$$

căpătăm din (17.33) următoarele două condiţii la limită $(j = 0,\ 1)$:

$$\operatorname{Im}\psi(\zeta)\,|_{\Lambda_j} = \frac{1}{2}c^2(\rho_j\,\sigma + \rho_j^{-1}\,\sigma^{-1})(\rho_j\,\sigma^{-1} + \rho_j^{-1}\,\sigma) + f_j, \tag{45}$$

unde f_0, f_1 sînt constantele lui Prandtl), de unde

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(b_n\,\rho_j^n - \bar b_{-n}\,\rho_j^{-n})\,\sigma^n = ic^2(\sigma^2 + \rho_j^2 + \rho_j^{-2} + \sigma^{-2}) + 2if_j. \tag{46}$$

Identificînd coeficienţii obţinem din aceste două condiţii, relaţiile:

$$\begin{aligned} n = 0:&\quad b_0 - \bar b_0 = ic^2\,(\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) + 2\,i\,f_0,\\ n = 1:&\quad b_1\,\rho_0 - \bar b_{-1}\,\rho_0^{-1} = 0,\\ n = 2:&\quad b_2\,\rho_0^2 - \bar b_{-2}\,\rho_0^{-2} = ic^2,\\ n \geqslant 3:&\quad b_n\,\rho_0^n - \bar b_{-n}\,\rho_0^{-n} = 0, \end{aligned} \tag{47}$$

precum şi relaţiile analoge ce se capătă dacă înlocuim aci ρ_0, f_0 cu ρ_1, f_1. (Pentru indici $n < 0$, se obţin relaţii complex conjugate cu cele din (47).)

Din a doua şi a patra relaţie (47), împreună cu relaţiile corespunzătoare lor pentru ρ_1, deducem evident

$$b_n = b_{-n} = 0 \quad \text{pentru } n \neq 0,\ \pm 2. \tag{48}$$

Alegînd $f_0 = 0$, prima relaţie (47) conduce la sistemul

$$b_0 - \bar b_0 = ic^2\,(\rho_0^2 + \rho_0^{-2}), \qquad b_0 - \bar b_0 = ic^2\,(\rho_1^2 + \rho_1^{-2}) + 2\,i\,f_1,$$

de unde
$$\operatorname{Im} b_0 = \frac{1}{2} c^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}), \tag{49}$$
$$f_1 = \frac{1}{2} c^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2} - \rho_1^2 - \rho_1^{-2}). \tag{50}$$

În fine, a treia relație (47) conduce la sistemul
$$b_2 \rho_0^2 - \bar{b}_{-2} \rho_0^{-2} = \mathrm{i}c^2, \quad b_2 \rho_1^2 - \bar{b}_{-2} \rho_1^{-2} = \mathrm{i}c^2,$$
de unde
$$b_2 = \mathrm{i}c^2/(\rho_1^2 + \rho_0^2), \quad b_{-2} = \mathrm{i}c^2 \rho_1^2 \rho_0^2/(\rho_1^2 + \rho_0^2). \tag{51}$$

Prin urmare, funcția de torsiune are expresia
$$\psi(\zeta) = \mathrm{i}\, c^2 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} [\zeta^2 + \rho_1^2 \rho_0^2 \zeta^{-2}] + \frac{1}{2} \mathrm{i}c^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}), \tag{52}$$
unde am neglijat constanta reală ne-esențială $\operatorname{Re} b_0$, și am ales $\operatorname{Im} b_0$ în așa fel încît $f_0 = 0$. Constanta f_1 a rezultat din calcul, și valoarea ei nu a fost necesară pentru determinarea coeficienților.

Pentru a calcula rigiditatea geometrică la torsiune, vom utiliza formulele (17.12), (17.13) — unde vom ține seama că de data aceasta frontiera $\mathscr{L}$ este alcătuită din *două* componente. Din (A.7.32) și (43) obținem acum (compară cu 17.23))
$$\begin{aligned} J_0 &= -\frac{1}{8} i \oint_{\Delta} \overline{[\omega(\zeta)]^2}\, \mathrm{d}[\omega(\zeta)]^2 = -\frac{1}{8} \mathrm{i}c^4 \oint_{\Delta} (\bar{\zeta} + \bar{\zeta}^{-1})^2\, \mathrm{d}(\zeta + \zeta^{-1})^2 = \\ &= -\frac{1}{4} \mathrm{i}c^4 \oint_{\Delta} (\rho^{-2}\sigma^2 + 2 + \rho^2\sigma^{-2})(\rho^2\sigma - \rho^{-2}\sigma^{-3})\, \mathrm{d}\sigma = \\ &= -\frac{1}{4} \mathrm{i}c^4 \oint_{\Delta} (\rho^4 - \rho^{-4})\sigma^{-1}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} \pi c^4 (\rho_0^4 - \rho_1^4 - \rho_0^{-4} + \rho_1^{-4}), \end{aligned} \tag{53}$$
unde am ținut seama că $\oint_{\gamma} \sigma^n\, \mathrm{d}\sigma = 0$ pentru $n \neq -1$.

Pentru a face uz de (17.13), deducem mai întîi din (52)
$$\mathrm{r}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \mathrm{i}c^2 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} [\zeta^2 - \bar{\zeta}^2 + \rho_1^2 \rho_0^2 \zeta^{-2} - \rho_1^2 \rho_0^2 \bar{\zeta}^{-2}]. \tag{54}$$

Întrucît din (43) avem — pentru $\rho = \text{const.}$ —
$$\mathrm{d}(\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}) = 2c^2 (\sigma - \sigma^{-3})\, \mathrm{d}\sigma,$$
obținem acum
$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C_1 &= \frac{1}{2} \mathrm{i}c^4 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} \oint_{\Delta} (\rho^2\sigma^2 - \rho^2\sigma^{-2} + \rho_1^2\rho_0^2\rho^{-2}\sigma^{-2} - \\ &\qquad - \rho_1^2\rho_0^2\rho^{-2}\sigma^2)(\sigma - \sigma^{-3})\, \mathrm{d}\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{i}c^4 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} \oint_{\Delta} (-\rho^2 + \rho_1^2\rho_0^2\rho^{-2} - \rho^2 + \rho_1^2\rho_0^2\rho^{-2})\sigma^{-1}\, \mathrm{d}\sigma = \\ &= 4\pi c^4 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} (\rho_0^2 - \rho_1^2). \end{aligned} \tag{55}$$

Prin urmare, avem

$$C = J_0 - \mathrm{Re}\ C_1 = \frac{1}{2}\pi c^4 (\rho_0^2 - \rho_1^2)\,[(\rho_0^2 + \rho_1^2)(1 + \rho_0^{-4}\rho_1^{-4}) - 8(\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1}]. \tag{56}$$

Cu aceasta problema este rezolvată. În cazul particular $\rho_1 = 1$, obținem soluția pentru domeniul mărginit de elipsa exterioară, cu o tăietură în lungul segmentului $[-2c, 2c]$ pe axa Ox_1.

Un raționament simplu permite găsirea de aci a funcției de torsiune pentru discul eliptic. Pentru aceasta, este suficient să ținem seama că funcția $\psi_{(1)}(\zeta)$ trebuie să fie olomorfă în discul eliptic — deci cu necesitate trebuie să poată fi prelungită analitic la traversarea tăieturii $[-2c, 2c]$. Mai departe, pentru aceasta este necesar ca ea să ia valori egale pe cele două borduri ale tăieturii. Întrucît pentru $\rho_1 = 1$ avem $\zeta|_{\Delta_1} = \sigma = \exp(i\theta)$, aceasta revine la a scrie

$$\psi(\sigma) = \psi(\bar{\sigma}). \tag{57}$$

În locul relațiilor ce se deduc din (47) prin înlocuirea lui ρ_0 cu ρ_1, trebuie să folosim deci acum egalitățile

$$b_n = b_{-n}. \tag{58}$$

Luînd $f_0 = 0$, obținem din (47) și (58)

$$\mathrm{Im}\ b_0 = \frac{1}{2} c^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}), \quad b_2\rho_0^2 - \bar{b}_2\rho_0^{-2} = ic^2, \tag{59}$$

toți ceilalți coeficienți b_n fiind nuli. Trecînd, în a doua relație (59), la cantități complex conjugate, obținem sistemul

$$\rho_0^4 b_2 - \bar{b}_2 = ic^2\rho_0^2, \qquad b_2 - \rho_0^4\bar{b}_2 = ic^2\rho_0^2,$$

de unde

$$b_2 = b_{-2} = ic^2\rho_0^2(1 + \rho_0^4)^{-1}. \tag{60}$$

Prin urmare, funcția de torsiune pentru discul eliptic este

$$\psi(\zeta) = ic^2\rho_0^2(1 + \rho_0^4)^{-1}[\zeta^2 + \zeta^{-2}] + \frac{1}{2}ic^2(\rho_0^2 + \rho_0^{-2}). \tag{61}$$

Ținînd seama de relațiile (vezi (A.8.18))

$$c^2 = \frac{1}{4}(a^2 - b^2), \quad \rho_0^2 = (a+b)/(a-b), \tag{62}$$

și introducînd (43) în soluția obținută prin mijloace elementare în (15.21), căpătăm tocmai expresia (61) a funcției de torsiune.

Soluția dedusă în acest mod pentru problema discului eliptic nu prezintă desigur interes în sine, ci numai ca *exemplu simplu de utilizare a prelungirii analitice*. Un exemplu nebanal în acest sens va fi considerat în § 6.18, ***b***.

Efectul tăieturii $[-2c, 2c]$ se manifestă atît prin scăderea rigidității (efect global), cît și prin apariția fenomenului de concentrare a tensiunilor (efect local).

Luînd în (56) $\rho_1 = 1$ şi utilizînd aci (62), obţinem pentru discul eliptic cu tăietura considerată

$$C = \frac{1}{4} \pi\, ab\, (a^2 + b^2) - \frac{1}{4} \pi\, (b/a)\, (a^2 - b^2)^2, \tag{63}$$

sau încă, ţinînd seama de formulele (15.24):

$$C = (D^2/2\pi) \sqrt{1 - k^2}\, (1 + k^2/2).$$

Comparaţia cu (15.25) arată că prezenţa fisurii micşorează rigiditatea geometrică la torsiune în raportul $1/(1 - k^2/4)$ (compară de pildă cu (15.53)) — aşadar pînă la cel mult 25% pentru $k \to 1$. În schimb concentrările de tensiuni sînt considerabile. Într-adevăr, introducînd (43) şi (61) în expresia (17.10) a tensiunii tangenţiale complexe, obţinem pentru discul eliptic

$$T(\zeta, \bar{\zeta}) = i \mu \tau c \left[- \frac{2\rho_0^2}{1 + \rho_0^4} \bar{\zeta} (1 + \bar{\zeta}^{-2}) + (\zeta + \zeta^{-1}) \right], \tag{64}$$

în timp ce pentru discul cu tăietura $[-2c, 2c]$ deducem din (52), pentru $\rho_1 = 1$:

$$T(\zeta, \bar{\zeta}) = i\mu \tau c \left[- \frac{2}{1 + \rho_0^2} \bar{\zeta} \frac{1 - \rho_0^2 \bar{\zeta}^{-2}}{1 - \bar{\zeta}^{-2}} + (\zeta + \zeta^{-1}) \right]. \tag{65}$$

În acest ultim caz, tensiunile devin infinite pentru $\zeta \to \pm 1$ (aşadar pentru $\mathfrak{z} \to \pm 2c$). Pentru domeniu mărginit de două elipse confocale, cea interioară corespunzînd unei valori $\rho_1 \cong 1$, în expresia lui $T(\zeta, \bar{\zeta})$ apare la numitor acelaşi factor $1 - \bar{\zeta}^{-2}$, care poate lua valori oricît de mici, pentru ρ_1 destul de apropiat de 1.

Cele spuse relativ la existenţa soluţiei în cazul cardioidei (pag. 287) rămîn şi aci valabile.

e) *Coroana circulară excentrică*

Să considerăm funcţia din (A.8.3)

$$\mathfrak{z} = \zeta / (1 - a\,\zeta), \tag{66}$$

care reprezintă interiorul unei coroane circulare pe cel al unei coroane circulare excentrice. Date fiind razele R_0, R_1 ale celor două cercuri, precum şi distanţa l_{01} dintre centrele lor, formulele (A.8.5), (A.8.6) permit să se determine parametrul a din (66), şi razele ρ_0, ρ_1 ale cercurilor concentrice din planul ζ.

Pentru a face uz de condiţia la limită (17.33), să calculăm întîi produsul

$$\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = \frac{1}{2} \rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \zeta^n \sum_{m=0}^{\infty} a^m \bar{\zeta}^m. \tag{67}$$

Ținînd seama că pe frontieră avem egalitățile (44), și notînd $n - m = \pm p$ după cum avem $n \gtrless m$, obținem ușor

$$\frac{1}{2}\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}\,\Big|_A = \frac{1}{2}\,\rho^2\left[A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p\,\sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} A_{-p}\,\sigma^{-p}\right], \tag{68}$$

unde

$$A_p = A_{-p} = (a\,\rho)^p/\,(1 - a^2\,\rho^2). \tag{69}$$

Căutînd soluția sub forma unei serii Laurent (17.32), deducem

$$\begin{aligned} b_0 - \overline{b}_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (b_p\,\rho_j^p - \overline{b}_{-p}\,\rho_j^{-p})\,\sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} (b_{-p}\,\rho_j^{-p} - \overline{b}_p\,\rho_j^p)\,\sigma^{-p} = \\ = [\mathrm{i}\,\rho_j^2/(1 - a^2\,\rho_j^2)]\left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} (a\,\rho_j)^p\,\sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} (a\,\rho_j)^p\,\sigma^{-p}\right] + 2\,\mathrm{i}\,f_j. \end{aligned} \tag{70}$$

Notînd cu a_j abscisa centrului cercului de rază R_j $(j = 0{,}1)$, deducem din (A.8.4):

$$\rho_j^2/(1 - a^2\,\rho_j^2) = a_j/a, \qquad \rho_j/(1 - a^2\,\rho_j^2) = R_j, \qquad j = 0{,}1. \tag{71}$$

Prin identificare, obținem mai întîi din (70) (pentru $p = 0$):

$$\operatorname{Im} b_0 = a_0/2\,a, \qquad f_1 = l_{01}/2a, \qquad f_0 = 0. \tag{72}$$

Pentru $p \geqslant 1$ căpătăm sistemul

$$b_p\,\rho_j^p - \overline{b}_{-p}\,\rho_j^{-p} = (\mathrm{i}a_j/a)\,(a\,\rho_j)^p, \quad j = 0{,}1, \tag{73}$$

de unde, notînd $k = \rho_1/\rho_0$:

$$b_p = \mathrm{i}\,a^{p-1}\,\frac{a_0 - a_1\,k^{2p}}{1 - k^{2p}}, \qquad b_{-p} = -\,\mathrm{i}\,a^{p-1}\,l_{01}\,\frac{\rho_1^{2p}}{1 - k^{2p}}\,. \tag{74}$$

Pentru $p < 0$ căpătăm un sistem identic cu (73).
Prin urmare, funcția de torsiune a problemei este

$$\psi(\zeta) = \frac{\mathrm{i}}{a}\left[\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_0 - a_1\,k^{2p}}{1 - k^{2p}}\,(a\,\zeta)^p - l_{01}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\rho_1^{2p}}{1 - k^{2p}}\left(\frac{a}{\zeta}\right)^p\right], \tag{75}$$

sau încă, adăugînd și scăzînd $a_0 k^{2p}$ la numărătorul primei serii din (75) și amintind că $a_0 - a_1 = l_{01}$:

$$\psi(\zeta) = \frac{\mathrm{i}}{a}\left\{a_0\,\frac{1 + a\,\zeta}{2\,(1 - a\,\zeta)} + l_{01}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{k^{2p}}{1 - k^{2p}}\,(a\,\zeta)^p - \frac{\rho_1^{2p}}{1 - k^{2p}}\left(\frac{a}{\zeta}\right)^p\right]\right\}. \tag{76}$$

Ținînd seama de inversa transformării (66), funcția de torsiune poate fi ușor transcrisă și prin intermediul variabilei $\mathfrak{z}$.
Determinarea rigidității geometrice la torsiune se face cu ajutorul formulelor (17.12), (17.13).

Momentul polar J_0 în axele corespunzătoare transformării (66) se poate deduce fie folosind formula (A.7.30) şi un raţionament similar celui din (17.23) — (17.27), fie cu ajutorul teoremei reziduurilor. Vom conveni să notăm cu indicele superior „0", respectiv „1", mărimile relative la cercul exterior, respectiv la cel interior. Aşadar, avem în general

$$J_0 = J_0^0 - J_0^1, \quad J_0^j = -\frac{1}{8}\,\mathrm{i}\oint_{\mathscr{L}_j} \bar{t}^2\, \mathrm{d}(t^2), \quad j = 0,1. \tag{77}$$

Din (A.7.25) avem $J_0^0 = I_0^0 + a_0^2 D_0$, şi o relaţie similară pentru cercul interior. Prin urmare (vezi (5.15.4), deducem

$$J_0^0 = \frac{1}{2}\pi\,(R_0^4 + 2\,a_0^2\,R_0^2), \qquad J_0^1 = \frac{1}{2}\pi\,(R_1^4 + 2\,a_1^2\,R_1^2). \tag{78}$$

Cu titlu de exerciţiu dăm şi raţionamentele ce fac uz de reprezentarea (66) şi de teorema reziduurilor. Din a doua formulă (77) avem mai întîi

$$J_0^0 = -\frac{1}{8}\,\mathrm{i}\oint_{\gamma}\left(\frac{\rho_0\,\bar\sigma}{1 - a\,\rho_0\,\bar\sigma}\right)^2 \mathrm{d}\left(\frac{\rho_0\,\sigma}{1 - a\,\rho_0\,\sigma}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\,\mathrm{i}\;\rho_0^4 \oint_{\gamma} \frac{\sigma}{(\sigma - a\,\rho_0)^2\,(1 - a\,\rho_0\sigma)^3}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{79}$$

Întrucît $a\rho_0 < 1$ (vezi § A.8, pag. 741), integrandul este valoarea la limită a unei funcţii ce posedă un pol dublu în punctul $\zeta = a\rho_0$. Formula (A.5.30) dă reziduul corespunzător, şi astfel rezultă

$$J_0^0 = \frac{1}{2}\pi\;\rho_0^4\,[(1 + 2\,a^2\,\rho_0^2)/(1 - a^2\,\rho_0^2)^4]. \tag{80}$$

Ţinînd seama de (71), aceasta coincide cu prima formulă (78). Pentru J_0^1, rezultatul este similar.

Pentru a uza de metoda seriilor, din (66) deducem mai întîi

$$z = \omega\,(\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} \omega_p\,\zeta^p, \qquad \omega_p = a^{p-1}, \tag{81}$$

astfel că (întrucît $\omega_0 = 0$):

$$z^2 = \sum_{n=2}^{\infty} E_n\,\zeta^n, \qquad E_n = \sum_{l=1}^{n-1} \omega_{n-l}\,\omega_l = (n-1)\,a^{n-2}. \tag{82}$$

Din (77) avem acum

$$J_0^0 = -\frac{1}{8}\,\mathrm{i}\oint_{\gamma}\left(\sum_{n=2}^{\infty} E_n\,\rho_0^n\,\sigma^{-n}\right)\mathrm{d}\left(\sum_{m=2}^{\infty} E_m\,\rho_0^m\,\sigma^m\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\pi \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)^2\,a^{2(n-2)}\,\rho_0^{2n}, \tag{83}$$

şi o expresie similară pentru J_0^1.

Pentru a suma seria din (83), procedăm precum urmează. Să considerăm seria

$$A(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)^2 x^{n-2} = \left[\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^n\right]'' . \tag{84}$$

Pentru seria din paranteză, avem vizibil

$$B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^n = x \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^{n-1} = x\, C(x), \tag{85}$$

unde

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = x\left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right]' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} . \tag{86}$$

Introducînd (85) şi (86) în (84), căpătăm imediat

$$A(x) = [x^2(1-x)^{-2}]'' = 2(1+2x)(1-x)^{-4}. \tag{87}$$

Ţinînd seama de (84) şi (87) în (83), deducem din nou

$$J_0^0 = \frac{1}{4}\pi \rho_0^4 A(a^2 \rho_0^2) = \frac{1}{2}\pi \rho_0^4 (1 + 2a^2 \rho_0^2)(1 - a^2 \rho_0^2)^{-4}. \tag{88}$$

Să trecem acum la calculul integralei Re C_1 — realizabil numai prin metoda seriilor. Ţinînd seama de (17.13), (75), (68) şi (69) avem pe cercul exterior:

$$\operatorname{Re} C_1^0 = \frac{i}{4a} \oint_{\gamma} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_0 - a_1 k^{2p}}{1 - k^{2p}} a^p \rho_0^p + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\rho_1^{2p}}{1 - k^{2p}} a^p \rho_0^{-p}\right] (\sigma^p - \sigma^{-p}) \times$$

$$\times\, \rho_0^2 (1 - a^2 \rho_0^2)^{-1} \sum_{q=1}^{\infty} a^q \rho_0^q (q\sigma^{q-1} - q\sigma^{-q-1})\, d\sigma, \tag{89}$$

şi după integrare (întrucît p şi q sînt pozitivi, numai termenii pentru $p = q$ sînt ne-nuli):

$$\operatorname{Re} C_1^0 = \frac{\pi}{a} \frac{\rho_0^2}{1 - a^2 \rho_0^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} p \frac{a_0 - a_1 k^{2p}}{1 - k^{2p}} (a^2 \rho_0^2)^p + \right.$$

$$\left. + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{1}{1 - k^{2p}} (a^2 \rho_1^2)^p \right]. \tag{90}$$

Un calcul similar dă pe cercul interior

$$\operatorname{Re} C_1^1 = \frac{\pi}{a} \frac{\rho_1^2}{1 - a^2 \rho_1^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} p \frac{a_0 - a_1 k^{2p}}{1 - k^{2p}} (a^2 \rho_1^2)^p + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{1}{1 - k^{2p}} (a^2 \rho_1^2)^p \right]. \tag{91}$$

Adăugînd și scăzînd $a_0 k^{2p}$ la numărătorul primei serii din (90) (și din (91)), căpătăm factorul $a_0 + l_{01} k^{2p}/(1-k^{2p})$. Ținînd încă seama de formulele (71), obținem

$$\operatorname{Re} C_1 = \frac{\pi a_0}{a^2}\left[a_0 \sum_{p=1}^{\infty} p\,(a^2 \rho_0^2)^p + 2\,l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p\,\frac{(a^2 \rho_1^2)^p}{1-k^{2p}}\right] -$$

$$-\frac{\pi a_1}{a^2}\left[a_0 \sum_{p=1}^{\infty} p\,(a^2 \rho_1^2)^p + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p\,\frac{(a^2 k^2 \rho_1^2)^p}{1-k^{2p}} + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p\,\frac{(a^2 \rho_1^2)^p}{1-k^{2p}}\right]. \tag{92}$$

În (92) apare din nou seria (86), și trei serii de forma

$$D(x) = \sum_{p=1}^{\infty} p\,\frac{x^p}{1-k^{2p}} = \sum_{p=1}^{\infty} p\,x^p + \sum_{p=1}^{\infty} p\,(k^2 x)^p + \sum_{p=1}^{\infty} p\,(k^4 x)^p + \cdots$$

$$= C(x) + C(k^2 x) + C(k^4 x) + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{k^2 x}{(1-k^2 x)^2} +$$

$$+ \frac{k^4 x}{(1-k^4 x)^2} + \cdots$$

de unde

$$D(x) = \sum_{p=1}^{\infty} p\,\frac{x^p}{1-k^{2p}} = x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^{2p}}{(1-k^{2p}x)^2}. \tag{93}$$

Ținînd seama în (92) de (86) și (93), avem deci

$$\operatorname{Re} C_1 = (\pi\, a_0/a^2)\,[a_0 C\,(a^2 \rho_0^2) + 2 l_{01} D\,(a^2 \rho_1^2)] -$$

$$-(\pi a_1/a^2)\,[a_0 C(a^2 \rho_1^2) + l_{01} D\,(a^2 k^2 \rho_1^2) + l_{01} D\,(a^2 \rho_1^2)].$$

Utilizînd (86) și (71), avem mai întîi

$$C\,(a^2 \rho_0^2) = a^2 \rho_0^2/(1-a^2 \rho_0^2)^2 = a^2 R_0^2, \quad C(a^2 \rho_1^2) = a^2 R_1^2,$$

ș i prin urmare

$$\operatorname{Re} C_1 = \pi a_0^2 R_0^2 - \pi a_0 a_1 R_1^2 + 2\pi l_{01} a_0 \rho_1^2 \sum_{p=0}^{\infty} [k^{2p}/(1-a^2 k^{2p} \rho_1^2)^2] -$$

$$-\pi l_{01} a_1 k^2 \rho_1^2 \sum_{p=0}^{\infty} [k^{2p}/(1-a^2 k^{2p+2} \rho_1^2)^2] -$$

$$-\pi l_{01} a_1 \rho_1^2 \sum_{p=0}^{\infty} [k^{2p}/(1-a^2 k^{2p} \rho_1^2)^2]. \tag{94}$$

Să separăm în prima și a treia serie din (94) termenii corespunzători lui $p = 0$, și să înlocuim în a doua serie pe $(p+1)$ prin p — ceea ce face ca limita inferioară de sumare să devină $p = 1$. Scăzînd suma ultimelor

două serii (acum vizibil egale) din cea dintîi, şi ţinînd seama că $a_0 - a_1 = l_{01}$, se pune în evidenţă un factor $2\pi l_{01}^2 \rho_1^2$, care înmulţeşte aceeaşi serie, sumată de la 1 la ∞. Termenii rămaşi din prima şi a treia serie pentru $p = 0$ vor fi

$$(2\pi l_{01} a_0 - \pi l_{01} a_1)\,[\rho_1^2/(1 - a^2\rho_1^2)^2] = 2\pi l_{01} a_0 R_1^2 - \pi l_{01} a_1 R_1^2 = \\ = 2\pi l_{01}^2 R_1^2 + \pi l_{01} a_1 R_1^2. \tag{95}$$

După efectuarea tuturor acestor operaţii, (94) devine

$$\operatorname{Re} C_1 = \pi a_0^2 R_0^2 - \pi a_0 a_1 R_1^2 + 2\pi l_{01}^2 \rho_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} [k^{2p}/(1 - a^2 k^{2p}\rho_1^2)^2] + \\ + 2\pi l_{01}^2 R_1^2 + \pi l_{01} a_1 R_1^2. \tag{96}$$

Cu ajutorul expresiilor J_0^0, J_0^1 din (78) şi al valorii $\operatorname{Re} C_1$ din (96), putem calcula acum rigiditatea $C = J_0 - \operatorname{Re} C_1$. Grupînd termenii ce provin din J_0, cu primul, al doilea, şi ultimul termen din $\operatorname{Re} C_1$, căpătăm formula finală

$$C = \frac{1}{2}\pi(R_0^4 - R_1^4) - 2\pi l_{01}^2 R_1^2 - 2\pi l_{01}^2 \rho_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} [k^{2p}/(1 - a^2 k^{2p}\rho_1^2)^2]. \tag{97}$$

Formulele (76) şi (97) permit să se aprecieze gradul de precizie al rezultatelor experimentale obţinute pentru aceeaşi problemă, cu ajutorul analogiei lui Prandtl (vezi § 16, exemplul h).

OBSERVAŢIA 4. Cazul în care cercul interior nu este gol, ci este ocupat de un material cu *alte* constante elastice, a fost studiat — practic vorbind, pe aceeaşi cale — de către I. Vekua şi A. Ruhadze [1], ale căror formule finale sînt reproduse de N. Mushelişvili [5], § 140 a.

f) Domenii reprezentabile conform pe discul unitate prin intermediul unor funcţii polinomiale. (Soluţii aproximative)

După cum am văzut în § 17, soluţia se obţine uşor dacă funcţia $\omega(\zeta)$ este un polinom. În foarte multe cazuri, cînd funcţia $\omega(\zeta)$ nu este cunoscută exact, sau are o formă complicată, pot fi utilizate funcţii care reprezintă conform discul unitate (sau o coroană circulară) nu pe domeniul $\mathscr{D}$ considerat, ci pe un domeniu apropiat lui. În acest sens, vezi indicaţiile din §§ A.6—A.8. Aci ne vom limita la a prezenta un exemplu.

Funcţia care reprezintă conform discul-unitate pe interiorul elipsei are o structură extrem de complicată (vezi (A.8.24)). Să considerăm elipsa

$$\frac{3}{4}x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 = 1, \tag{98}$$

şi funcţia care realizează reprezentarea conformă aproximativă dată în (A.8.26):

$$\omega_r(\zeta) = 0{,}99\ (\zeta + 0{,}12\ \zeta^3 + 0{,}03\ \zeta^5 + 0{,}01\ \zeta^7). \tag{99}$$

Din (17.16), (17.19) şi (17.24) obţinem valorile

$$\omega_1 = 0{,}99\,;\ \omega_3 = 0{,}12\,;\ \omega_5 = 0{,}03\,;\ \omega_7 = 0{,}01\,;$$

$$2B_0 = 0{,}99\,;\ B_2 = 0{,}12\,;\ B_4 = 0{,}03\,;\ B_6 = 0{,}01\,;$$

$$E_2 = 0{,}98\,;\ E_4 = 0{,}24\,;\ E_6 = 0{,}07\,;\ E_8 = 0{,}03,$$

unde am reţinut în calcule numai primele două zecimale. Celelalte constante sînt nule sau neglijabile. Din (17.22) şi (17.29) deducem acum

$$\psi(\zeta) = i\ (0{,}5 + 0{,}12\ \zeta^2 + 0{,}03\ \zeta^4 + 0{,}01\ \zeta^6), \quad C = 1{,}61. \tag{100}$$

Pentru a evalua precizia acestei soluţii, să o comparăm cu soluţia exactă. Pentru discul eliptic definit de frontiera (98), avem din (15.21) şi (15.12)

$$\psi_{(1)}(\mathfrak{z}) = i\,(0{,}5 + 0{,}125\,\mathfrak{z}^2), \quad C = 2\pi/\sqrt{15} \cong 1{,}62. \tag{101}$$

Or, introducînd în (101) funcţia de reprezentare (99), obţinem exact funcţia din (100).

Pentru acelaşi disc, căpătăm din (61) soluţia

$$\psi(\zeta) = i\ (0{,}017\ \zeta^2 + 0{,}017\ \zeta^{-2} + 0{,}533), \tag{102}$$

în timp ce pentru discul eliptic cu o tăietură între focare deducem, luînd $\rho_1 = 1$ în (52):

$$\psi(\zeta) = i\ (0{,}015\ \zeta^2 + 0{,}118\,\zeta^{-2} + 0{,}533). \tag{103}$$

Deosebirea dintre formulele (100) şi (102) se datoreşte, evident, faptului că în cea dintîi avem $|\zeta| \leqslant 1$, iar în cea de a doua $1 \leqslant |\zeta| \leqslant \rho_0 = \sqrt{4 + \sqrt{15}} = 2{,}805$ (disc, respectiv coroană circulară).

Dacă frontiera $\mathscr{L}$ prezintă puncte unghiulare — aşadar dacă funcţia $\omega(\zeta)$ are zerouri ale derivatei sau puncte singulare pe γ (sau pe frontiera coroanei circulare), metoda pierde mult din eficacitate, sau devine chiar inutilizabilă.

Astfel, în locul funcţiei $\mathfrak{z} = a(1 + \zeta)^{1/2}$ ce reprezintă conform discul unitate pe interiorul buclei de lemniscată Bernoulli, putem încerca să utilizăm reprezentarea aproximativă ce rezultă din (A.8.60). Înlocuind funcţia (16) cu această din urmă funcţie, coeficienţii B_n vor fi obţinuţi numai aproximativ; coeficienţii E_n sînt exacţi pînă la un indice n egal cu gradul polinomului ce înlocuieşte funcţia $\omega(\zeta)$. (Pentru comparaţie, valorile exacte ale tuturor acestor coeficienţi se pot căpăta introducînd (16) în (17.18) şi (17.25).) Reţinînd în polinomul din (A.8.60) primii 5, respectiv toţi cei 7 termeni calculaţi, obţinem pentru rigiditatea C valorile aproximative $0{,}141\ a^4$, respectiv $0{,}147\ a^4$, în timp ce valoarea exactă dată în (41) este $0{,}149\ a^4$. Prezenţa punctului singular $\zeta = -1$ nu alterează sensibil (în acest caz!) valoarea C; aceasta se datoreşte faptului că punctului singular îi corespunde pe $\mathscr{L}$ un punct unghiular *ieşind*, astfel că (în cazul torsiunii) calculul conduce la neglijarea unei zone în care tensiunile nu contribuie

substanţial la valoarea totală a lui $\mathcal{M}_3$— şi deci şi a lui C. Pentru un punct unghiular *intrînd*, diferenţele pot fi considerabile.

În ce priveşte calculul tensiunilor, el este iluzoriu în vecinătatea punctului singular : importanta modificare a frontierei domeniului-imagine ce rezultă din înlocuirea funcţiei exacte (16) prin cea aproximativă (A.8.60) (vezi fig. A.8.7) arată aceasta în mod evident.

Observaţii asemănătoare se pot face relativ la problema torsiunii pentru domenii poligonale. Metode mai eficace pentru reprezentarea conformă aproximativă sînt indicate la finele § A.6, pag. 733.

g) *Alte metode şi tipuri de probleme*

O sistematizare a imensei literaturi existente asupra torsiunii nu intră în scopurile noastre. Indicăm însă aci unele probleme, metode şi articole.

Deplin justificată pentru studiul teoretic al problemei, metoda reprezentării conforme îşi pierde eficacitatea în multe cazuri practice.

Pentru domenii *simplu conexe*, această eficacitate depinde direct de posibilitatea realizării reprezentării conforme cu ajutorul unor expresii polinomiale cu relativ puţini termeni. Pentru diferite dificultăţi ce se ridică în această direcţie, precum şi pentru compararea posibilităţilor a diferite metode aproximative, vezi H. Poritsky şi C. Danforth [1]. Pentru alte indicaţii asupra aceleeaşi teme, vezi finele § A.6.

În cazul domeniilor *dublu conexe*, determinarea funcţiei de reprezentare este încă mai complicată. Aceste dificultăţi cresc şi mai mult atunci cînd componentele frontierei sînt foarte apropiate într-o porţiune oarecare : în acest caz apar inevitabil puternice concentrări ale tensiunilor, şi se constată o lentă convergenţă a seriilor Laurent ce dau soluţia în coroana circulară, imagine a secţiunii. Pentru astfel de probleme, au fost folosite cu succes metodele teoriei ecuaţiilor integrale : vezi S. Mihlin [1], partea a II-a, capitolul 1 ; D. Şerman [7]. Vezi şi D. Şerman [8], § 2.1, (cu indicaţii critice şi bibliografice detailate) şi monografia [9] a aceluiaşi autor. Aplicarea unor astfel de metode în cazul (mai complicat) al problemei plane este schiţată mai jos, în §§ 6.23 şi 6.24.

Cazul domeniilor cu puncte unghiulare pe frontieră prezintă dificultăţi suplimentare. Pentru anumite domenii *poligonale* (regulate sau nu, simplu conexe sau dublu conexe) şi mai ales pentru domenii uşor de descompus în cîteva dreptunghiuri şi triunghiuri (profile în **T**, în **I**, în cruce etc.), N. Arutiunian [2] a elaborat o metodă de abordare directă a problemei prin suprapunere a soluţiilor corespunzînd fiecăreia din componentele lui $\mathscr{D}$. Aceasta conduce întotdeauna la rezolvarea unor sisteme infinite de ecuaţii algebrice liniare, care se dovedesc a fi complet regulate. Rezultatele lui B. Abramian, E. Alexandrian, A. Babloian, N. Gulkanian, pentru diferite domenii simplu conexe şi dublu conexe de acest tip, sînt citate şi expuse în monografia lui N. Arutiunian şi B. Abramian [1]. (Pentru istoricul chestiunii, vezi loc. cit., § 3.3.) Metoda este folosită şi de A. Bojenko [1], [2], E. Deutsch [3], [5] etc. Toate aceste rezultate permit compararea soluţiei exacte cu soluţiile aproximative obţinute prin metodele schiţate în § 16, exemplele *f*, *g* şi *i*, şi dau adesea şi concluzii privitoare la concentrarea tensiunilor în vecinătatea unghiurilor intrînde.

Pentru alte tipuri de domenii, notăm aci unele soluţii relativ simple, obţinute de M. Abassi [1]; W. Bassali [1], [2]; L. Hamburger et al. [1]; A. Herzig [1]; C. Iacob [2],

Calculele care au dus la formulele (8), (12) sînt mai simple decît cele ce au permis stabilirea formulelor corespunzătoare (5.8.10), (5.8.32). Formulele înseşi au un aspect mai simplu — dar în fapt o structură considerabil mai complicată : în locul termenilor polinominali din expresiile menţionate, apare aci o *a doua funcţie necunoscută*. Problema este deci *calitativ* mai complicată decît cea antiplană — beneficiind totuşi de metode de studiu apropiate. Acest paralelism constituie unul din avantajele esenţiale ale utilizării potenţialilor complecşi în problemele plane şi antiplane.

Funcţiile lui Kolosov şi Musheli̇şvili sînt potenţiali de deplasare, şi prezintă deci în raport cu funcţia lui Airy aceleaşi avantaje ca cele ale funcţiei lui Capildeo şi Milne-Thomson faţă de funcţiile lui Prandtl şi Timoshenko (vezi § 5.12, pag. 222, şi § 5.19, pag. 303).

Să calculăm acum componentele vectorului $\boldsymbol{\sigma}_n$ pe un element de suprafaţă cilindric, avînd drept curbă directoare o curbă $\mathscr{C}$ din $\mathscr{D}$, definită de normala sa $\boldsymbol{n}$. Ţinînd seama de (A.3.12) în (4.8) (relaţii valabile pe $\mathscr{C}$, şi nu numai pe $\mathscr{L}$) şi utilizînd şi (6.13), căpătăm pe rînd

$$\begin{aligned}\sigma_{n1} + \mathrm{i}\sigma_{n2} &= [\sigma_{11}x_2'(s) - \sigma_{12}x_1'(s)] + \mathrm{i}\,[\sigma_{12}x_2'(s) - \sigma_{22}x_1'(s)] = \\ &= (\sigma_{11} + \mathrm{i}\,\sigma_{12})x_2'(s) - (\sigma_{12} + \mathrm{i}\,\sigma_{22})x_1'(s) = \\ &= \frac{1}{2}(S_0 - \overline{S})\,x_2'(s) - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(S_0 + \overline{S})\,x_1'(s) = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\,[S_0\,z'(s) + \overline{S}\,\overline{z'(s)}],\end{aligned} \tag{14}$$

astfel că, introducînd aci expresiile (8), urmează

$$\sigma_{n1} + \mathrm{i}\,\sigma_{n2} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\{2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]z'(s) + 2[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}]\,\overline{z'(s)}\}. \tag{15}$$

Dar întrucît avem evident

$$(\varphi' + \overline{\varphi'})_{,\bar{z}} = (z\overline{\varphi}'' + \overline{\psi}')_{,z},$$

rezultă că expresia (15) este derivata în raport cu arcul s a unei anumite funcţii de z, $\bar{z}$. Notînd

$$S_0 = 2(\varphi' + \overline{\varphi}') = K_{,z}, \quad \overline{S} = 2(z\overline{\varphi}'' + \overline{\psi}') = K_{,\bar{z}}, \tag{16}$$

deducem uşor

$$K(z, \bar{z}) = 2(\varphi + z\,\overline{\varphi}' + \overline{\psi}), \tag{17}$$

astfel că (15) devine

$$\sigma_{n1} + \mathrm{i}\,\sigma_{n2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{i}K_{,s}, \tag{18}$$

sau încă

$$\sigma_{n1} + \mathrm{i}\,\sigma_{n2} = -\,\mathrm{i}[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_{,s}. \tag{19}$$

§ 19. ÎNCOVOIEREA ÎN CONSOLĂ

a) *Încovoiere și torsiune*

Vom trece acum la cazul general $R \neq 0$ cînd — după cum am văzut în § 9 — secțiunile sînt supuse simultan la alunecare, încovoiere, și torsiune. Soluția acestei probleme este dată în (8.3), (8.10), (8.32) și încă în (8.3), (12.6). Pentru scrierea efectivă a deplasărilor și a tensiunilor este deci necesară cunoașterea funcțiilor φ sau F (ultima din ele prezentînd dezavantajele menționate în § 12, pag. 222), și a coeficienților α și τ.

O bară supusă la încovoiere sub acțiunea sarcinilor tangențiale se numește *bară în consolă*, sau, pe scurt, *consolă*.

Problema consolei duce deci la studiul problemelor la limită (11.1), (11.2) sau (11.3) pentru funcția $\varphi(\mathfrak{z})$, respectiv a problemei (12.7), (12.9) pentru funcția $F(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ — așadar al unor probleme *de același tip* cu cele ce apar în cazul torsiunii (vezi (13.3) — (13.5), respectiv (14.2), (14.3)). Prin urmare, *problema consolei apare ca mai dificilă din punctul de vedere al calculului, dar principial cu nimic deosebită de cea a torsiunii*, și beneficiază deci *de aceleași metode de cercetare*. Analogia este deplină în cazul utilizării funcției lui Capildeo și Milne-Thomson, ceea ce, împreună cu cele arătate la pag. 222, constituie încă un avantaj al acestei funcții față de cea a lui Prandtl și Timoshenko [13]).

Cu toată această asemănare de principiu, unele din caracteristicele *mecanice* importante ale stării de torsiune nu mai apar în încovoierea în consolă. Astfel, din (8.32) rezultă evident că frontiera $\mathscr{L}$ *nu rămîne* nemodificată în planul ei. De asemenea, funcția $|T|^2$ *nu este* în general sub-armonică, și deci nu se poate afirma că maximul ei ar fi atins pe frontieră. (Vezi și § 20, pag. 331.) Rezultate semnificative în această chestiune aparțin lui G. Polojii [3].

Vom examina în §§ 20—22 unele metode și exemple de studiu, mult simplificate datorită celor deja cunoscute privitor la torsiune.

În paragraful de față, ne vom opri asupra caracterizării stării elastice a consolei (completînd cele spuse în § 10), și asupra determinării parametrilor constanți ce definesc această stare.

Fie așadar că sarcina pe baza $x_3 = l$ este static echivalentă cu o forță de componente $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ aplicată în centrul de reducere $\mathfrak{z}_r$, *plus* un cuplu de moment $\mathcal{M}_3$ în raport cu acest centru. Dacă $\mathfrak{z}_r$ este situat în originea axelor în $\mathscr{D}$, atunci $\mathcal{M}_3$ se notează $\mathcal{M}_3^0$.

Punctele în raport cu care avem $\mathcal{M}_3 = 0$, formează axa centrală a sistemului de sarcini. Notînd cu $\mathfrak{z}_a$ afixul unui punct curent pe axa centrală, obținem din (2.3)

$$\mathcal{R}_2 x_1^a - \mathcal{R}_1 x_2^a - \mathcal{M}_3^0 = 0\,, \tag{1}$$

---

[13]) Menționăm încă metoda clasică a lui B. de Saint-Venant [2], prezentată în toate tratatele de teoria elasticității (A. Love [1], I. Sokolnikoff [2] etc.) — dar nemaiavînd azi decît un interes pur istoric.

sau încă (vezi (8.12)):

$$\mathcal{M}_3^0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(\bar{R}\,z_a - R\,\bar{z}_a). \tag{2}$$

Dacă valorile $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{M}_3^0$ sînt *date*, relațiile (1) sau (2) pot fi privite ca *ecuații ale axei centrale* în $\mathcal{D}$. Dimpotrivă, dacă centrul de reducere este ales pe axa centrală și deci sistemul este considerat ca redus la o forță unică R aplicată în z_a și dirijată în lungul axei, atunci (1), (2) trebuie privite ca *definind* valoarea $\mathcal{M}_3^0$ a momentului față de origine, ca funcție de afixul z_a al punctului de aplicare a forței R. Deplasarea acestui punct în lungul suportului vectorului R (care coincide acum cu axa centrală) nu modifică desigur momentul $\mathcal{M}_3^0$.

b) Gradul de torsiune la încovoiere. Rigidități

În § 9 am văzut că stările de alunecare și încovoiere sînt caracterizate prin relațiile elementare (9.1) și (9.3). Ținînd seama și de (4.12) rezultă că parametrii ce definesc stările de încovoiere și alunecare sînt cunoscuți, iar valorile lor sînt independente de $\mathcal{M}_3^0$ sau de punctul de aplicare al forței R.

Cunoașterea stării de torsiune, caracterizată în (9.4), necesită determinarea parametrului τ, pe care-l vom numi pe scurt (deși nu deplin corect dacă $z_0 \neq 0$) *grad de torsiune la încovoiere.*

Cunoașterea lui τ permite aprecierea contribuției funcțiilor de torsiune în funcția de încovoiere. Într-adevăr, din (12.7), (12.9) rezultă (vezi și mai jos (27)):

$$\mathsf{F} = \mu\,\tau\,\mathsf{f} + \widetilde{\mathsf{F}}, \tag{3}$$

unde f este funcția lui Prandtl din (14.2), (14.3), iar $\widetilde{\mathsf{F}}$ verifică

$$\Delta\widetilde{\mathsf{F}} = -\frac{1+2\nu}{2(1+\nu)}\,\mathrm{i}\,(\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}) \ \text{ în } \ \mathcal{D}, \tag{4}$$

$$\widetilde{\mathsf{F}}\big|_{\mathcal{L}_j} = \frac{1}{4}\,\mathrm{i}c\int_0^s (\bar{t}\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}\bar{t}) - \frac{1}{4}\,\mathrm{i}\int_0^s t\bar{t}\,(\bar{\alpha}\,\mathrm{d}t - \alpha\,\mathrm{d}\bar{t}) + \mu\widetilde{F}_j$$

($\widetilde{F}_j$ — constante necunoscute, dar nu arbitrare). Desigur, în cazul torsiunii avem $\widetilde{\mathsf{F}} = 0$. Relații similare se pot scrie și cu ajutorul funcțiilor $\varphi(z)$ și $\psi(z)$.

Pentru determinarea lui τ, amintim formula (8.14):

$$\mathcal{M}_3^0 = \mu\tau J_0 - \frac{1-2\nu}{8(1+\nu)}\,\mathrm{Im}\left[\alpha\iint_{\mathcal{D}} z\bar{z}^2\,\mathrm{d}D\right] - \mu\,\mathrm{Im}\iint_{\mathcal{D}} z\varphi'(z)\mathrm{d}D,$$

care dă pe τ ca funcție de $\mathscr{M}_3^0$ (și deci, în cazul unei forțe unice aplicate în $\mathfrak{z}_a$, ca funcție de poziția acestui punct[14])). Faptul însă că aci intervine funcția $\varphi(\mathfrak{z})$, la rîndul ei depinzînd de τ, complică natura relației dintre $\mathscr{M}_3^0$ și τ.

În cele ce urmează, vom da formule mai simple pentru determinarea lui τ (L. Solomon [8], [9]). În acest scop, să remarcăm că întrucît $\varphi(\mathfrak{z}) = \mathrm{p} + i\mathrm{q}$, iar funcțiile p și q sînt armonic conjugate, putem scrie

$$\operatorname{Im}[\mathfrak{z}\,\varphi'(\mathfrak{z})] = (\mathrm{p}x_2)_{,1} - (\mathrm{p}x_1)_{,2}. \tag{5}$$

Introducînd (5) în formula (8.14) mai sus reprodusă, și utilizînd formula lui Riemann (A.3.18), obținem

$$\mathscr{M}_3^0 = \mu\tau J_0 - \frac{1-2\nu}{8(1+\nu)}\operatorname{Im}\left[\alpha\iint_{\mathscr{D}}\mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}}^2\,\mathrm{d}D\right] - \mu\oint_{\mathscr{L}}\mathrm{p}(x_2n_1 - x_1n_2)\,\mathrm{d}s, \tag{6}$$

sau încă, ținînd seama de condiția la limită (13.4) pentru $\mathrm{r}(x_1, x_2)$, și de a treia formulă a lui Green (vezi mai departe (7.2.12)) pentru funcțiile armonice p și r:

$$\mathscr{M}_3^0 = \mu\tau J_0 - \frac{1-2\nu}{8(1+\nu)}\operatorname{Im}\left[\alpha\iint_{\mathscr{D}}\mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}}^2\mathrm{d}D\right] - \mu\oint_{\mathscr{L}}\mathrm{r}\,\mathrm{p}_{,n}\,\mathrm{d}s, \tag{7}$$

unde valoarea la limită a derivatei normale $p_{,n}$ este cunoscută din (11.2).

Să considerăm acum integralele (vezi și (17.13))

$$C_1 = \oint_{\mathscr{L}}\mathrm{r}\,\bar{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt},\quad C_2 = \oint_{\mathscr{L}}\mathrm{r}\,\bar{\mathrm{t}}^2\,\mathrm{dt},\quad C_3 = \oint_{\mathscr{L}}\mathrm{r}\,\mathrm{t}\,\bar{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} \tag{8}$$

și — utilizînd și formula complexă a lui Stokes (A.4.29) —:

$$C_4 = \oint_{\mathscr{L}}\mathrm{t}^2\,\bar{\mathrm{t}}^2\,\mathrm{dt} = 4i\iint_{\mathscr{D}}\mathfrak{z}^2\bar{\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}D. \tag{9}$$

Introducînd acum (11.2) în (7) și ținînd seama și de expresia (17.12) a rigidității geometrice la torsiune, obținem după calcule elementare formula

$$\mathscr{M}_3^0 = \mu\tau C + \frac{1}{2}c\operatorname{Im}C_1 - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\operatorname{Im}(\alpha C_2) -$$
$$-\frac{1}{4(1+\nu)}\operatorname{Im}(\bar{\alpha}C_3) - \frac{1-2\nu}{32(1+\nu)}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}C_4). \tag{10}$$

Pentru determinarea lui τ este deci suficientă cunoașterea funcției $\psi(\mathfrak{z})$, și chiar numai a valorilor la limită ale lui $\operatorname{Re}\psi(\mathfrak{z})$. În cazul torsiunii (10) se reduce la (13.15).

---

[14]) Amintim că R este un vector glisant. Prin urmare, cînd vorbim despre un vector *aplicat* în $\mathfrak{z}_a$, subînțelegem că suportul său trece prin $\mathfrak{z}_a$.

Uneori este preferabil ca în locul integralelor curbilinii din (10), să utilizăm integrale duble în $\mathscr{D}$, în care să intervină de asemenea numai funcţia de torsiune. În acest scop, să considerăm *funcţia lui Prandtl extinsă* la domeniul $\mathscr{D}_0^+$:

$$\mathsf{f}(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathsf{f}(x_1, x_2) & \text{în } \mathscr{D}, \\ f_j & \text{în } \mathscr{D}_j^+, \end{cases} \tag{11}$$

şi să introducem integralele

$$H = \iint\limits_{\mathscr{D}_0^+} \tilde{\mathsf{f}}\, \mathrm{d}D, \quad H_1 = \iint\limits_{\mathscr{D}} \mathsf{r}\, \mathrm{d}D, \quad H_2 = \iint\limits_{\mathscr{D}} \mathsf{r}\mathfrak{z}\, \mathrm{d}D, \quad H_3 = \iint\limits_{\mathscr{D}_0^+} \tilde{\mathsf{f}}\, \mathfrak{z}\, \mathrm{d}D. \tag{12}$$

Ţinînd seama de formula (14.18) pentru C, obţinem uşor

$$H = \iint\limits_{\mathscr{D}} \mathsf{f}\, \mathrm{d}D + \sum_{j=1}^{m} f_j D_j = \frac{1}{2} C. \tag{13}$$

De asemenea pentru integrala H_3 avem

$$H_3 = \iint\limits_{\mathscr{D}} \mathsf{f}\, \mathfrak{z}\, \mathrm{d}D + \sum_{j=1}^{m} f_j D_j \mathfrak{z}_{0j}. \tag{14}$$

Între integralele C_i din (8) şi integralele H_i din (12) există relaţii simple, care se explicitează utilizînd formula lui Stokes (A.4.29) :

$$C_1 = 2\mathrm{i}\, H_1 + \mathrm{i} \iint\limits_{\mathscr{D}} \overline{\psi}' \bar{\mathfrak{z}}\, \mathrm{d}D, \quad C_2 = 4\mathrm{i}\, \overline{H}_2 + \mathrm{i} \iint\limits_{\mathscr{D}} \overline{\psi}' \bar{\mathfrak{z}}^2\, \mathrm{d}D,$$

$$C_3 = 2\mathrm{i}\, H_2 + \mathrm{i} \iint\limits_{\mathscr{D}} \overline{\psi}' \mathfrak{z} \bar{\mathfrak{z}}\, \mathrm{d}D. \tag{15}$$

Mai departe, folosind formula (14.7) ($\psi'(\mathfrak{z}) = 2\mathrm{i}\, \mathsf{f}_{,1} + \mathrm{i}\bar{\mathfrak{z}}$), şi din nou formula lui Stokes, căpătăm

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} \overline{\psi}' \bar{\mathfrak{z}}\, \mathrm{d}D = \mathrm{i}(2H - J_0), \quad \iint\limits_{\mathscr{D}} \overline{\psi}' \bar{\mathfrak{z}}^2\, \mathrm{d}D = 4\mathrm{i}\, \overline{H}_3 + \frac{1}{4} \overline{C}_4,$$

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} \overline{\psi}' \mathfrak{z} \bar{\mathfrak{z}}\, \mathrm{d}D = 2\mathrm{i}\, H_3 - \frac{1}{4} C_4, \tag{16}$$

astfel că în definitiv (10) devine

$$\mathscr{M}_3^0 = \mu\tau C + c\, H_1 - \mathrm{Re}(\overline{\alpha} H_2) - \frac{\nu}{1+\nu} \mathrm{Im}\, (\alpha H_3). \tag{17}$$

Integralele C_i și H_i depind numai de soluția problemei torsiunii, mai ușor de rezolvat (exact, aproximativ sau analogic).

Toate aceste integrale sînt deci niște *constante ale domeniului*, și au semnificația unor *rigidități geometrice la torsiunea de încovoiere* [15]. Formulele (10) și (17) vor înlocui în cele ce urmează formula (8.14) pentru determinarea lui τ. În ce privește semnificația lor, vezi § 6, pag. 189.

c) *Centrul de încovoiere*

Prezintă importanță evidentă cunoașterea cazurilor în care încovoierea se produce *fără* torsiune, așadar fără tensiunile pe care torsiunea le provoacă. *Acea* valoare a lui τ pentru care torsiunea dispare, se va nota τ_c; din (9.4) rezultă

$$\mu\tau_c = -\frac{\mu\nu i}{2E}(\bar{\alpha}\,\mathfrak{z}_0 - \alpha\,\bar{\mathfrak{z}}_0) = \frac{\nu}{2(1+\nu)}\,\mathrm{Im}(\bar{\alpha}\,\mathfrak{z}_0), \tag{18}$$

așadar o cantitate unic determinată. Dacă axele sînt centrale, avem $\tau_c = 0$.

Relațiile (10) și (17) *explicitează* dependența dintre τ și $\mathcal{M}_3^0$. În particular, vom nota cu $\mathcal{M}_c$ acea valoare a momentului $\mathcal{M}_3^0$ care corespunde lui τ_c, și se obține deci introducînd (18) în (10) sau (17). Întrucît $\mathcal{M}_3^0$ depinde de poziția punctului de aplicare $\mathfrak{z}_a$ a sarcinii R, înseamnă că valorii τ_c îi corespunde o anumită poziție a lui $\mathfrak{z}_a$, sau — ceea ce este același lucru — a axei centrale a sarcinii.

Privind relația (2) ca relație ce dă momentul $\mathcal{M}_3^0$ ca funcție de R și de $\mathfrak{z}_a$, obținem prin derivare

$$\bar{\mathfrak{z}}_a = 2i(\partial\mathcal{M}_3^0/\partial R), \tag{19}$$

ceea ce poate fi de asemenea privit ca ecuație a axei centrale.

În particular, luînd pentru $\mathcal{M}_3^0$ valoarea $\mathcal{M}_c$, și notînd cu $\mathfrak{z}_c$ punctul $\mathfrak{z}_a$ corespunzător, așadar *acel* punct de aplicare al sarcinii R pentru care încovoierea se realizează fără torsiune, deducem din (19)

$$\bar{\mathfrak{z}}_c = 2i\,(\partial\mathcal{M}_c/\partial R). \tag{20}$$

Ținînd seama că $\mathcal{M}_c$ este funcție de R (vezi (18) și (4.12)), punctul $\mathfrak{z}_c$ este unic determinat, și nu depinde de sarcină, ci numai de configurația secțiunii, și de ν. (Se constată că $\mathfrak{z}_c$ variază foarte puțin ca funcție de ν. Vezi mai departe (20.95), (22.24), (22.52). Vezi și C. Pearson [1].) Punctul $\mathfrak{z}_c$ astfel definit se numește *centru de încovoiere*. (R. Capildeo [1] — care se referă la un punct de vedere al lui A. Stevenson, conducînd la (18); L. Leibenzon [2]; E. Trefftz [4]).

Dacă sarcina este echivalentă cu o forță R al cărei suport trece prin $\mathfrak{z}_c$, încovoierea se produce deci fără torsiune. Întrucît acest suport

[15]) Totuși fără a putea stabili, de exemplu, că τ scade cînd aceste constante cresc.

coincide cu axa centrală a sistemului de sarcini, este suficient să calculăm componentele $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{M}_3^0$ și să verificăm dacă punctul de coordonate x_1^c, x_2^c e situat pe dreapta (1) sau nu — pentru a ști dacă încovoierea se produce fără, sau cu torsiune.

Pentru centrul de încovoiere se poate da și o definiție bazată pe considerente variaționale, de același tip cu definiția centrului de torsiune (§ 13, pag. 231). Se obține atunci o poziție independentă de ν. Pentru detalii, vezi E. Trefftz [4], A. Weinstein [1].

Atît τ cît și $\mathfrak{z}_c$ depind în ultimă instanță de funcția de torsiune $\psi(\mathfrak{z})$ a secțiunii. În ce privește poziția centrului de încovoiere, un rezultat de acest tip aparține lui M. Berman [1]. El a fost reluat de V. Novojilov [2], și simplificat de E. Deutsch [2]. Formula (10) este datorată în esență lui R. Capildeo [1].

Sînt de indicat unele soluții exacte ale problemei torsiunii, cu determinare ulterioară a centrului de încovoiere. Multe din rezultatele menționate în § 18, pag. 301 (și în special cele date sau citate de N. Arutiunian și B. Abramian [1]) pot fi folosite pentru același scop. Indicăm și rezultatele lui L. Payne [2].

Introducînd valoarea τ_c din (18) în (10) sau (17), și făcînd uz de (20), se pot obține formule generale pentru $\mathfrak{z}_c$. În practică, calcularea lui τ fiind întotdeauna necesară, e mai ușor de obținut $\mathfrak{z}_c$ din (18) și (20), *după* ce τ a fost determinat în funcție de R și $\bar{R}$.

Faptul că τ și $\mathfrak{z}_c$ depind de $\psi(\mathfrak{z})$ numai sub formă integrală, face ca ele să poată fi găsite cu precizie satisfăcătoare chiar dacă această ultimă funcție este cunoscută numai aproximativ, sau eventual experimental (vezi § 20, exemplul *g*, pag. 328—329).

OBSERVAȚIE. Dacă $\mathscr{D}$ are o axă de simetrie, atunci $\mathfrak{z}_c$ este situat pe această axă. Într-adevăr, alegînd-o drept axă Ox_1, avem $\mathfrak{z}_0 = x_1^0$ și $I_{12} = 0$. Să construim funcțiile

$$\begin{aligned} \mathrm{r}^+ &= \frac{1}{2}[\mathrm{r}(x_1, x_2) + \mathrm{r}(x_1, -x_2)], \quad \mathrm{r}^- = \frac{1}{2}[\mathrm{r}(x_1, x_2) - \mathrm{r}(x_1, -x_2)], \\ \mathrm{t}^+ &= \frac{1}{2}[\mathrm{t}(x_1, x_2) + \mathrm{t}(x_1, -x_2)], \quad \mathrm{t}^- = \frac{1}{2}[\mathrm{t}(x_1, x_2) - \mathrm{t}(x_1, -x_2)], \end{aligned} \tag{21}$$

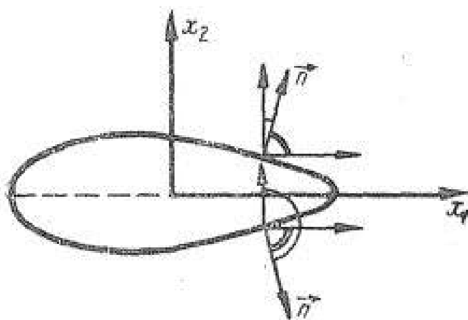


Fig 5.19.1

care, în virtutea simetriei, sînt definite peste tot în $\mathscr{D}$, și permit să scriem

$$\mathrm{r} = \mathrm{r}^+ + \mathrm{r}^-, \quad \mathrm{t} = \mathrm{t}^+ + \mathrm{t}^-. \tag{22}$$

Funcțiile r^+, t^+ sînt pare în x_2, în timp ce r^-, t^- sînt impare. Dat fiind că pe $\mathscr{L}$ funcția n_1 este pară, iar n_2 este impară în x_2, din (21) și din condițiile (13.4) și (13.5) deducem pe $\mathscr{L}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{r}^+_{,n} &= 0, \quad \mathrm{r}^-_{,n} = x_2 n_1 - x_1 n_2, \\ \mathrm{t}^+ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \text{const.}, \quad \mathrm{t}^- = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Întrucît aceste funcții sînt armonice, de aci urmează $r^+ = t^- = 0$ în $\mathscr{D}$. Funcția de torsiune a lui Saint-Venant rezultă deci a fi impară, iar funcția de torsiune conjugată, și deci și funcția lui Prandtl, rezultă pare în $\mathscr{D}$.

Din (12) urmează acum

$$H = \frac{1}{2}C \neq 0,\ H_1 = 0,\ H_2 = i \iint_{\mathscr{D}} r x_2 \, dD,\ H_3 = \iint_{\mathscr{D}_0^+} \tilde{f} x_1 dD, \tag{24}$$

astfel că (17) devine, pentru valoarea τ_c din (18):

$$\mathscr{M}_c = -\left[\frac{\nu}{2(1+\nu)} x_1^0 C + \iint_{\mathscr{D}} r x_0 \, dD - \frac{\nu}{1+\nu} \iint_{\mathscr{D}_0^+} \tilde{f} x_1 dD\right] \operatorname{Im} \alpha. \tag{25}$$

Întrucît $I_{12} = 0$, avem și $\bar{I} = I$, și din (4.12) deducem

$$\alpha - \bar{\alpha} = (2/\delta)(I_0 + I)(R - \bar{R}). \tag{26}$$

Prin urmare, cantitatea $\mathfrak{z}_c$ din (20) este reală, și centrul de încovoiere este situat pe axa de simetrie Ox_1. În particular, dacă $\mathscr{D}$ are două (sau mai multe) axe de simetrie, $\mathfrak{z}_c$ este situat la intersecția acestora, și coincide cu $\mathfrak{z}_0$.

Abstracție făcînd de cazul particular al problemei rezolvate în axe centrale ($\mathfrak{z}_0 = 0$), absența torsiunii *nu este* caracterizată de valoarea $\tau = 0$, ci de valoarea τ_c dată în (18). Este deci firesc să folosim uneori în loc de (3), formula

$$F = (\mu\tau_c f + \tilde{F}) + \mu(\tau - \tau_c) f, \tag{27}$$

unde al doilea termen dă tensiunile de torsiune datorate aplicării sarcinii de încovoiere *în afara* punctului $\mathfrak{z}_c$.

Aceste tensiuni pot fi uneori considerabile. Pentru determinarea ponderii lor, este comod să procedăm precum urmează. Valoarea τ_c fiind cunoscută din (18), se obține ușor din (10) sau (17) valoarea $\mathscr{M}_c$ a momentului $\mathscr{M}_3^0$, așadar valoarea sa optimală. Scriind relațiile (10) — sau (17) — pentru $\mathscr{M}_3^0$ și τ, apoi pentru $\mathscr{M}_c$ și τ_c, și scăzîndu-le termen cu termen, căpătăm

$$\mathscr{M}_3^0 - \mathscr{M}_c = \mu C(\tau - \tau_c), \tag{28}$$

ceea ce dă imediat coeficientul termenului torsional din (27).

Tensiunile ce apar pentru $\tau \neq \tau_c$ pot avea efecte catastrofale (vezi § 10, pag. 212—213. Ca exemplu vezi § 20, *h*).

§ 20. ÎNCOVOIEREA CONSOLEI. ANALOGII. EXEMPLE

În paragraful de față, vom examina cîteva cazuri în care funcția lui Capildeo și Milne-Thomson, sau funcția lui Timoshenko, pot fi determinate cu mijloace relativ elementare.

a) Disc circular. Coroană circulară. Concentrarea tensiunilor

Să considerăm o consolă avînd drept secțiune $\mathscr{D}$ o coroană circulară de raze $R_1 < R_0$, solicitată de o sarcină static echivalentă cu o forță tangențială R aplicată în centru. Alegînd originea în centru și luînd drept axă Ox_1 suportul forței, obținem $\mathfrak{z}_0 = c = 0$, $R = \mathcal{R}_1$. Folosind notațiile (15.93), avem evident

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \iint_{\mathscr{D}} \mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}\, \mathrm{d}D =$$

$$= \frac{1}{2} R_0^4 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\chi \int_k^1 R^{*3}\, \mathrm{d}R^* = \frac{1}{4} \pi R_0^4 (1 - k^4), \tag{1}$$

astfel că din (4.12) obținem

$$\alpha = \alpha_1 = \mathcal{R}_1 / I_2 = 4\mathcal{R}_1 / \pi R_0^4 (1 - k^4), \tag{2}$$

ceea ce permite să scriem imediat componenta σ_{33} sub forma (8.3).

Conform celor spuse la finele § precedent, centrul de încovoiere este situat în origine; întrucît forța R este aplicată în origine, rezultă și $\tau = 0$. După cum urmează din (11.7) și (11.9), funcția lui Capildeo și Milne-Thomson este în acest caz uniformă. Este firesc deci să o căutăm sub forma

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathfrak{z}^n, \quad \mathfrak{z} = R \exp(\mathrm{i}\chi). \tag{3}$$

Coeficienții a_n urmează a fi determinați din condiția (11.1), care devine

$$\operatorname{Im} [\varphi'(\mathrm{t})\, \mathrm{t}'(s)] = \frac{1}{4\mu(1+\nu)} \operatorname{Im} \left[\left(\bar{\alpha}\mathrm{t} + \frac{1+2\nu}{2} \alpha \bar{\mathrm{t}} \right) \bar{\mathrm{t}}\, \mathrm{t}'(s) \right] =$$

$$= \frac{2\mathcal{R}_1}{\pi E R_0^4 (1-k^4)} \operatorname{Im} \left\{ \left[\mathrm{t} + \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \bar{\mathrm{t}} \right] \bar{\mathrm{t}}\, \mathrm{t}'(s) \right\}. \tag{4}$$

Pe orice cerc de rază R avem desigur

$$s = R\chi, \quad \mathfrak{z}'(s) = \mathrm{i} \exp(\mathrm{i}\chi) = \mathrm{i}(\mathfrak{z}/R). \tag{5}$$

Introducînd acum (3) în (4), obținem pentru $R = R_j$, $j = 0, 1$:

$$\frac{1}{R_j} \operatorname{Im} \left[\mathrm{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, a_n R_j^n \exp(\mathrm{i}\, n\chi) \right] = \frac{2 R_j^2 \mathcal{R}_1}{\pi E R_0^4 (1-k^4)} \operatorname{Im} \left\{ \mathrm{i} \left[\exp(\mathrm{i}\chi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \exp(-\mathrm{i}\chi) \right] \right\},$$

de unde, notînd $a_n = a'_n + ia''_n$, deducem relațiile

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n R_j^n (a'_n \cos n\chi - a''_n \sin n\chi) = \frac{(3+2\nu) R_j^3 \mathcal{R}_1}{\pi E R_0^4 (1-k^4)} \cos\chi, \quad j = 0, 1. \tag{6}$$

Evident, toate constantele a''_n rezultă nule; constantele a'_n sînt de asemenea nule, exceptînd a'_1 și a'_{-1}. În definitiv, din (6) obținem sistemul

$$\begin{aligned} -R_0^{-1} a'_{-1} + R_0 a'_1 &= \frac{(3+2\nu)\mathcal{R}_1}{\pi E R_0 (1-k^4)}, \\ -R_1^{-1} a'_{-1} + R_1 a'_1 &= \frac{(3+2\nu) k^3 \mathcal{R}_1}{\pi E R_0 (1-k^4)}, \end{aligned} \tag{7}$$

de unde

$$a'_{-1} = \frac{3+2\nu}{\pi E} \frac{k^2}{1-k^4} \mathcal{R}_1, \quad a'_1 = \frac{3+2\nu}{\pi E} \frac{1}{R_0^2 (1-k^2)} \mathcal{R}_1, \tag{8}$$

astfel că soluția problemei este dată de

$$\varphi(z) = \frac{3+2\nu}{\pi E} \mathcal{R}_1 \left[\frac{1}{R_0^2(1-k^2)} z + \frac{k^2}{1-k^4} z^{-1} \right]. \tag{9}$$

Soluția pentru discul circular se capătă renunțînd în seria din (3) la termenii de indici $n < 0$, precum și la a doua ecuație (7). Deducem astfel

$$\psi(z) = \frac{3+2\nu}{\pi E} \frac{\mathcal{R}_1}{R_0^2} z. \tag{10}$$

Introducînd (9) în (8.10), obținem după calcule elementare

$$\begin{aligned} T(z, \bar{z}) = -\frac{\mathcal{R}_1}{2\pi(1+\nu) R_0^4 (1-k^4)} \Big\{ (1+2\nu) z^2 + \\ + 2 z \bar{z} + (3+2\nu) R_0^2 \left[\frac{R_0^2 k^2}{\bar{z}^2} - 1 - k^2 \right] \Big\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Tensiunea pentru cazul discului circular se capătă de aci luînd $k = 0$, ceea ce se verifică și dacă introducem (10) în (8.10).

Tensiunea tangențială în origine este dată, în cazul discului circular, de relația (11), unde luăm $k = 0$ și *apoi* $z = 0$:

$$T(0, 0) = \frac{(3+2\nu)\mathcal{R}_1}{2\pi(1+\nu) R_0^2}. \tag{12}$$

În cazul coroanei cu $k = 0$ putem calcula întîi tensiunile în $z = R_1 \exp(i\chi)$, făcînd apoi $R_1 \to 0$. Obținem astfel (compară cu §15, pag. 259):

$$T(0, 0; \chi) = \frac{(3 + 2\nu)\mathcal{R}_1}{2\pi(1 + \nu)R_0^2} [1 - \exp(2i\chi)], \tag{13}$$

astfel că, pentru $\chi = \pm \pi/2$, componenta σ_{31} ia o valoare de două ori mai mare decît în cazul cercului plin. Acesta constituie un exemplu simplu de concentrare a tensiunilor la încovoiere (vezi și § 15, exemplele ***d*** și ***f***).

Comparînd această soluție cu soluția problemei torsiunii pentru același domeniu (vezi § 15, exemplul ***a***), se observă ușor natura dificultăților sporite pe care le întîmpinăm în studiul cazului general al sarcinii tangențiale.

b) Funcția lui Timoshenko modificată

Ca și în cazul torsiunii, funcția lui Capildeo și Milne-Thomson se dovedește eficace mai ales atunci cînd este cunoscută funcția ce realizează reprezentarea conformă a discului unitate sau a unei coroane circulare, pe domeniul considerat. Numeroase probleme pot fi însă rezolvate efectiv cu ajutorul funcției lui Prandtl și Timoshenko (în cazul încovoierii o vom numi funcția lui Timoshenko).

Amintim aci că, F odată determinată, din (12.5), (12.6) urmează

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= F_{,2} + \frac{1}{2} c x_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 (x_1^2 + x_2^2), \\ \sigma_{32} &= -F_{,1} + \frac{1}{2} c x_2 - \frac{1}{2} \alpha_2 (x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Aceste formule se simplifică dacă axele sînt centrale ($c = 0$), și se simplifică încă mai mult în axe centrale principale, cînd din (9.6) avem $\alpha_1 = \mathcal{R}_1/I_2$, $\alpha_2 = \mathcal{R}_2/I_1$.

Dacă funcția lui Timoshenko se caută sub forma

$$F(x_1, x_2) = F_0(x_1, x_2) + F_1(x_2) + F_2(x_1), \tag{15}$$

atunci pentru $F_0(x_1, x_2)$ avem (vezi (12.13)) ecuația

$$\Delta F_0 = -2\mu\tau + \frac{1 + 2\nu}{1 + \nu} (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) - F_1''(x_2) - F_2''(x_1), \tag{16}$$

şi condiţia la limită (vezi (12.9))

$$\mathsf{F}_0|_{\mathscr{L}} = \frac{1}{2}\int_0^s [(x_1^2 + x_2^2)(\alpha_1 dx_2 - \alpha_2 dx_1) + c(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)] - \\ - \mathsf{F}_1(x_2)|_{\mathscr{L}} - \mathsf{F}_2(x_1)|_{\mathscr{L}}, \tag{17}$$

unde putem dispune în diferite moduri de funcţiile $\mathsf{F}_1(x_2)$, $\mathsf{F}_2(x_1)$.

c) Analogia membranei elastice

Funcţia $\mathsf{F}_0(x_1, x_2)$ poate fi privită ca soluţie a problemei membranei flexibile (vezi § 16, pag. 262—263), avînd iniţial forma secţiunii $\mathscr{D}$, solicitată de o sarcină *neuniformă*, definită de primii doi termeni din membrul al doilea din (16) şi avînd pe contur cote de asemenea neuniforme, definite de primii doi termeni din al doilea membru al condiţiei la limită (17). Acest punct de vedere nu îngăduie însă o realizare simplă din punct de vedere experimental a analogiei.

F. Vening Meinesz (vezi S. Timoshenko şi J. Goodier [1], § 113) a reuşit să formuleze analogia sub o formă aproape tot atît de simplă ca în cazul torsiunii. Anume, pentru $\mathscr{D}$ simplu conex, să căutăm soluţia sub forma (vezi (19.3))

$$\mathsf{F}_0(x_1, x_2) = \mu\tau\, \mathsf{f}(x_1, x_2) + \widetilde{\mathsf{F}}(x_1, x_2), \tag{18}$$

unde $\mathsf{f}(x_1, x_2)$ este funcţia lui Prandtl, soluţie a problemei (14.21):

$$\Delta \mathsf{f} = -2, \quad \mathsf{f}|_{\mathscr{L}} = 0. \tag{19}$$

Introducînd (18) în (16) şi (17), obţinem

$$\begin{gathered} \Delta\widetilde{\mathsf{F}} = \frac{1+2\nu}{1+\nu}(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) - \mathsf{F}_1''(x_2) - \mathsf{F}_2''(x_1), \\ \widetilde{\mathsf{F}}|_{\mathscr{L}} = \frac{1}{2}\int_0^s [(x_1^2 + x_2^2)(\alpha_1 dx_2 - \alpha_2 dx_1) + c(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)] - \\ - \mathsf{F}_1(x_2)|_{\mathscr{L}} - \mathsf{F}_2(x_1)|_{\mathscr{L}}. \end{gathered} \tag{20}$$

Alegînd acum

$$\mathsf{F}_1(x_2) = \frac{1+2\nu}{6(1+\nu)}\alpha_1 x_2^3, \quad \mathsf{F}_2(x_1) = -\frac{1+2\nu}{6(1+\nu)}\alpha_2 x_1^3, \tag{21}$$

obţinem din (20):

$$\begin{gathered} \Delta\widetilde{\mathsf{F}} = 0, \\ \widetilde{\mathsf{F}}|_{\mathscr{L}} = \frac{1}{2}\int_0^s [(\alpha_1 x_1^2 - 2cx_1)dx_2 - (\alpha_2 x_2^2 - 2cx_2)dx_1] - \\ - \frac{\nu}{6(1+\nu)}(\alpha_1 x_2^3 - \alpha_2 x_1^3)\Big|_0^s. \end{gathered} \tag{22}$$

Integrala din condiția la limită este o funcție uniformă pe $\mathscr{L}$; într-adevăr, formula lui Riemann (A.3.19) ne dă

$$\oint_{\mathscr{L}} [(\alpha_1 x_1^2 - 2\,cx_1)\,\mathrm{d}x_2 - (\alpha_2 x_2^2 - 2\,cx_2)\,\mathrm{d}x_1] = 2\,(\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0 - 2\,c)\,D = 0,$$

în virtutea relației de definiție (4.8) a constantei c. Prin urmare, valorile la limită ale lui $\widetilde{\mathsf{F}}$ sînt univoc determinate și problema se reduce la problema lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace.

Pentru a o rezolva pe cale experimentală, trebuie să construim curba $\mathscr{L}$, și în fiecare punct să ridicăm o cotă proporțională cu valoarea (22). Membrana fixată pe această curbă în spațiu (materializată de exemplu printr-un cadru de sîrmă) și nesolicitată de nici o sarcină normală — întrucît ecuația din (22) este omogenă — reprezintă analogul căutat al problemei.

Menționăm încă posibilitatea utilizării de analogii electrice (vezi bibliografia în Th. Higgins [6]).

d) Domenii simetrice

Uneori este convenabil să utilizăm funcțiile F_1, F_2 pentru a simplifica nu ecuația, ci condiția la limită. Astfel, fie că sarcina e aplicată în centrul de greutate al lui $\mathscr{D}$, în lungul uneia din axele centrale principale de inerție, pe care o alegem drept axă Ox_1. Întrucît în acest caz avem $\mathfrak{z}_0 = 0$, $\mathcal{R}_2 = 0$, din (16) și (17) urmează

$$\Delta\,\mathsf{F}_0 = -\,2\,\mu\tau + \frac{1+2\,\nu}{1+\nu}\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,x_2 - \mathsf{F}_1''(x_2)\,,$$
$$\mathsf{F}_0\big|_{\mathscr{L}} = \frac{1}{2}\,(\mathcal{R}_1/I_2)\int_0^s x_1^2\,\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{6}\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,x_2^3\Big|_0^s - \mathsf{F}_1(x_2)\Big|_{\mathscr{L}}, \qquad (23)$$

unde am ales $\mathsf{F}_2(x_1) \equiv 0$.

Dacă $\mathscr{D}$ are o axă de simetrie, fie ea Ox_2, și dacă R acționează central în lungul unei *perpendiculare* pe axa de simetrie, așadar ca mai sus după axa Ox_1, atunci, punînd ecuația frontierei sub forma

$$x_1^2 = g(x_2)\,, \qquad (24)$$

este firesc să alegem în (23):

$$\mathsf{F}_1(x_2) = \frac{1}{2}\,(\mathcal{R}_1/I_2)\int_0^s g(x_2)\,\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{6}\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,x_2^3\Big|_0^s, \qquad (25)$$

ceea ce conduce la condiția la limită

$$\mathsf{F}_0(x_1,\ x_2)\,|_{\mathscr{L}} = 0\,. \qquad (26)$$

Această metodă (propusă de S. Timoshenko) permite să rezolvăm orice problemă de încovoiere pentru secţiuni cu două axe de simetrie perpendiculare.

e) Elipsă (S. Timoshenko şi J. Goodier [1], § 108)

Să considerăm consola de secţiune $\mathscr{D}$ mărginită de elipsa

$$x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1\,. \tag{27}$$

Întrucît în acest caz $\mathfrak{z}_0 = 0$, punînd (27) sub forma

$$x_1^2 = a^2(1 - x_2^2/b^2)\,, \tag{28}$$

ne situăm în cazul general de mai sus.

Fie că sarcina acţionează central, în lungul axei Ox_1. Din (25) obţinem

$$\mathsf{F}_1(x_2) = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/I_2)\left[a^2 x_2 + \frac{1}{3}(1 - a^2/b^2)\,x_2^3\right]. \tag{29}$$

Din (23) deducem deci ecuaţia

$$\Delta\mathsf{F}_0(x_1, x_2) = -2\mu\tau + (\mathcal{R}_1/I_2)\,[a^2/b^2 + \nu/(1+\nu)]\,x_2\,, \tag{30}$$

care trebuie rezolvată ţinînd seama de condiţia la limită (26).

În virtutea celor spuse la finele § 19, avem $\mathfrak{z}_c = 0$; sarcina fiind aplicată central, rezultă

$$\tau = 0\,, \tag{31}$$

astfel că ecuaţia (30) devine

$$\Delta\mathsf{F}_0 = (\mathcal{R}_1/I_2)\,[a^2/b^2 + \nu/(1+\nu)]\,x_2\,. \tag{32}$$

Pentru a satisface condiţia (26), vom căuta soluţia sub forma unui produs de funcţii care conţine în factor ecuaţia implicită a frontierei (27). Întrucît membrul al doilea din (32) este liniar în x_2, vom lua

$$\mathsf{F}_0(x_1, x_2) = Kx_2(x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 - 1)\,. \tag{33}$$

Introducînd acum (33) în (32), obţinem cu uşurinţă

$$K = \frac{1}{2}\,[a^2b^2/(3a^2 + b^2)]\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,[a^2/b^2 + \nu/(1+\nu)]\,. \tag{34}$$

Cu aceasta, funcţia $\mathsf{F}_0(x_1, x_2)$ — şi deci şi funcţia lui Timoshenko $\mathsf{F} = \mathsf{F}_0 + \mathsf{F}_1(x_2)$ — sînt determinate. Componentele tensiunii se calculează imediat din (14) (unde $c = 0$). Ecuaţiile geometrice se integrează de asemenea, după calcule elementare, întrucît componentele tensiunii sînt polinoame.

Pentru o sarcină aplicată central în lungul axei Ox_2, calculele se repetă analog. Soluţia pentru o sarcină centrală oarecare se obţine prin suprapunere. Dacă sarcina este aplicată excentric, atunci trebuie să rezolvăm şi problema de torsiune, corespunzătoare momentului sarcinii faţă de origine.

f) Dreptunghi

Să considerăm o consolă de secțiune dreptunghiulară, de frontieră $x_1 = \pm a, x_2 = \pm b$. Sarcina este aplicată central, în lungul axei Ox_1. Evident avem $\tau = 0$, și încovoierea se face fără torsiune. Dar raționamentul precedent nu mai poate fi utilizat, întrucît ecuația frontierei nu poate fi pusă sub forma (24). Din (23) obținem

$$\mathsf{F}_{0,s}\big|_{\mathcal{L}} = \left[\frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/I_2)(x_1^2 + x_2^2) - \mathsf{F}_1'(x_2)\right] x_2'(s), \tag{35}$$

unde, evident, pe laturile $x_2 = \pm b$ avem $x_2'(s) = 0$. Alegînd funcția $\mathsf{F}_1'(x_2)$ în așa fel încît paranteza dreaptă din (35) să se anuleze pe laturile $x_1 = \pm a$, căpătăm

$$\mathsf{F}_1'(x_2) = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/I_2)(a^2 + x_2^2), \quad \mathsf{F}_1''(x_2) = (\mathcal{R}_1/I_2)\, x_2, \tag{36}$$

astfel că în definitiv (23) se reduce la

$$\Delta\,\mathsf{F}_0 = [\nu/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_1/I_2)\, x_2, \quad \mathsf{F}_{0,s}\big|_{\mathcal{L}} = 0, \tag{37}$$

iar formulele (14) devin

$$\sigma_{31} = \mathsf{F}_{0,2} + \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/I_2)(a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{32} = -\,\mathsf{F}_{0,1}. \tag{38}$$

OBSERVAȚIA 1. Teoria elementară a încovoierii barelor de secțiune dreptunghiulară presupune că, pentru o sarcină aplicată central în lungul uneia din axele de simetrie — fie ea Ox_1 — tensiunea tangențială se reduce la componenta σ_{31}, paralelă cu sarcina, distribuită după o lege parabolică, și independentă de x_2. Aceasta se obține evident din (38) dacă luăm $F_0 \equiv 0$:

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/I_2)(a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{32} = 0, \tag{39}$$

— dar o asemenea simplificare nu e în general justificată. (Pentru un caz particular, vezi mai jos (50).) Totuși, formulele (39) — care poartă numele lui D. Jurawski — constituie încă și azi în rezistența materialelor punctul de pornire în studiul problemei încovoierii consolei de secțiune dreptunghiulară, și chiar mai complicată încă. Pentru detalii, vezi de exemplu N. Beliaev [2], § 15.91 ; Filonenko-Borodici et al. [1], volumul 1, § 5.63.



Fig. 5.20.1

Comparînd (37) cu (16), conchidem că determinarea funcției F_0 echivalează cu rezolvarea problemei membranei fixate pe contur și solicitate de o sarcină normală, proporțională cu $-[\nu/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,x_2$ (vezi (16.6) și fig. 5.20.1). De aci urmează că $\mathsf{F}_0(x_1, x_2)$ trebuie să fie pară în x_1 și impară în x_2. Să o căutăm sub forma unei dezvoltări în serie dublă Fourier

$$\mathsf{F}_0(x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} F_{m;n} \cos\frac{m\pi x_1}{2a} \sin\frac{n\pi x_2}{2b}. \tag{40}$$

Introducînd această expresie în ecuația (37), avem

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \pi^2 F_{m;n} \left(\frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2}\right) \cos\frac{m\pi x_1}{2a} \sin\frac{n\pi x_2}{2b} = -\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\mathcal{R}_1}{I_2} x_2 . \tag{41}$$

Pentru funcția x_2 obținem ușor dezvoltarea în serie Fourier

$$x_2 = -\frac{2b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \qquad -b \leqslant x_2 \leqslant b. \tag{42}$$

Ținînd seama și de dezvoltarea în serie (15.63), de unde

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{2m+1}{2a}\pi x_1, \qquad -a \leqslant x_1 \leqslant a, \tag{43}$$

putem deci scrie (42) sub forma

$$x_2 = -\frac{8b}{\pi^2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)n}\cos\left(\frac{2m+1}{2a}\pi x_1\right)\sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right), \tag{44}$$

astfel că din (41) urmează prin identificare

$$F_{2m+1;2n} = \frac{8b}{\pi^4}\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\mathcal{R}_1}{I_2}\frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)n[(2m+1)^2/4a^2 + n^2/b^2]}$$

și deci soluția este

$$\mathsf{F}_0(x_1, x_2) = \frac{8b^3}{\pi^4}\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\mathcal{R}_1}{I_2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\cos\left(\dfrac{2m+1}{2a}\pi x_1\right)\sin\left(\dfrac{n\pi x_2}{b}\right)}{(2m+1)n[(2m+1)^2(b^2/4a^2) + n^2]}. \tag{45}$$

Prin urmare, din (38) deducem

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}_1}{I_2}\left[a^2 - x_1^2 + \frac{16b^2}{\pi^3}\frac{\nu}{1+\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\cos\left(\dfrac{2m+1}{2a}\pi x_1\right)\cos\left(\dfrac{n\pi x_2}{b}\right)}{(2m+1)[(2m+1)^2(b^2/4a^2) + n^2]}\right],$$

$$\sigma_{32} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}_1}{I_2}\frac{8b^3}{\pi^3 a}\frac{\nu}{1+\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\sin\left(\dfrac{2m+1}{2a}\pi x_1\right)\sin\left(\dfrac{n\pi x_2}{b}\right)}{n[(2m+1)^2(b^2/4a^2) + n^2]}. \tag{46}$$

În cazul limită $b \to 0$, așadar pentru o consolă de secțiune foarte îngustă (o placă dreptunghiulară, acționată *în lungul* secțiunii sale transversale: fig. 5.20.2), sumele din (46) tind evident spre zero, și soluția elementară (39) rezultă justificată.

Analogia membranei permite studierea stării de tensiune în cazul $2a \ll 2b \ll l$ (secțiune largă; vezi prima fig. 5.20.3). Întrucît F_0 reprezintă deplasarea normală a membranei

sub acțiunea unei sarcini proporționale cu $-[\nu/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_1/I_2)x_2$, se poate considera că în puncte nu prea apropiate de laturile mici $x_2 = \pm b$, F_0 este funcție liniară de x_2 (vezi și fig. 5.20.1). Ecuația (37) se reduce astfel la

$$F_{0,11} = [\nu/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,x_2,$$

de unde

$$F_0 = \frac{1}{2}[\nu/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,(x_1^2 - a^2)\,x_2. \tag{47}$$

Formulele (38) devin atunci

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}[1/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,(a^2 - x_1^2), \qquad \sigma_{32} = -[\nu/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,x_1 x_2. \tag{48}$$

În comparație cu (39), constatăm o micșorare a tensiunilor σ_{31} (paralele cu sarcina), și apariția unor tensiuni σ_{32}, care sînt importante pentru $|x_2|$ mare.

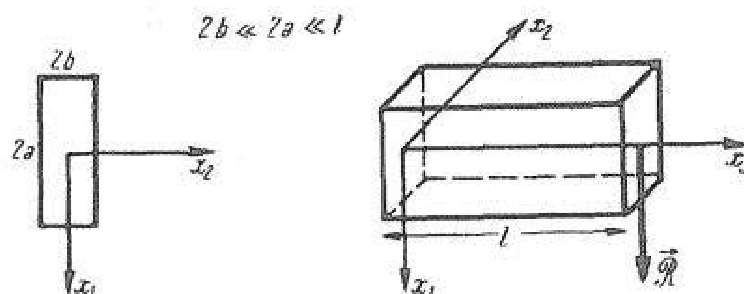


Fig. 5.20.2

În același mod se poate examina și cazul $2b \ll 2a \ll l$. Pentru aceleași motive ca mai sus, admitem că în puncte nu prea apropiate de laturile mici $x_1 = \pm a$, membrana ia o formă cilindrică, astfel că de data aceasta $F_{0,11}$ este neglijabil. Ecuația (37) dă acum

$$F_0 = \frac{1}{6}[\nu/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,x_2\,(x_2^2 - b^2), \tag{49}$$

de unde

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/I_2)\left\{a^2 - x_1^2 + [\nu/(1+\nu)]\left(x_2^2 - \frac{1}{3}b^2\right)\right\}, \quad \sigma_{32} = 0. \tag{50}$$

După cum era de așteptat, corecția față de soluția elementară este în acest caz foarte mică.

Pentru detalii, vezi încă S. Timoshenko și J. Goodier [1], § 109.

Dimpotrivă, în celălalt caz-limită, fie el $b \to \infty$ (placă dreptunghiulară infinită acționată după *înălțimea* secțiunii sale transversale : figura 5.20.3), formulele (46) își pierd sensul. Ele nu pot fi restabilite nici cu ajutorul teoriei integralei Fourier, întrucît funcția x_2 nu este complet integrabilă pe dreapta nemărginită.

De altfel, în problema antiplană, însăşi presupunerea $b \gg l$ nu poate fi acceptată: problema unei astfel de „plăci în consolă" trebuie abordată pe altă cale (vezi mai departe § 6.5, pag. 375).

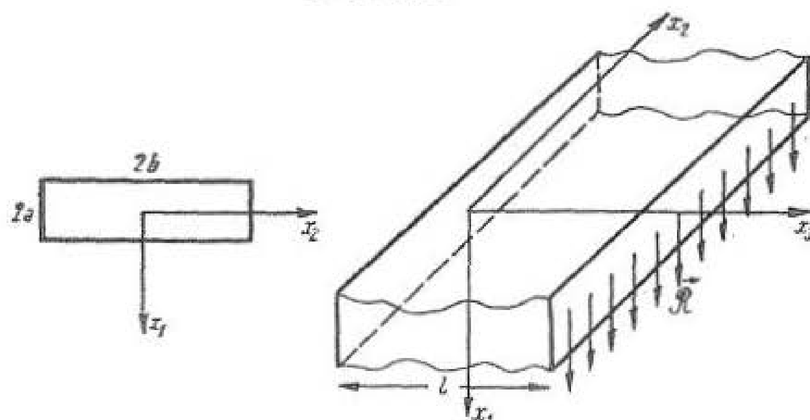


Fig. 5.20.3

g) *Semicoroană circulară. Concentrarea tensiunilor*

Problema torsiunii pentru bare de secţiune în semicoroană a fost studiată în § 15, exemplul *f*. Aci vom examina problema încovoierii în consolă a unei astfel de bare, sub acţiunea unei sarcini tangenţiale, dirijate perpendicular pe axa de simetrie Ox_1 a secţiunii (vezi fig. 5.15.4).

Păstrînd notaţiile din § 15, *f*, avem evident

$$D = \frac{1}{2}\pi(R_0^2 - R_1^2) = \frac{1}{2}\pi R_0^2(1 - k^2), \tag{51}$$

$$D\mathfrak{z}_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(\mathrm{i}\chi)\,\mathrm{d}\chi \int_{R_1}^{R_0} R^2\,\mathrm{d}R = -\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\chi)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3} R^3\Big|_{R_1}^{R_0} =$$
$$= \frac{2}{3}(R_0^3 - R_1^3),$$

de unde

$$\mathfrak{z}_0 = x_1^0 = \frac{4(R_0^3 - R_1^3)}{3\pi(R_0^2 - R_1^2)} = \frac{4}{3\pi}\,\frac{1 - k^3}{1 - k^2}\,R_0\,. \tag{52}$$

Pentru momentele (ne-centrale) de inerţie avem, ca şi în (A.7.25),

$$\begin{aligned} J_0 &= \iint_{\mathcal{D}} \mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}D = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\chi \int_{R_1}^{R_0} R^3\,\mathrm{d}R = \frac{1}{4}\pi(R_0^4 - R_1^4), \\ J &= \iint_{\mathcal{D}} \mathfrak{z}^2\,\mathrm{d}D = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(2\mathrm{i}\chi)\,\mathrm{d}\chi \int_{R_1}^{R_0} R^3\,\mathrm{d}R = 0, \end{aligned} \tag{53}$$

de unde deducem

$$J_{11} = J_{22} = \frac{1}{8}\pi(R_0^4 - R_1^4) = \frac{1}{8}\pi R_0^4(1 - k^4), \quad J_{12} = 0. \tag{54}$$

Făcînd uz de teorema lui Steiner şi de valorile (51), (52), obţinem de aci (întrucît $x_2^0 = 0$):

$$I_1 = J_{11}, \quad I_2 = J_{22} - (x_1^0)^2 D. \tag{55}$$

Întrucît datele la limită au expresii analitice diferite pe diferitele porţiuni ale frontierei, nu se vede cum s-ar putea face uz de condiţia la limită (11.1). În schimb, limitîndu-ne la cazul unei sarcini perpendiculare pe axa de simetrie Ox_1, funcţia lui Timoshenko poate fi găsită.

Întrucît în acest caz avem $R = \mathrm{i}\,\mathcal{R}_2$, din (4.12) urmează

$$\alpha = (2/\delta)(I_0 + I)R = \mathrm{i}\,\alpha_2 = \mathrm{i}(\mathcal{R}_2/I_1), \qquad c = 0. \tag{56}$$

Să căutăm funcţia lui Timoshenko sub forma (15), încercînd totodată să ajungem la o condiţie la limită de forma simplă din (26). (Raţionamentul din (23)—(26) nu poate fi utilizat, întrucît frontiera este alcătuită din arce de expresii analitice diferite.)

Alegînd $F_1(x_2) = 0$ şi derivînd în raport cu arcul s în condiţia la limită (17) — unde $\mathcal{R}_1 = \alpha_1 = c = 0$ — obţinem

$$F_{0,s}\big|_{\mathscr{L}} = -\left[\frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)(x_1^2 + x_2^2) + F_2'(x_1)\right] x_1'(s). \tag{57}$$

(Comparînd cu (23), se vede că intervertind x_1 cu x_2, se schimbă şi semnele.) Pe porţiunile rectilinii ale frontierei avem $dx_1 = 0$, astfel că (57) se reduce aci la

$$F_{0,s}\big|_{x_1=0} = 0. \tag{58}$$

Pentru a verifica (57) pe semicercul exterior, este suficient să alegem

$$F_2'(x_1)\big|_{R=R_0} = -\frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)(x_1^2 + x_2^2)\big|_{R=R_0} = -\frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)R_0^2,$$

de unde

$$F_2(x_1) = -\frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)R_0^2 x_1. \tag{59}$$

Pe semicercul interior rămîne astfel

$$F_{0,s}\big|_{R=R_1} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)(R_0^2 - R_1^2)\,x_1'(s). \tag{60}$$

Integrînd aceste relaţii în raport cu arcul s, obţinem

$$F_0\big|_{x_1=0} = 0, \quad F_0\big|_{R=R_0} = 0, \quad F_0\big|_{R=R_1} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)(R_0^2 - R_1^2)\,x_1, \tag{61}$$

ceea ce înlocuieşte condiţia la limită (26).

Totodată, ţinînd seama de (59) în (23) (unde intervertim de asemenea semnele : vezi (16)), deducem

$$\Delta \mathsf{F}_0 = -2\mu\tau - [(1+2\nu)/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_2/I_1)\,x_1\,. \tag{62}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (62) poate fi căutată ca sumă a soluţiei generale a ecuaţiei

$$\Delta \mathsf{F}_0^1 = -2\mu\tau\,, \tag{63}$$

cu o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\Delta \mathsf{F}_0^2 = -[(1+2\nu)/(1+\nu)]\,(\mathcal{R}_2/I_1)\,x_1\,. \tag{64}$$

Pentru cea dintîi, este firesc să alegem $\mathsf{F}_0^1 = \mu\tau\mathsf{f}$, unde f este funcţia deja determinată în § 15, pag. 256. Întrucît avem $\mathsf{f} = 0$ pe $\mathcal{L}$, rămîne să căutăm acea soluţie a ecuaţiei (64), care satisface şi condiţia la limită (61).

Pentru început, vom considera funcţia $A_1R^2x_1$, nulă pe componentele rectilinii ale lui $\mathcal{L}$, şi pentru care avem $\Delta(A_1R^2x_1) = 8A_1x_1$. Verificarea ecuaţiei (64) şi a primei condiţii (61) este deci asigurată, dacă alegem

$$A_1 = -\frac{1}{8}\,\frac{1+2\nu}{1+\nu}\,\frac{\mathcal{R}_2}{I_1} = -\frac{1+2\nu}{\pi(1+\nu)}\,\frac{\mathcal{R}_2}{R_0^4 - R_1^4}\,. \tag{65}$$

Pentru a satisface şi celelalte două condiţii (61), trebuie să adăugăm funcţiei $A_1R^2x_1$ o funcţie astfel aleasă, încît ecuaţia (64) şi prima condiţie (61) să rămînă verificate — aşadar o funcţie armonică, şi nulă pentru $x_1 = 0$. Luînd

$$\mathsf{F}_0^2 = (A_1R^2 + A_2' + A_3R^{-2})\,x_1\,, \tag{66}$$

căpătăm din (61) relaţiile

$$A_2' + A_3R_0^{-2} = -A_1R_0^2,\quad A_2' + A_3R_1^{-2} = -A_1R_1^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)\,(R_0^2 - R_1^2)\,,$$

de unde

$$A_2' = -(R_0^2 + R_1^2)A_1 - \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)\,R_1^2,\quad A_3 = \left[A_1 + \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)\right]R_0^2R_1^2, \tag{67}$$

ceea ce, ţinînd seama de valorile lui A_1 şi I_1, dă

$$A_2' = \frac{(1+2\nu)\,R_0^2 - (3+2\nu)\,R_1^2}{\pi(1+\nu)\,(R_0^4 - R_1^4)}\,\mathcal{R}_2,\quad A_3 = \frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)}\,\frac{R_0^2R_1^2}{R_0^4 - R_1^4}\,\mathcal{R}_2\,. \tag{68}$$

În expresia finală a funcţiei F mai intervine însă şi funcţia $\mathsf{F}_2(x_1)$ din (59). Notînd cu A_2 coeficientul termenului în x_1 căpătăm deci

$$A_2 = A_2' - \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/I_1)\,R_0^2 = -\frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)}\,\frac{1}{R_0^2 - R_1^2}\,\mathcal{R}_2\,. \tag{69}$$

Amintind acum expresia (15.102) a funcției lui Prandtl, putem scrie funcția lui Timoshenko sub forma finală

$$\mathsf{F}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\mu\tau\left[R^2(1+\cos 2\chi) + \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_{2h+1} R^{2h+1}\cos(2h+1)\chi\right] + \\ + (A_1 R^2 + A_2 + A_3 R^{-2})\, x_1\,, \tag{70}$$

unde expresiile (15.117) dau

$$B_{2h+1} = \begin{cases} \dfrac{16}{\pi}\dfrac{(-1)^h}{(2h-1)(2h+1)(2h+3)}\dfrac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} & \text{pentru } h \geqslant 0, \\ \dfrac{16}{\pi}\dfrac{(-1)^h}{(2h-1)(2h+1)(2h+3)}\dfrac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}} R_1^{-2h+1} & \text{pentru } h \leqslant 0. \end{cases} \tag{71}$$

Pentru coeficienții A_1, A_2, A_3 dispunem de expresiile (65), (69) și (68), sau încă, folosind și aci notația $k = R_1/R_0$:

$$A_1 = -\frac{1+2\nu}{\pi(1+\nu)}\frac{\mathcal{R}_2}{R_0^4(1-k^4)}, \quad A_2 = -\frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)}\frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2(1-k^2)}, \\ A_3 = \frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)}\frac{k^2}{1-k^4}\mathcal{R}_2. \tag{72}$$

Rămîne acum de determinat numai τ. În acest scop vom face uz de formula (19.17), așadar vom avea de calculat integralele (19.12). Pentru $\mathsf{C} = 2\mathsf{H}$ dispunem de formula (15.127). Funcția lui Prandtl va fi folosită aci sub forma ce rezultă din (15.94) și (15.120), iar funcția de torsiune a lui Saint-Venant, sub forma ce rezultă din (15.94) și (15.126).

În felul acesta, din a doua formulă (19.12) obținem mai întîi

$$\mathsf{H}_1 = 0\,, \tag{73}$$

dat fiind că funcțiile sin $(2h+1)\chi$ ce apar în $\mathsf{r}^*(R^*, \chi)$ sînt impare în intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$. Mai departe, avem pe rînd

$$\mathsf{H}_2 = -R_0^5\sum_{h=0}^{\infty}\int_k^1 \mathsf{r}_{2h+1}^*(R^*)\, R^{*2}\,\mathrm{d}R^*\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(2h+1)\chi\,\exp(\mathrm{i}\chi)\,\mathrm{d}\chi\,, \tag{74}$$

$$\mathsf{H}_3 = R_0^5\sum_{h=0}^{\infty}\int_k^1 \mathsf{f}_{2h+1}^*(R^*)\, R^{*2}\,\mathrm{d}R^*\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2h+1)\chi\,\exp(\mathrm{i}\chi)\,\mathrm{d}\chi. \tag{75}$$

Ținînd seama de formulele lui Euler, avem de calculat mai întîi integralele

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp\,[\mathrm{i}(2h+1)\chi]\exp(\mathrm{i}\chi)\,\mathrm{d}\chi = \begin{cases} 0 \text{ pentru } h \neq -1\,, \\ \pi \text{ pentru } h = -1\,, \end{cases} \tag{76}$$

și

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\,[-\mathrm{i}\,(2h+1)\chi]\,\exp\,(\mathrm{i}\chi)\,\mathrm{d}\chi = \begin{cases} 0 \text{ pentru } h \neq 0\,, \\ \pi \text{ pentru } h = 0\,. \end{cases} \tag{77}$$

Întrucît în (74), (75) intervin numai exponenți h ne-negativi, deducem că integralele corespunzătoare valorilor $h > 0$ sînt nule, în timp ce pentru $h = 0$ căpătăm

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\chi\,\exp\,(\mathrm{i}\chi)\,\mathrm{d}\chi = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\pi, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\chi\,\exp\,(\mathrm{i}\chi)\,\mathrm{d}\chi = \frac{1}{2}\,\pi. \tag{78}$$

Cu aceasta, relațiile (74), (75) se reduc la

$$H_2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\pi\,R_0^5\int_k^1 r_0^*(R^*)\,R^{*2}\,\mathrm{d}R^*, \quad H_3 = \frac{1}{2}\,\pi R_0^5\int_k^1 f_0^*(R^*)\,R^{*2}\,\mathrm{d}R^*. \tag{79}$$

Utilizînd aci (15.120), (15.126) și (15.112) pentru $h = 0$, găsim

$$\begin{aligned} &\int_k^1 r_0^*(R^*)\,R^{*2}\,\mathrm{d}R^* = (2/5\pi)\,(1 + 5k^2 - 5k^3 - k^5)\,, \\ &\int_k^1 f_0^*(R^*)\,R^{*2}\,\mathrm{d}R^* = (2/15\pi)\,(1 - 5k^2 + 5k^3 - k^5), \end{aligned} \tag{80}$$

și deci în definitiv

$$H_2 = -\frac{1}{5}\,\mathrm{i}R_0^5\,(1 + 5k^2 - 5k^3 - k^5), \quad H_3 = \frac{1}{15}\,R_0^5(1 - 5k^2 + 5k^3 - k^5). \tag{81}$$

Ținînd seama de valorile H_1, H_2, H_3, relația (19.17) devine acum

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3^0 = \mu\tau C + \frac{1}{15}\,R_0^5\Big[3\,(1 + 5k^2 - 5k^3 - k^5) + \\ + \frac{\nu}{1+\nu}\,(1 - 5k^2 + 5k^3 - k^5)\Big]\,\mathrm{Im}\,\alpha \end{aligned} \tag{82}$$

(relație valabilă pentru *orice* sarcină tangențială), unde C este dat de formula (15.127). *În cazul de față*, din (54)—(56) avem

$$\mathrm{Im}\,\alpha = \mathcal{R}_2/I_1 = 8\,\mathcal{R}_2/\pi R_0^4\,(1 - k^4)\,, \quad \mathcal{M}_3^0 = x_1^a\,\mathcal{R}_2\,, \tag{83}$$

unde x_1^a este abscisa punctului în care $\mathrm{i}\mathcal{R}_2$ intersectează Ox_1 (vezi (2.3)).

Odată cu determinarea lui τ din (82), funcția (70) este efectiv cunoscută, iar formulele (14) ne dau componentele tensiunii

$$\sigma_{31} = F_{,2}\,, \quad \sigma_{32} = -F_{,1} - \frac{1}{2}\,(\mathcal{R}_2/I_1)\,(x_1^2 + x_2^2)\,. \tag{84}$$

Este adesea convenabilă transcrierea funcției (70) sub forma complexă

$$\mathsf{F}(z, \bar{z}) = \mu\tau \mathsf{f}(z, \bar{z}) + \frac{1}{2}(A_1 z\bar{z} + A_2 + A_3 / z\bar{z})(z + \bar{z}), \qquad (85)$$

unde $\mathsf{f}(z, \bar{z})$ este dat în (15.119). Formula (12.6) se scrie acum

$$T(z, \bar{z}) = -2\mathrm{i}\mu\tau \mathsf{f}_{,\bar{z}} - \mathrm{i}[A_1(z^2 + 2z\bar{z}) + A_2 - A_3\bar{z}^{-2}] - \frac{1}{2}\mathrm{i}\alpha_2 z\bar{z}, \quad (86)$$

unde primul termen din membrul al doilea este dat de (15.121). Din (14.7) avem și

$$-2\mathrm{i}\mu\tau \mathsf{f}_{,\bar{z}} = \mu\tau(\overline{\psi'} + \mathrm{i}z). \qquad (87)$$

După cum se vede din (85), termenii ce deosebesc funcția de încovoiere de funcția de torsiune au (în exemplul de față) caracter elementar. Scriind F din (85) sub forma (19.27), putem separa aci un termen corespunzător încovoierii fără torsiune, și un termen torsional, al cărui coeficient se determină din (19.28).

Pentru a găsi τ_c și z_c, vom face uz de (19.18) și (19.20). Avem

$$\mu\tau_c = \frac{1}{4}[\nu/(1+\nu)]\,\mathrm{i}\,x_1^0(\alpha - \bar{\alpha}), \qquad (88)$$

și deci din (82) urmează

$$\mathcal{M}_c = \left\{ \frac{\nu}{3\pi(1+\nu)} R_0 \frac{1-k^3}{1-k^2} C - \frac{R_0^5}{30(1+\nu)}[(3+4\nu)(1-k^5) + 5(3+2\nu)k^2(1-k)] \right\} \mathrm{i}(\alpha - \bar{\alpha}). \qquad (89)$$

Întrucît din (54)—(56) avem

$$\partial(\alpha - \bar{\alpha})/\partial R = (2/\delta)(I_0 + \bar{I}) = 1/I_1 = 8/\pi R_0^4(1-k^4), \qquad (90)$$

deducem în definitiv

$$z_c = x_1^c = \frac{8}{15\pi(1+\nu)}\frac{R_0}{1-k^4}\left[(3+4\nu)(1-k^5) + 5(3+2\nu)k^2(1-k) - \frac{10\nu}{\pi}\frac{1-k^3}{1-k^2}\frac{C}{R_0^4}\right]. \qquad (91)$$

OBSERVAȚIA 2. În exemplul de față avem $\bar{R} = -R$; coeficientul α este însă funcție de cele *două* variabile $R, \bar{R}$, și derivarea trebuie efectuată în consecință; dacă am înlocui $\bar{R}$ cu $-R$ și am deriva apoi în raport cu R, rezultatul ar fi evident eronat.

OBSERVAȚIA 3. Condiția ca sarcina să realizeze încovoierea fără torsiune, este ca axa centrală a sistemului (de ecuație $\mathcal{R}_2 x_1^r - \mathcal{R}_1 x_2^r - \mathcal{M}_3^0 = 0$) să treacă prin centrul de încovoiere.

Întrucît aci avem $x_2^c = 0$, rezultă $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{R}_2 x_1^c$. Aceasta este o condiție de legătură între momentul rezultant față de origine, și componenta după Ox_2 a rezultantei. Componenta după Ox_1 a rezultantei poate fi oarecare — ceea ce era de așteptat, în virtutea simetriei secțiunii (vezi finele § 19).

Soluția obținută permite considerarea a două cazuri particulare importante : $k \to 0$, și $k \to 1$. Primul este cazul semicercului cu o slăbire semicirculară în origine. Soluția corespunzătoare se obține luînd $k \to 0$ în coeficienții calculați mai sus.

Se poate obține de aci și soluția problemei semicercului *fără* o astfel de slăbire. În acest caz trebuie să considerăm în (70) numai indici $h \geqslant 0$, și să luăm $k = 0$ și $h \geqslant 0$ în (71), (72). Pentru a ne convinge de aceasta, este suficient să reluăm raționamentul care a condus de la (62) la (70), să considerăm funcția lui Prandtl pentru *semicerc*, și să luăm în (66) $A_3 = 0$; din (61), ecuația pentru $R = R_1$ dispare, iar cea care corespunde valorii $R = R_0$ dă pentru A_2' aceeași valoare cu cea care rezultă din (68) pentru $R_1 \to 0$. Tensiunea tangențială se scrie deci tot sub forma (86), unde însă primul termen din membrul al doilea este dat de (15.121) *fără* termenii corespunzători puterilor negative ; termenul în A_3 nu există, iar cei rămași se calculează ținînd seama că $R_1 = k = 0$ (vezi (54), (56), (72) și (83)).

Gradul de torsiune la încovoiere pentru semicerc este dat de (82), (83) :

$$\mathcal{M}_3^0 = \mu \tau C + (8/15\pi)\,[(3 + 4\nu)/(1 + \nu)]\, R_0 \mathcal{R}_2\,, \qquad (92)$$

unde amintim că din (15.129) urmează

$$C = (8/\pi)\, 0{,}1168\, R_0^4\,. \qquad (93)$$

Aceste relații sînt valabile atît în cazul $k = 0$, cît și pentru $k \to 0$.

Utilizînd (93) în (91), obținem ușor pentru semicerc

$$\mathfrak{z}_c = (8/5\pi)\, R_0\, [1 + 0{,}018\, \nu/(1 + \nu)], \qquad (94)$$

de unde, întrucît avem $0 < \nu < \dfrac{1}{2}$, urmează

$$0{,}509\, R_0 < \mathfrak{z}_c < 0{,}515\, R_0\,. \qquad (95)$$

Dat fiind că pentru $k = 0$, din (52) avem

$$\mathfrak{z}_0 = (4/3\,\pi)\, R_0 = 0{,}424\, R_0, \qquad (96)$$

se vede că $\mathfrak{z}_c \neq \mathfrak{z}_0$. Același rezultat rămîne valabil în cazul $k \to 0$.

Ca și în problema torsiunii, constatăm că funcția F pentru semicerc (precum și parametrii globali τ_c, $\mathfrak{z}_c$ și C) se obține prin trecere la limită pentru $k \to 0$ în soluția pentru semicoroană. Dar, ca și în cazul torsiunii, apare și aci fenomenul de concentrare locală a tensiunilor, care deosebește cazurile $k = 0$ și $k \to 0$.

Pentru a pune acest fapt în evidență, vom face uz de expresiile (85) și (86). Considerînd un punct $z = R_1 \exp(i\chi)$ și făcînd $R_1 \to 0$, vom obține pentru primul termen din (86) valoarea (15.131). Din (83) și (72) urmează că α_2, A_1 și A_2 rămîn mărginiți pentru $R_1 \to 0$, în timp ce A_3 tinde spre zero. De aci conchidem

$$\lim_{R_1 \to 0} (A_1 z^2 + 2 A_1 z\bar{z} + A_2 - A_3 \bar{z}^{-2})|_{z = R_1 \exp(i\chi)} =$$

$$= -\frac{3 + 2\nu}{\pi (1 + \nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2} [1 + \exp(2 i\chi)]. \tag{97}$$

Introducînd acum (15.131) și (97) în (86), obținem în cazul-limită al semicoroanei pentru $R_1 \to 0$ (vezi și § 15, pag. 259):

$$T(0,0; \chi) = \left[-\frac{8}{3\pi} \mu \tau R_0 + \frac{3 + 2\nu}{\pi (1 + \nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2} \right] i [1 + \exp(2 i\chi)]. \tag{98}$$

Introducînd aci pe $\mu\tau$ din (92), (93), deducem

$$T(0, 0; \chi) = \left[-2{,}85 \frac{\mathcal{M}_3^0}{R_0^3} + \left(2{,}41 + 0{,}17 \frac{\nu}{1 + \nu}\right) \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2} \right] i [1 + \exp(2 i\chi)]. \tag{99}$$

Dacă repetăm acum același raționament pentru semicerc, ținînd seama că formulele (92), (93) rămîn valabile, că (15.131) se înlocuiește cu (15.132), iar termenul în A_3 dispare, obținem în loc de (99):

$$T(0,0) = \left[-2{,}85 \frac{\mathcal{M}_3^0}{R_0^3} + \left(2{,}41 + 0{,}17 \frac{\nu}{1 + \nu}\right) \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2} \right] i. \tag{100}$$

Cele spuse în § 15, pag. 259 pentru torsiune, rămîn deci valabile atît pentru componenta torsională, cît și pentru cea de încovoiere (independentă de τ) a tensiunii tangențiale complexe.

OBSERVAȚIA 4. Apariția persistentă a termenului $\exp(2i\chi)$ este legată de configurația ron[illegible]ei: în toate cazurile examinate pînă aci, punctele unghiulare ale lui $\mathcal{L}$ sînt intersecții ale unor arce analitice ce formează un unghi egal cu $\pi/2$.

Trecînd acum la celălalt caz-limită ($\varepsilon = 1 - k \to 0$: secțiune în semicoroană cu pereți subțiri), și reținînd termeni pînă la puterea a doua a grosimii reduse ε, obținem mai întîi din (83):

$$\alpha_2 = \frac{2 \mathcal{R}_2}{\pi R_0^4 \varepsilon} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{5}{4} \varepsilon^2\right), \tag{101}$$

iar din (72):

$$A_1 = -\frac{1+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{4R_0^4\varepsilon}\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{5}{4}\varepsilon^2\right),$$

$$A_2 = -\frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{2R_0^2\varepsilon}\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^2\right), \tag{102}$$

$$A_3 = \frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{4\varepsilon}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{3}{4}\varepsilon^2\right).$$

Mai departe, din (15.135), (73) şi (81) avem

$$C = 2H = \frac{1}{3}\pi R_0^4\varepsilon^3, \quad H_1 = 0,$$

$$H_2 = -2\,\mathrm{i}\,R_0^5\varepsilon\left(1-2\varepsilon+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right), \quad H_3 = \frac{1}{3}R_0^5\varepsilon^3, \tag{103}$$

iar din (88) deducem τ_c pentru încovoierea fără torsiune:

$$\mu\tau_c = -\frac{2\nu}{\pi^2(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^3\varepsilon}\left(1+\varepsilon+\frac{7}{12}\varepsilon^2\right). \tag{104}$$

Formula (91) dă afixul centrului de încovoiere sub forma

$$\mathfrak{z}_c = x_1^c = (4R_0/\pi)\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{4}\varepsilon^2\right). \tag{105}$$

Prin urmare, pentru ε suficient de mic, avem $\mathfrak{z}_c > R_0$, aşadar centrul de încovoiere este situat chiar *în afara* secţiunii, şi anume, contrar centrului de greutate, spre exteriorul cercului exterior.

Ţinînd seama de (103), formula (82) devine acum

$$\mathcal{M}_3^0 = \frac{1}{3}\pi\mu\tau R_0^4\varepsilon^3 + R_0^5\left\{2\varepsilon\left(1-2\varepsilon+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)+\frac{1}{3}[\nu/(1+\nu)]\varepsilon^3\right\}\mathrm{Im}\,\alpha, \tag{106}$$

de unde, ţinînd seama de (101) şi (104):

$$\mathcal{M}_c = (4/\pi)R_0\mathcal{R}_2\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{4}\varepsilon^2\right)+[\nu/3\pi(1+\nu)]R_0\mathcal{R}_2\varepsilon^3\left(1+\frac{4}{3}\varepsilon\right), \tag{107}$$

unde al doilea termen trebuie neglijat, iar cel dintîi coincide cu produsul dintre sarcina $\mathcal{R}_2$ şi abscisa centrului de încovoiere.

Relația (19.28) devine aci

$$\mathscr{M}_3^0 - \mathscr{M}_c = \frac{1}{3}\pi R_0^4 \varepsilon^3 \mu(\tau - \tau_c), \tag{108}$$

ceea ce permite determinarea lui τ pentru orice $\mathscr{M}_3^0$ dat.

Formulele pentru τ și $\mathfrak{z}_c$ sînt deosebit de utile atunci cînd problema *torsiunii* se rezolvă ușor. Astfel, soluția aproximativă a problemei torsiunii pentru secțiunea în formă de semi-coroană circulară (vezi §16, Observația de la pag. 276), va putea fi luată sub forma (16.43), (16.41):

$$\mathrm{r}(x_1, x_2) = -\gamma\chi, \quad \mathrm{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} R_0^2 (1 - R^{*2}) + \gamma \ln R^*. \tag{109}$$

Introducînd aceste expresii aproximative în (19.12), deducem pe rînd:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} R_0^4 \int_k^1 (1 - R^{*2}) R^* \, \mathrm{d}R^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\chi + R_0^2 \gamma \int_k^1 R^* \ln R^* \, \mathrm{d}R^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\chi, \\
H_1 &= - R_0^2 \gamma \int_k^1 R^* \, \mathrm{d}R^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \chi \, \mathrm{d}\chi = 0, \\
H_2 &= - R_0^3 \gamma \int_k^1 R^{*2} \, \mathrm{d}R^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(\mathrm{i}\chi) \chi \, \mathrm{d}\chi, \\
H_3 &= \frac{1}{2} R_0^5 \int_k^1 (1 - R^{*2}) R^{*2} \, \mathrm{d}R^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(\mathrm{i}\chi) \, \mathrm{d}\chi + \\
&\quad + R_0^3 \gamma \int_k^1 R^{*2} \ln R^* \, \mathrm{d}R^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(\mathrm{i}\chi) \, \mathrm{d}\chi.
\end{aligned} \tag{110}$$

Or, avem evident

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(\mathrm{i}\chi) \, \mathrm{d}\chi = 2, \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(\mathrm{i}\chi) \chi \, \mathrm{d}\chi = 2\mathrm{i}, \tag{111}$$

și încă, utilizînd (16.48) și notațiile (15.93):

$$\begin{aligned}
\int_k^1 R^* \ln R^* \, \mathrm{d}R^* &= -\frac{1}{4} [1 + k^2 (2 \ln k - 1)] = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon\right), \\
\int_k^1 R^{*2} \ln R^* \, \mathrm{d}R^* &= -\frac{1}{9} [1 + k^3 (3 \ln k - 1)] = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 (1 - \varepsilon).
\end{aligned} \tag{112}$$

Ținînd seama și de valoarea din (16.50) a constantei γ:

$$\gamma = a^2 \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{6} \varepsilon^2\right), \tag{113}$$

deducem din (110) valorile aproximative ale constantelor C, H_1, H_2, H_3 — care *coincid* cu valorile exacte deja obţinute în (103).

Prin urmare, soluţia destul de grosier *aproximativă* (109) a problemei torsiunii dă pentru τ şi $\mathfrak{z}_c$ valorile *exacte* — dacă ε este suficient de mic ($\varepsilon \leqslant 0,2$). Evident, aceasta se datoreşte faptului că τ şi $\mathfrak{z}_c$ depind de funcţia de torsiune numai sub o formă *integrală* (vezi § 19, pag. 308; § 16, pag. 270).

h) Rolul tensiunilor de torsiune în încovoiere

Să punem în evidenţă (cu titlu de exemplu) ponderea tensiunilor ce apar dacă sarcina este aplicată *în afara* centrului de încovoiere.

Vom nota — *numai în exemplul de faţă* — cu T_0 tensiunea tangenţială de încovoiere fără torsiune, şi cu T — tensiunea tangenţială totală dată de (8.10).

În cazul cercului, o sarcină $\mathcal{R}_1$ a cărei linie de acţiune este paralelă cu Ox_1 şi trece prin $(0, x_2^a)$, poate fi înlocuită cu o sarcină $\mathcal{R}_1$ aplicată în origine, *plus* un cuplu de moment $\mathcal{M}_3^0 = -\mathcal{R}_1 x_2^a$. Întrucît avem $\mathfrak{z}_c = \mathfrak{z}_0 = 0$, $\tau_c = 0$, sarcina $\mathcal{R}_1$ aplicată în origine dă încovoiere fără torsiune, în timp ce sarcina $\mathcal{M}_3^0$ provoacă torsiunea barei.

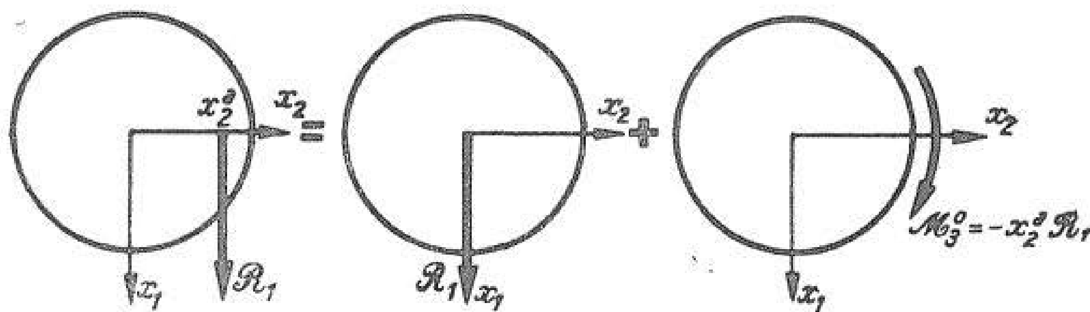


Fig. 5.20.4

În cazul semicoroanei circulare, o sarcină $\mathrm{i}\mathcal{R}_2$ paralelă cu Ox_2 şi a cărei linie de acţiune trece prin $(x_1^a, 0)$, poate fi înlocuită cu o sarcină $\mathrm{i}\mathcal{R}_2$ ce trece prin origine *plus* un cuplu de moment $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{R}_2 x_1^a$.

Din această figură, este intuitiv limpede că sarcina $\mathrm{i}\mathcal{R}_2$ aplicată în origine (care *nu* este centru de încovoiere) produce şi torsiune (pentru sarcina din figură, în sensul indicat de săgeata subţire). Cuplul de moment $\mathcal{R}_2 x_1^a$ produce (în cazul din figură, unde $x_1^a > 0$) torsiune în sensul opus. Pentru o *anumită* valoare x_1^a, torsiunea totală dispare: aceasta este desigur tocmai valoarea $x_1^a = x_1^c$.

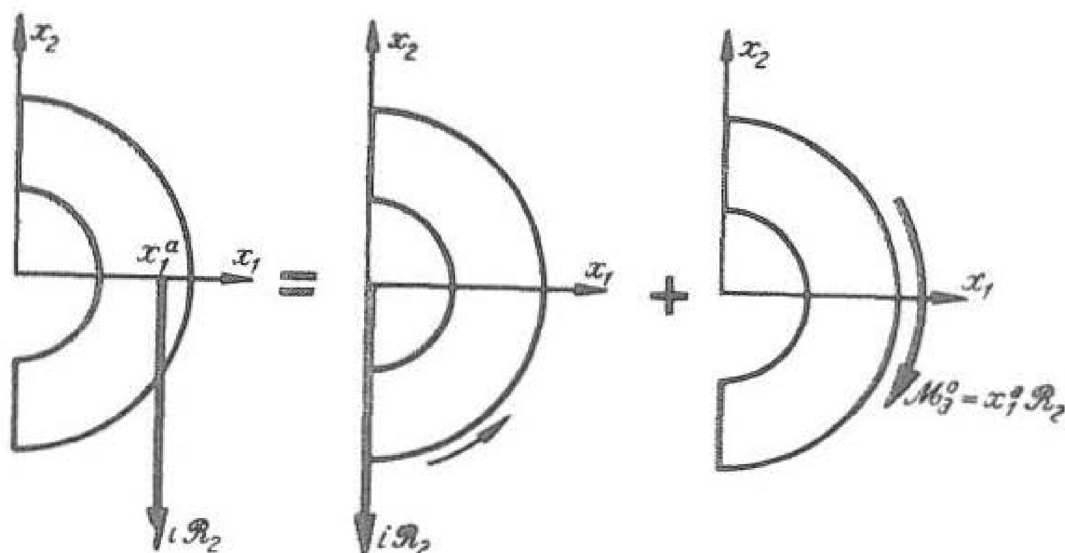


Fig. 5.20.5

Cazul secțiunii circulare. Luînd $k = 0$ în (11), obținem pentru o sarcină centrală $\mathcal{R}_1$:

$$T_0(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = P\ [(3 + 2\nu)\ R_0^2 - (1 + 2\nu)\ \mathfrak{z}^2 - 2\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}], \tag{114}$$

unde am notat

$$P = \mathcal{R}_1 / [2\pi (1 + \nu)\ R_0^4]\ . \tag{115}$$

Întrucît pentru cerc avem $\Gamma(x_1, x_2) \equiv 0$ și întrucît $c = 0$, în cazul sarcinii $\mathcal{R}_1$ aplicate excentric avem de adăugat la această expresie numai termenul $i\mu\tau\mathfrak{z}$ (vezi (8.10)). Din (19.8) deducem $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, iar din (19.9) urmează și $C_4 = 0$. Prin urmare, formula (19.10) se reduce la $\mathcal{M}_3^0 = \mu\tau C$, de unde

$$\mu\tau = -2\mathcal{R}_1\ x_2^a / \pi\ R_0^4\ . \tag{116}$$

Tensiunea tangențială corespunzătoare cazului general este deci

$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = P\,[(3 + 2\nu)\ R_0^2\ - 4i\ (1 + \nu)\ x_2^a\,\mathfrak{z}\ \ - (1 + 2\nu)\,\mathfrak{z}^2 - 2\,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}]. \tag{117}$$

Să determinăm punctul în care modulul $|T_0|$ (sau pătratul său $g = T_0\,\overline{T}_0$) își atinge maximul. Pentru aceasta, din (114) avem mai întîi

$$g(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = P^2\ [(3 + 2\nu)^2\ R_0^4 - (1 + 2\nu)\ (3 + 2\nu)\ R_0^2\ (\mathfrak{z}^2 + \bar{\mathfrak{z}}^2) -$$

$$- 4\,(3 + 2\nu)\ R_0^2\ \mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}} - 2\,(1 + 2\nu)\,(\mathfrak{z}^3\bar{\mathfrak{z}} + \mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}^3) + (5 + 4\nu + 4\nu^2)\,\mathfrak{z}^2\,\bar{\mathfrak{z}}^2]. \tag{118}$$

Prin derivare în raport cu $\mathfrak{z}$ (vezi (A.4.17)), obținem de aci ecuația

$$2\,(1 + 2\nu)\,(3 + 2\nu)\ R_0^2\bar{\mathfrak{z}} + 4\,(3 + 2\nu)\ R_0^2\,\bar{\mathfrak{z}} - 6\,(1 + 2\nu)\,\mathfrak{z}^2\,\bar{\mathfrak{z}} - 2\,(1 + 2\nu)\,\bar{\mathfrak{z}}^3 -$$

$$- 2\,(5 + 4\nu + 4\nu^2)\,\mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}}^2 = 0\,, \tag{119}$$

care posedă soluția evidentă $\mathfrak{z} = 0$. Pentru a găsi eventuale alte soluții, vom lua aci $\mathfrak{z} = R \exp(i\chi)$, vom împărți la R, și vom separa părțile reală și imaginară. După calcule elementare, obținem sistemul :

$$\begin{gathered}\{(3+2\nu)^2 R_0^2 - R^2 [5 + 4\nu + 4\nu^2 + 4(1+2\nu)\cos^2\chi]\}\cos\chi = 0\,,\\ \{(1-2\nu)(3+2\nu) R_0^2 - R^2 [5 + 4\nu + 4\nu^2 - 4(1+2\nu)\sin^2\chi]\}\sin\chi = 0\,.\end{gathered} \tag{120}$$

Luînd în prima ecuație $\cos\chi = 0$, obținem din cea de a doua o valoare $R^2 > R_0^2$, ceea ce nu are sens. Luînd în cea de a doua $\sin\chi = 0$, căpătăm din cea dintîi $R = \pm R_0$, așadar tocmai punctele-frontieră în care axa Ox_1 intersectează cercul. În fine, pentru $\cos\chi \neq 0$, $\sin\chi \neq 0$, deducem din nou $R^2 > R_0^2$, ceea ce nu are sens.

Rămîn așadar de considerat valorile $\mathfrak{z} = 0$, $\mathfrak{z} = \pm R_0$. Făcînd uz de formulele (A.4.16), (A.4.19) și (118), conchidem că punctul $\mathfrak{z} = 0$ este un extrem. Din a doua formulă (A.4.20) rezultă că acesta este un maximum. Din (115) și (118) obținem valoarea sa :

$$|T_0|_{\max} = T(0,0) = \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)}\,\frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}\,. \tag{121}$$

Pe de altă parte, din (114) se vede direct că $T_0(\pm R_0, \pm R_0) = 0$, astfel că $\mathfrak{z} = \pm R_0$ sînt puncte de minimum pentru $|T_0|$.

În ce privește valorile pe frontieră, din (114) avem

$$T_0|_{\mathcal{L}} = \frac{1+2\nu}{2\pi(1+\nu)}\,\frac{\mathcal{R}_1}{R_0^2}\,[1 - \exp(2i\chi)]\,, \tag{122}$$

de unde

$$|T_0|_{\mathcal{L}}^2 = \frac{(1+2\nu)^2}{4\pi^2(1+\nu)^2}\,\frac{\mathcal{R}_1^2}{R_0^4}\,4\sin^2\chi\,. \tag{123}$$

Evident, această funcție își atinge maximul pentru $\chi = \pm\pi/2$, unde

$$|T_0|_{\max}^{\mathcal{L}} = \frac{1+2\nu}{1+\nu}\,\frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}\,. \tag{124}$$

Comparînd (121) cu (124), rezultă că maximum maximorum este *cel din origine*.

Mai departe, din (114) — (117) avem pentru sarcina excentrică

$$T(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = T_0(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) - 2i\,(\mathcal{R}_1 x_2^a/\pi R_0^4)\,\mathfrak{z}\,. \tag{125}$$

Nu vom relua pentru această expresie calculele de mai sus, și ne vom mărgini la a considera tensiunile tangențiale într-un punct-frontieră în care vectorii T_0 și T au același suport, cum este cazul în punctele $\chi = \pi/2$. Obținem aci

$$T_0\Big|_{\mathcal{L}}^{\chi=\pm\pi/2} = \frac{1+2\nu}{1+\nu}\,\frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}\,, \qquad T\Big|_{\mathcal{L}}^{\chi=\pm\pi/2} = \left(\frac{1+2\nu}{1+\nu} \pm \frac{2x_2^a}{R_0}\right)\frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}\,. \tag{126}$$

Dacă de pildă $x_2^a = R_0$, în punctul-frontieră $\mathfrak{z} = iR_0$ obținem astfel

$$|T| = \frac{3+4\nu}{1+\nu}\,\frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}, \tag{127}$$

ceea ce depășește de 2,5 ori valoarea $|T_0|_{\max}^{\mathcal{L}}$ din (124), și de 2 ori valoarea $|T_0|$ din (121).

OBSERVAȚIA 5. Pentru determinarea punctului celui mai periclitat, trebuie desigur să ținem seama și de componenta σ_{33} (vezi (10.13) și (10.14)), care nu depinde însă de punctul de aplicare al sarcinii R.

Cazul secțiunii în formă de semicoroană cu pereți subțiri. Soluția problemei este dată în (86), unde trebuie să ținem seama de (101)—(108). Pentru a calcula τ, putem face uz de soluția aproximativă (109). Analogia membranei arată că această soluție rămîne valabilă și pentru calculul tensiunilor — la distanță suficientă de porțiunile rectilinii ale lui $\mathcal{L}$. Este de preferat să utilizăm aci funcția de torsiune sub forma (16.43), și să înlocuim primul termen din (86) cu ajutorul relației (87). În felul acesta, obținem :

$$T(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) \cong i\mu\tau\left[\mathfrak{z} - R_0^2\left(1-\varepsilon+\frac{1}{6}\varepsilon^2\right)\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}}\right] +$$

$$+\frac{i\mathcal{R}_2}{\pi(1+\nu)\varepsilon}\left\{\frac{1+\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{5}{4}\varepsilon^2}{4R_0^4}\left[(1+2\nu)\mathfrak{z}^2 - 2\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}\right]+\right.$$

$$\left.+(3+2\nu)\frac{1+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^2}{2R_0^2} + \frac{1}{4}(3+2\nu)\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{3}{4}\varepsilon^2\right)\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}^2}\right\}. \tag{128}$$

Termenul independent de τ tinde la infinit ca ε^{-1} pentru $\varepsilon \to 0$.

Dacă momentul sarcinii față de origine este $\mathcal{M}_c$ (așadar, dacă axa centrală trece prin $\mathfrak{z}_c$ și deci $\tau = \tau_c$), atunci din (104) conchidem că coeficientul termenului torsional (înlocuit în (128) prin expresia elementară provenită din soluția aproximativă) nu crește mai repede decît ε^{-1} pentru $\varepsilon \to 0$.

Pentru a evalua contribuția termenului torsional în (128), vom scrie

$$\mathfrak{z} - R_0^2\left(1-\varepsilon+\frac{1}{6}\varepsilon^2\right)(1/\bar{\mathfrak{z}}) = R\left[1-\left(1-\varepsilon+\frac{1}{6}\varepsilon^2\right)(R_0^2/R^2)\right]\exp\,(i\chi), \tag{129}$$

unde, întrucît avem $1-\varepsilon \leqslant R/R_0 \leqslant 1$, deducem că

$$-\varepsilon\left(1+\frac{7}{6}\varepsilon\right) \leqslant 1-\left(1-\varepsilon+\frac{1}{6}\varepsilon^2\right)(R_0^2/R^2) \leqslant \varepsilon\left(1-\frac{1}{6}\varepsilon\right). \tag{130}$$

Produsul $i\mu\tau f_{,\mathfrak{z}}$, înlocuit cu primul termen din (128), rămîne deci mărginit pentru $\varepsilon \to 0$, astfel că numai tensiunile de încovoiere propriu-zise tind la infinit cu ε^{-1}.

Pe de altă parte, din (108) rezultă că, dacă avem $\mathcal{M}_3^0 \neq \mathcal{M}_c$, factorul $\mu(\tau-\tau_c)$ crește ca ε^{-3} pentru $\varepsilon \to 0$, astfel că termenul datorat torsiunii crește în acest caz ca ε^{-2}, prin urmare,

cu mult mai repede decît termenii cu caracter elementar din (86), şi de asemenea cu mult mai repede decît în exemplul mai sus examinat al secţiunii circulare. Din (108) obţinem acum

$$\mu(\tau-\tau_c)=\frac{3}{\pi R_0^4\varepsilon^3}\left[\mathcal{R}_2 x_1^a-\frac{4\mathcal{R}_2 R_0}{\pi}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{4}\varepsilon^2\right)\right]. \qquad (131)$$

Pentru $x_1^a = x_1^c$, avem evident de aci $\tau = \tau_c$ (încovoiere fără torsiune). Să considerăm drept exemplu cazul $x_1^a = 0$ (sarcina aplicată în origine). Din (104) şi (131) avem acum

$$\mu\tau_c=\frac{2\nu}{\pi^2(1+\nu)}\frac{\mathcal{R}_2}{R_0^3\varepsilon}\left(1+\varepsilon+\frac{7}{12}\varepsilon^2\right),$$

$$\mu(\tau-\tau_c)=-\frac{12\mathcal{R}_2}{\pi^2R_0^3\varepsilon^3}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{4}\varepsilon^2\right). \qquad (132)$$

Să ne mărginim la a calcula $T(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})$ în punctul $\mathfrak{z}=R_0$. Grupul termenilor independenţi de τ din (128) are în acest punct suma

$$\frac{2i\mathcal{R}_2}{\pi R_0^2\varepsilon}\left[1+\frac{\nu}{2(1+\nu)}\varepsilon-\frac{1-\nu}{4(1+\nu)}\varepsilon^2\right]. \qquad (133)$$

Mai departe, din (128) obţinem pentru termenul ce are pe τ în factor, valoarea $i\mu\tau R_0\varepsilon(1-\varepsilon/6)$, astfel că din (132) urmează

$$i\mu\tau_c R_0\varepsilon\left(1-\frac{1}{6}\varepsilon\right)=i\frac{2\nu}{\pi^2(1+\nu)}\frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2}\left(1+\frac{5}{6}\varepsilon+\frac{5}{12}\varepsilon^2\right),$$

$$i\mu(\tau-\tau_c)R_0\varepsilon\left(1-\frac{1}{6}\varepsilon\right)=-i\frac{12\mathcal{R}_2}{\pi^2R_0^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon-\frac{1}{6}\varepsilon^2\right). \qquad (134)$$

Pentru $\nu = 0{,}3$ şi $\varepsilon = 0{,}1$, cele trei expresii din (133) şi (134) au respectiv valorile

$$6{,}4\,i\,(\mathcal{R}_2/R_0^2);\qquad 0{,}05\,i\,(\mathcal{R}_2/R_0^2);\qquad -113\,i\,(\mathcal{R}_2/R_0^2). \qquad (135)$$

După cum se vede, tensiunea tangenţială de încovoiere corespunzătoare coeficientului τ_c este neglijabilă; în schimb, cea corespunzătoare coeficientului $\tau-\tau_c$ este considerabilă.

Cele două cazuri examinate arată limpede rolul tensiunilor de torsiune care apar dacă sarcina este aplicată în afara centrului de încovoiere; aceste tensiuni sînt considerabil mai importante dacă avem de-a face cu secţiuni deschise cu pereţi subţiri, care rezistă în condiţii rele la torsiune.

§ 21. PROBLEMA ÎNCOVOIERII ÎN CONSOLĂ A BARELOR DE SECȚIUNE SIMPLU CONEXĂ. METODA REPREZENTĂRII CONFORME

Vom studia problema încovoierii în același cadru în care am studiat în § 17 problema torsiunii.

Întrucît, pentru $\mathscr{D}$ simplu conex, funcția $\varphi(z)$ este uniformă, problema se reduce la determinarea unei funcții *olomorfe*, din condiția la limită (11.1). Aspectul celui de al doilea membru al acestei condiții la limită, sensibil mai complicat decît cel din (17.1), face imposibilă construirea unui echivalent al metodei z, $\bar{z}$.

Fie deci cunoscută funcția de reprezentare și inversa sa

$$z = \omega(\zeta) \tag{1}$$

$$\zeta = \omega^{-1}(z). \tag{2}$$

Vom considera funcțiile transformate în planul ζ, (compară cu (17.8)):

$$\begin{aligned} \varphi_{(1)}(z) &= \varphi_{(1)}[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta), \\ \Phi_{(1)}(z) &= \mathrm{d}\varphi_{(1)}(z)/\mathrm{d}z = \Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta). \end{aligned} \tag{3}$$

Pentru a putea face uz de (11.1) va trebui să calculăm valorile la limită ale funcției (1) și ale derivatei sale. Avem deci (vezi (17.7))

$$\mathrm{t} = z|_{\mathscr{L}} = \omega(\sigma) = \omega^{+}, \quad \bar{\mathrm{t}} = \bar{z}\,|_{\mathscr{L}} = \overline{\omega(\sigma)} = \omega_{*}^{-}, \tag{4}$$

de unde

$$\begin{aligned} \mathrm{t}'(s) &= [\mathrm{d}z/\mathrm{d}s]|_{\mathscr{L}} = [\mathrm{d}\omega(\zeta)/\mathrm{d}\zeta]|_{\gamma}\,\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}s = \omega'(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}s, \\ \overline{\mathrm{t}'(s)} &= [\mathrm{d}\bar{z}/\mathrm{d}s]|_{\mathscr{L}} = [\mathrm{d}\overline{\omega(\zeta)}/\mathrm{d}\bar{\zeta}]|_{\gamma}\,\mathrm{d}\bar{\sigma}/\mathrm{d}s = -\,\sigma^{-2}\,\overline{\omega'(\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5}$$

de unde, ținînd seama de (A.11.35), urmează

$$\mathrm{t}'(s) = \omega'(\sigma)\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}s, \ \overline{\mathrm{t}'(s)} = \omega_{*}'(\sigma)\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}s. \tag{6}$$

Aceste relații sînt valabile pentru frontiere $\mathscr{L}$ de clasă C^2. Relații analoge se pot scrie pentru valorile la limită ale funcției $\varphi(\zeta)$ și ale derivatei sale.

Condiția la limită (11.1) poate fi acum transcrisă sub forma

$$\mu[\varphi'(\sigma) + \sigma^{-2}\,\overline{\varphi'(\sigma)}] = H(\sigma), \tag{7}$$

unde am notat

$$\begin{aligned} H(\sigma) = &\left[\mathrm{i}\mu\tau - \frac{1}{2}\,c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\,\alpha\,\overline{\omega(\sigma)} + \frac{1}{4(1+\nu)}\,\bar{\alpha}\,\omega(\sigma)\right]\overline{\omega(\sigma)}\,\omega'(\sigma) - \\ &-\left[\mathrm{i}\mu\tau + \frac{1}{2}\,c - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\,\bar{\alpha}\omega(\sigma) - \frac{1}{4(1+\nu)}\,\alpha\overline{\omega(\sigma)}\right]\sigma^{-2}\,\omega(\sigma)\overline{\omega'(\sigma)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Este vizibil că în cazul particular al torsiunii (cînd avem $\alpha = c = 0$, şi $\varphi(\mathfrak{z}) = \tau\psi(\mathfrak{z})$), atunci (7) şi (8) conduc la

$$\psi'(\sigma) + \sigma^{-2}\,\overline{\psi'(\sigma)} = \mathrm{i}\,[\overline{\omega(\sigma)}\omega'(\sigma) - \sigma^{-2}\,\omega(\sigma)\overline{\omega'(\sigma)}], \tag{9}$$

ceea ce coincide cu condiţia (17.11), derivată în raport cu arcul s.

În studiul problemei (7) putem face evident uz de metoda seriilor. Introducînd

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \zeta^n, \quad \varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \zeta^n \tag{10}$$

(unde ω_n sînt cunoscuţi) în (7) şi (8), obţinem prin identificare coeficienţii a_n, şi deci şi funcţia $\varphi(\mathfrak{z})$.

Metoda îşi păstrează valabilitatea şi pentru domenii dublu conexe; întrucît însă funcţia $\varphi_{(1)}(\mathfrak{z})$ are în acest caz un termen logaritmic (vezi (11.7) şi (11.9)), urmează că vom căuta soluţia sub forma

$$\varphi_{(1)}(\mathfrak{z}) = \gamma_1 \ln \mathfrak{z} + \varphi_{0(1)}(\mathfrak{z}), \quad \varphi_0(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, \zeta^n, \tag{11}$$

iar funcţia $H(\sigma)$ din (8) va fi modificată prin trecerea valorii provenite din termenul logaritmic, în membrul al doilea al condiţiei la limită.

Calculele necesare pentru a determina coeficienţii a_n sînt în principiu aceleaşi, dar apar în practică mult mai laborioase decît în cazul torsiunii. Notăm că acum coeficienţii depind şi de constantele elastice ale materialului, şi de sarcină. Metoda seriilor conduce aci la expresii de aspect greoi. Aceasta a fost metoda folosită de R. Capildeo [1]. Ea a fost reluată de către E. Deutsch [4], [6], pornind de la rezultatele (ulterioare) ale lui L. Milne-Thomson [1].

Încercările de a folosi aparatul reprezentării conforme în problema încovoierii sînt mai vechi. Astfel, menţionăm lucrările lui P. Kufarev [1] şi D. Avazaşvili [1]. Legate însă de reprezentarea soluţiei prin funcţiile de încovoiere ale lui Saint-Venant — extrem de incomode — aceste încercări nu au dus prea departe.

În cele ce urmează, vom prezenta soluţia dată acestei probleme de L. Milne-Thomson [1], [3], § 5.14. În comparaţie cu cea a lui Capildeo, ea este mult mai condensată — întrucît face uz de integralele de tip Cauchy — dar nu poate fi direct utilizată decît pentru domenii simplu conexe.

În acest scop, folosind pentru $\overline{\varphi'(\sigma)}$ relaţia analogă cu (6) şi ţinînd seama de (4) şi (6) pentru $\omega(\zeta)$, transcriem (7), (8) sub forma

$$\mu\,[\varphi'(\sigma) - \varphi'_*(\sigma)] = H(\sigma), \tag{12}$$

unde

$$H(\sigma) = \left[\mathrm{i}\mu\tau - \frac{1}{2}\,c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\,\alpha\omega_*(\sigma) + \frac{1}{4(1+\nu)}\,\bar\alpha\,\omega(\sigma)\right]\omega_*(\sigma)\,\omega'(\sigma) +$$
$$+ \left[\mathrm{i}\mu\tau + \frac{1}{2}\,c - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\,\bar\alpha\,\omega(\sigma) - \frac{1}{4(1+\nu)}\,\alpha\,\omega_*(\sigma)\right]\omega(\sigma)\,\omega'_*(\sigma). \tag{13}$$

Înmulţind ambii membri din (12) cu $\mathrm{d}\sigma/2\pi\mathrm{i}(\sigma-\zeta)$ şi integrînd pe γ, obţinem

$$\mu\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma-\mu\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma\frac{\varphi'_*(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma\frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma. \qquad (14)$$

Întrucît $\varphi'(\zeta)$ este olomorfă în $\mathcal{D}^+$, iar $\varphi'_*(\zeta)$ este olomorfă în $\mathcal{D}^-$, din formulele (A.10.1) şi (A.11.37) obţinem — ca şi în (17.31) —

$$\varphi'(\zeta)=\frac{1}{\mu}\,\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma\frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad \zeta\in\mathcal{D}^+.$$

(Am ţinut seama că din (A.11.34) urmează $\varphi'_*(\infty)=0$.)

Integrala din membrul al doilea depinde numai de $\omega(\zeta)$, aşadar de *geometria* secţiunii $\mathscr{D}$; prin urmare, singura deosebire dintre acest caz şi cel al torsiunii constă în faptul că aci avem de calculat *şase* integrale cu caracter de mărimi geometrice, în loc de una singură.

Funcţia $\varphi(\zeta)$ se obţine din (15) prin integrare în raport cu ζ şi, evident, este determinată abstracţie făcînd de o constantă arbitrară (vezi § 11, pag. 216).

Din (13) se vede că în $H(\sigma)$ intervin numai produse de valori la limită ale unor funcţii olomorfe în $\mathcal{D}^+$, cu valori la limită ale unor funcţii olomorfe în $\mathcal{D}^-$.

În cazul particular în care $\omega(\zeta)$ este raţională — şi desigur olomorfă în $\mathcal{D}^+$ — funcţia $\omega_*(\zeta)$ este de asemenea raţională, şi olomorfă în $\mathcal{D}^-_-$. Nici una din aceste funcţii nu poate avea poli pe γ, căci în acest caz $\mathscr{D}$ nu ar fi mărginit. Derivatele lor nu pot de asemenea avea poli pe γ. Prin urmare, dacă $\omega(\zeta)$ este o funcţie raţională, atunci $H(\sigma)$ este valoarea la limită a unei funcţii raţionale în $\mathcal{D}^+$, care posedă în $\mathcal{D}^+$ numai un număr *finit* de poli, şi e prelungibilă pe γ. Calculul integralei din (15) se face deci cu ajutorul formulei (A.10.20) — şi el se reduce la a scădea din $H(\sigma)$, cu σ înlocuit prin ζ, părţile principale din vecinătatea tuturor polilor săi conţinuţi în $\mathcal{D}^+$. Rezultatul este oarecum similar celui din (17.15) pentru cazul torsiunii.

În particular, dacă avem $H(\sigma)=\sum\limits_{n=-h}^{k}H_n\sigma^n$, atunci obţinem

$$\mu\varphi'(\zeta)=\sum_{n=0}^{k}H_n\,\zeta^n. \qquad (16)$$

În general, dacă $H(\sigma)$ este desfăşurabilă în serie Fourier, soluţia se obţine introducînd această serie în (15) şi integrînd termen cu termen — ceea ce conduce la o formulă de acelaşi tip cu (16), dar cu limita superioară de sumare $k=\infty$.

Toţi coeficienţii ce intervin în $H(\sigma)$ (ca şi constantele C_i din (19.10)) şi care depind numai de configuraţia domeniului $\mathscr{D}$, pot fi explicitaţi prin intermediul coeficienţilor ω_n.

Raționamentele din paragraful de față arată deci că, *dacă* reprezentarea conformă a domeniului $\mathscr{D}$ pe discul unitate este cunoscută, atunci problema încovoierii în consolă (sau — caz particular — problema torsiunii) este practic vorbind rezolvată. (Cazul domeniilor dublu-conexe reprezentabile conform pe o coroană circulară nu este principial mai complicat.) Prin urmare, dificultatea e redusă la găsirea reprezentării conforme a domeniului dat pe domeniul canonic adecvat. *Metoda lui Capildeo și Milne-Thomson dă așadar o soluție completă pentru tot ceea ce ține propriu-zis de teoria elasticității în aceste chestiuni.* În practică, rezolvarea acestor probleme devine dificilă pentru domeniile dublu conexe (tocmai datorită dificultății de a se construi efectiv funcțiile de reprezentare), și mai ales pentru domeniile de un ordin de conexiune superior (unde nici metoda seriilor, nici metoda integralelor de tip Cauchy nu mai pot fi direct utilizate). Din punct de vedere matematic, aceste chestiuni se subsumează chestiunilor similare privind problema plană a teoriei elasticității. (Vezi și finele § 18.)

§ 22. PROBLEMA ÎNCOVOIERII ÎN CONSOLĂ PENTRU BARE DE SECȚIUNE SIMPLU CONEXĂ. EXEMPLE

Vom da aci cîteva exemple de studiu a problemei încovoierii în consolă cu ajutorul metodei reprezentării conforme, reluînd unele din secțiunile pentru care în § 18 am studiat problema torsiunii.

a) Discul circular

Să considerăm funcția

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = R_0\zeta, \tag{1}$$

care reprezintă conform domeniul Δ^+, pe discul cu centrul în origine și de rază R_0. Întrucît avem $\mathfrak{z}_0 = 0$, expresia (21.8) devine

$$H(\sigma) = [(3 + 2\nu)/8(1 + \nu)]\, R_0^3\, [\alpha\sigma^{-2} + \bar{\alpha}]; \tag{2}$$

ținînd seama de (21.16), obținem

$$\mu\varphi'(\zeta) = [(3 + 2\nu)/8(1 + \nu)]R_0^3\, \bar{\alpha}$$

de unde, utilizînd (21.3) și (1), deducem

$$\varphi'_{(1)}(\mathfrak{z}) = [(3 + 2\nu)/4E]\, R_0^2\bar{\alpha}. \tag{3}$$

Întrucît avem evident (vezi (20.1)):

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}\,\pi R_0^4, \qquad I = 0, \qquad \delta = \frac{1}{4}\,\pi^2 R_0^8, \tag{4}$$

deducem din (4.12)

$$\alpha = 4\mathsf{R}/\pi R_0^4, \tag{5}$$

astfel că pentru componentele tensiunii urmează din (8.3), (8.10):

$$\sigma_{33} = (2/\pi R_0^4)(x_3 - l)(\mathsf{R}\bar{z} + \bar{\mathsf{R}}z),$$
$$\sigma_{31} + i\,\sigma_{32} = \frac{[(3+2\nu)R_0^2 - 2z\bar{z}]\,\mathsf{R} - (1+2\nu)\,z^2\bar{\mathsf{R}}}{2\pi(1+\nu)\,R_0^4} + i\,\mu\tau z. \tag{6}$$

Pentru determinarea lui τ vom face uz de (19.10). Întrucît $r(x_1, x_2) \equiv 0$, din (19.8) urmează $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, iar din (19.9) — unde $t = R_0 \exp(i\chi)$ — deducem și $C_4 = 0$. Dat fiind că din (15.4) avem $C = I_0 = \frac{1}{2}\pi R_0^4$, deducem în definitiv

$$\mathcal{M}_3^0 = \frac{1}{2}\pi R_0^4 \mu\tau, \tag{7}$$

ceea ce dă valoarea lui τ. Întrucît avem $\tau_c = 0$, urmează evident

$$z_c = 0. \tag{8}$$

O sarcină excentrică $\mathsf{R} \neq 0$ produce în general încovoiere cu torsiune. Luînd în (2.3) $\mathcal{M}_3 = 0$, obținem $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{R}_2 x_1^r - \mathcal{R}_1 x_2^r$, astfel că din (7) urmează acum $\tau \neq 0$. Făcînd să varieze afixul z_r, variază deci în (6) termenul $i\mu\tau z$. Dacă însă sarcina este dirijată diametral (de ex. $x_2^r = \mathcal{R}_2 = 0$), atunci avem $\mathcal{M}_3^0 = 0$, și torsiunea nu mai apare.

Componentele deplasării se obțin direct din (8.32).

Comparînd acest mod de a rezolva problema cu cel din § 20, *a* rezultă limpede avantajele metodei integralelor de tip Cauchy.

b) Cardioida

Problema torsiunii pentru aceeași secțiune a fost considerată în § 18, *b*. Să reluăm funcția de reprezentare *rațională* (chiar polinomială) și inversa ei (vezi § A.8, *c*):

$$z = \omega(\zeta) = a(1+\zeta)^2, \tag{9}$$

$$\zeta = \omega^{-1}(z) = (z/a)^{1/2} - 1. \tag{10}$$

Cantitățile D, z_0, I, I_0 necesare în studiul problemei încovoierii sînt determinate în (A.8.38)—(A.8.42). Introducînd aceste valori în (4.12), (4.8), obținem imediat

$$\alpha = 2(55\,\mathsf{R} + 8\bar{\mathsf{R}})/(21\cdot 47\,\pi a^4), \quad c = 5(\mathsf{R} + \bar{\mathsf{R}})/47\,\pi a^3, \tag{11}$$

astfel că componenta normală σ_{33} a tensiunii este cunoscută.

Pentru a determina $\varphi(z)$, avem mai întîi din (21.8)

$$H(\sigma) = 2a^2\left[i\mu\tau - \frac{1}{2}c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\alpha a\frac{(1+\sigma)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{4(1+\nu)}\bar{\alpha}a(1+\sigma)^2\right]\times$$
$$\times\frac{(1+\sigma)^3}{\sigma^2} + 2a^2\left[-i\mu\tau - \frac{1}{2}c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha}a(1+\sigma)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4(1+\nu)}\alpha a\frac{(1+\sigma)^2}{\sigma^2}\right]\frac{(1+\sigma)^3}{\sigma^3},$$

astfel că din (21.15) și (21.16) deducem

$$\frac{\mu\varphi'(\zeta)}{2a^2} = \left(i\mu\tau - \frac{1}{2}c\right)(\zeta+3) + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}a\alpha(\zeta+5) +$$
$$+ \frac{1}{4(1+\nu)}a\bar{\alpha}(\zeta^3 + 5\zeta^2 + 10\zeta + 10) - \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c\right) + \qquad (12)$$
$$+ \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}a\bar{\alpha}(\zeta^2 + 5\zeta + 10) + \frac{1}{4(1+\nu)}a\alpha.$$

Utilizînd încă (21.3) și (10), obținem în planul fizic

$$\mu\varphi'_{(1)}(z) = \frac{1}{4(1+\nu)}a\bar{\alpha}z + \frac{5+2\nu}{8(1+\nu)}a^2\bar{\alpha}(z/a)^{1/2} +$$
$$+\left[i\mu\tau - \frac{1}{2}c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}a\alpha + \frac{9+6\nu}{8(1+\nu)}a\bar{\alpha}\right]a + \qquad (13)$$
$$+\left[i\mu\tau - \frac{3}{2}c - \frac{3+4\nu}{4(1+\nu)}a\alpha + \frac{7+6\nu}{4(1+\nu)}a\bar{\alpha}\right]a(z/a)^{-1/2},$$

ceea ce permite calcularea componentelor σ_{31}, σ_{32}. Din (13) se obține imediat și funcția $\varphi_{(1)}(z)$, necesară pentru determinarea deplasărilor.

Pentru a găsi pe τ, avem de calculat integralele (19.8), ale căror valori se obțin cu ajutorul teoremei reziduurilor. (Întrucît $\omega(\zeta)$ este rațională, $\psi(\zeta)$ este de asemenea rațională, în cazul de față, un polinom.)

Din (18.6) obținem

$$r\big|_{\mathscr{L}} = \frac{1}{2}ia^2(\sigma^2 + 4\sigma - 4\sigma^{-1} - \sigma^{-2}), \qquad (14)$$

iar din (9) urmează

$$t'(s) = 2a(1+\sigma). \qquad (15)$$

Amintind că pe γ avem $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$, deducem

$$C_1 = ia^4 \oint_\gamma (\sigma^4 + 4\sigma^3 - 4\sigma - 1)(1+\sigma)^3\sigma^{-4}\,d\sigma,$$

de unde, întrucît integrandul are un singur pol de ordin 4 în origine, deducem (vezi (A.5.28)—(A.5.30))

$$C_1 = \mathrm{i}a^4 \cdot 2\pi\mathrm{i}(-54/3!) = 18\ \pi a^4, \tag{16}$$

ceea ce coincide desigur cu valoarea din (18.12).

În mod asemănător avem

$$C_2 = \mathrm{i}a^5 \oint_\gamma (\sigma^4 + 4\sigma^3 - 4\sigma - 1)(1+\sigma)^5 \sigma^{-6}\, \mathrm{d}\sigma = \mathrm{i}a^5 \cdot 2\pi\mathrm{i}\,(2\,880/5\,!) = -48\,\pi a^5\,; \tag{17}$$

$$C_3 = \mathrm{i}a^5 \oint_\gamma (\sigma^4 + 4\,\sigma^3 - 4\sigma - 1)(1+\sigma)^5 \sigma^{-4}\, \mathrm{d}\sigma = \mathrm{i}a^5 \cdot 2\pi\,\mathrm{i}\,(276/3\,!) = 92\,\pi a^5\,; \tag{18}$$

$$C_4 = 2a^5 \oint_\gamma (1+\sigma)^9 \sigma^{-4}\, \mathrm{d}\sigma = 336\,\pi\,\mathrm{i}a^5. \tag{19}$$

Utilizînd valoarea lui C din (18.10), ţinînd seama că avem $\mathrm{Im}\, C_1 = 0$, şi introducînd aci pe α din (11), obţinem din (19.10):

$$\mathcal{M}_3^0 = 17\,\pi\,a^4\,\mu\tau - [(37 + 66\,\nu)/42\,(1+\nu)]\,\mathrm{i}\,a\,(R - \bar{R}). \tag{20}$$

Pentru a determina centrul de încovoiere, avem din (19.18)

$$\mu\tau_e = -[5\nu/6\,(1+\nu)]\,a\,\mathrm{Im}\,\alpha = \{5\nu/[6.21(1+\nu)\,\pi a^3]\}\,\mathrm{i}\,(R - \bar{R}), \tag{21}$$

şi deci din (20) deducem

$$\mathcal{M}_e = -[(111 + 113\,\nu)/6 \cdot 21(1+\nu)]\,\mathrm{i}a\,(R - \bar{R}), \tag{22}$$

astfel că formula (19.20) dă în definitiv

$$\mathfrak{z}_e = x_1^e = [(111 + 113\nu)/63\,(1+\nu)]\,a. \tag{23}$$

Centrul de încovoiere este situat pe axa de simetrie. El nu coincide cu centrul de greutate, şi poziţia sa depinde foarte puţin de proprietăţile mecanice ale materialului:

$$x_1^0 = 1{,}667\ a, \quad 1{,}762\,a < x_1^e < 1{,}772\ a. \tag{24}$$

Dacă $R = 0$, atunci $\alpha = c = 0$, şi $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{M}_3$, astfel că problema se reduce la cea a torsiunii. Formula (12) devine acum

$$\varphi'(\zeta) = (2a^2/\mu)\,\mathrm{i}\,\mu\tau(2+\zeta), \tag{25}$$

de unde, întrucît pentru torsiune am notat $\varphi_{(1)}(\mathfrak{z}) = \tau\psi_{(1)}(\mathfrak{z})$, deducem

$$\tau\psi(\zeta) = 2\,\mathrm{i}a^2\tau \int (2+\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

adică

$$\psi(\zeta) = \mathrm{i}a^2(\zeta^2 + 4\zeta) + \mathrm{const.} \tag{26}$$

ceea ce coincide cu (18.5) — abstracţie făcînd de termenul constant, care se determină ca şi în § 18.

Dacă $\mathcal{M}_3 = 0$, atunci $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{R}_2 x_1^r - \mathcal{R}_1 x_2^r$, și din (20) se determină valoarea lui τ, în general ne-nulă, corespunzătoare torsiunii de încovoiere — care se manifestă chiar pentru $\mathcal{M}_3$ nul. Dacă afixul $\mathfrak{z}_r$ variază, atunci τ variază de asemenea, și în (12) apare un termen suplimentar de forma $i\mu\tau(2+\zeta)$, așadar tocmai un termen de forma (25), corespunzător funcției de torsiune (26). Dacă în particular sarcina este dirijată în lungul axei de simetrie, așadar $x_2^r = \mathcal{R}_2 = 0$, atunci $\mathcal{M}_3^0 = 0$, $\mathsf{R} - \bar{\mathsf{R}} = 0$, și (20) dă $\tau = 0$, ceea ce era de așteptat (vezi finele § 19).

c) *Lemniscata lui Bernoulli*

Problema torsiunii pentru această secțiune a fost tratată în § 18, exemplul **c**. Să considerăm funcția de reprezentare (care *nu este* rațională) și inversa ei

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = a(1+\zeta)^{1/2}, \tag{27}$$

$$\zeta = \omega^{-1}(\mathfrak{z}) = (\mathfrak{z}/a)^2 - 1. \tag{28}$$

Cantitățile D, ζ_0, I, I_0 sînt determinate în (A.8.51), (A.8.54), (A.8.58). Introducînd aceste valori în (4.12) și (4.8), obținem

$$\alpha = \frac{\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{16}\pi^2\right)\mathsf{R} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{16}\pi^2\right)\bar{\mathsf{R}}}{2\left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{16}\pi^2\right)a^4}, \qquad c = \frac{\pi(\mathsf{R}+\bar{\mathsf{R}})}{\left(\frac{8}{3} + \pi - \frac{1}{2}\pi^2\right)a^3}; \tag{29}$$

componenta σ_{33} a tensiunii este astfel determinată.

Pentru a găsi funcția lui Capildeo și Milne-Thomson, vom introduce mai întîi (A.8.50) în (21.8), de unde

$$\frac{2H(\sigma)}{a^2} = \left(i\mu\tau - \frac{1}{2}c\right)\sigma^{-1/2} + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}a\alpha(1+\sigma)^{1/2}\sigma^{-1} + \\ + \frac{1}{4(1+\nu)}a\bar{\alpha}(1+\sigma)^{1/2}\sigma^{-1/2} - \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c\right)\sigma^{-3/2} + \\ + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}a\bar{\alpha}(1+\sigma)^{1/2}\sigma^{-3/2} + \frac{1}{4(1+\nu)}a\alpha(1+\sigma)^{1/2}\sigma^{-2}, \tag{30}$$

astfel că în definitiv avem de calculat (vezi (21.15)) următoarele integrale

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma, \qquad F_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma,$$

$$F_3(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{\sigma}\sqrt{1+\sigma}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma, \qquad F_4(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma^2(\sigma-\zeta)}\,d\sigma, \tag{31}$$

$$F_5(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma^2(\sigma-\zeta)}\,d\sigma, \qquad F_6(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma^2(\sigma-\zeta)}\,d\sigma.$$

Un calcul elementar de descompunere în fracţii simple ne dă (vezi şi (18.19), (18.20))

$$\frac{1}{\sigma^2(\sigma-\zeta)} = -\frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{1}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{\sigma}\right). \tag{32}$$

Raţionînd ca în (18.18)–(18.22), sîntem conduşi la a considera integralele

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma, \quad f_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma,$$

$$f_3(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma, \tag{33}$$

cu ajutorul cărora funcţiile introduse în (31) se pun sub forma

$$F_j(\zeta) = \zeta^{-1}\,[f_j(\zeta) - f_j(0)],$$
$$F_{j+3}(\zeta) = \zeta^{-2}[f_j(\zeta) - f_j(0)] - \zeta^{-1} f_j'(0), \qquad j = 1, 2, 3 \tag{34}$$

ceea ce reduce problema la calcularea integralelor f_1, f_2, f_3 din (33).

Întrucît funcţia $\sqrt{1+\zeta}$ este olomorfă în D^+ şi este uniformă şi continuă inclusiv pe γ (punctul critic algebric $\zeta = -1$ de pe γ nu poate fi ocolit pe nici un drum conţinut în întregime în D^+), rezultă prin simpla aplicare a formulei lui Cauchy că

$$f_1(\zeta) = \sqrt{1+\zeta}, \quad f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = \frac{1}{2}. \tag{35}$$

Funcţia $f_2(\zeta)$ coincide cu $f(\zeta)$ din (18.21); folosind expresia ei (18.25), şi dezvoltarea în serie (18.26), deducem

$$f_2(\zeta) = (2/\pi)\,(1 + \sqrt{\zeta}\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{\zeta}), \quad f_2(0) = 2/\pi, \quad f_2'(0) = 2/\pi. \tag{36}$$

Ne rămîne de calculat $f_3(\zeta)$, pentru care vom repeta raţionamentele din (18.21) – (18.25). Anume, întrucît funcţia $\sqrt{1+Z}\,\sqrt{Z}\,(Z-\zeta)^{-1}$ are în D^+ polul simplu $Z = \zeta \neq 0$ şi punctul critic $Z = 0$, putem aplica

teorema reziduurilor la domeniul $Д^+$ cu o tăietură în lungul semi-axei negative. Notînd pe tăietură $Z = -T$ şi ţinînd seama că $\sqrt{Z}$ ia valorile $\pm i\sqrt{T}$ pe cele două borduri, în timp ce $\sqrt{1+Z}$ ia valoarea $\sqrt{1-T}$ pe ambele borduri ale tăieturii, obţinem pentru valoarea reziduului în ζ expresia

$$\sqrt{\zeta(1+\zeta)} = f_3(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_1^0 \frac{\sqrt{1-T}\, i\sqrt{T}}{T+\zeta}\, dT + \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{-\sqrt{1-T}\, i\sqrt{T}}{T+\zeta}\, dT,$$

de unde

$$f_3(\zeta) = \sqrt{\zeta(1+\zeta)} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{T-T^2}}{T+\zeta} dT. \tag{37}$$

Făcînd substituţia evidentă

$$\sqrt{T-T^2} = uT,\ T = 1/(u^2+1),\ dT = -2u\, du/(u^2+1)^2, \tag{38}$$

obţinem pe rînd

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{T-T^2}}{T+\zeta} dT = \frac{2}{\zeta}\int_0^\infty \frac{u^2\, du}{(u^2+1)^2\,(u^2+1+\zeta^{-1})} = \frac{2}{\zeta}\Big[-\zeta\int_0^\infty \frac{du}{(u^2+1)^2} +$$

$$+ \zeta(1+\zeta)\int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} - \zeta(1+\zeta)\int_0^\infty \frac{du}{u^2+1+\zeta^{-1}} = -2\Big[\frac{1}{2}\,\frac{u}{u^2+1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u\Big]_0^\infty + 2(1+\zeta)\operatorname{arc\,tg} u\Big|_0^\infty -$$

$$-2(1+\zeta)\sqrt{\frac{\zeta}{1+\zeta}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\zeta}{1+\zeta}}\,u\Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{1}{2}\pi + 2(1+\zeta)\frac{1}{2}\pi - 2\sqrt{\zeta(1+\zeta)}\,\frac{1}{2}\pi,$$

astfel că din (37) căpătăm

$$f_3(\zeta) = \zeta + \frac{1}{2},\quad f_3(0) = \frac{1}{2},\quad f_3'(0) = 1. \tag{39}$$

Pentru funcţiile definite în (33) obţinem acum[16]), făcînd uz de (34), expresiile :

$$\begin{aligned} &F_1 = \frac{\sqrt{1+\zeta}-1}{\zeta},\ F_2 = \frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}},\quad F_3 = 1,\\ &F_4 = \frac{\sqrt{1+\zeta}-1}{\zeta^2} - \frac{1}{2\zeta},\ F_5 = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\zeta}}{\zeta\sqrt{\zeta}} - \frac{1}{\zeta}\Big],\ F_6 = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

---

[16]) Integralele (A.8.53) şi (A.8.57) care intervin în studiul acestei probleme pot fi calculate ţinînd seama că

$$\oint_\gamma \sqrt{\frac{1+\sigma}{\sigma}}\, d\sigma = 2\pi i\, f_3(0) = \pi i,\qquad \oint_\gamma \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma}\, d\sigma = 2\pi i\, f_1(0) = 2\pi i.$$

Toate aceste funcții sînt olomorfe în $Д^+$ (inclusiv în origine); funcția $\varphi'(\zeta)$ are deci aceeași proprietate. Din (21.15), (30), (31) și (40) obținem acum

$$\mu\varphi'(\zeta) = \frac{1}{2}a^2\left[\left(\mathrm{i}\mu\tau - \frac{1}{2}c\right)\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}a\alpha\frac{\sqrt{1+\zeta}-1}{\zeta} + \right.$$
$$+ \frac{1}{4(1+\nu)}a\bar{\alpha} - \left(\mathrm{i}\mu\tau + \frac{1}{2}c\right)\frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\zeta}}{\zeta\sqrt{\zeta}} - \frac{1}{\zeta}\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{4(1+\nu)}a\alpha\left(\frac{\sqrt{1+\zeta}-1}{\zeta^2} - \frac{1}{2\zeta}\right)\right]. \tag{41}$$

Ținînd seama de reprezentarea inversă (28), se poate scrie explicit funcția $\varphi'_{(1)}(\delta)$, ceea ce permite calcularea tensiunii tangențiale. Funcția $\varphi_{(1)}(\delta)$ se obține prin integrarea expresiei deduse pentru $\varphi'_{(1)}(\delta)$.

Pentru determinarea lui τ ne vom servi de (19.10), unde integralele C_i din (19.8) se calculează cu ajutorul valorii la limită $r|_{\mathscr{L}}$, cunoscute din (18.32). Pentru aceasta, vom face uz de funcțiile $f_1(\zeta)$ și $f_3(\zeta)$ (vezi (33), (35) și (39)), precum și de integralele

$$N_h = \oint_\gamma \sigma^h\sqrt{1+\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{2}{3}\oint_\gamma \sigma^h\,\mathrm{d}(1+\sigma)^{3/2} =$$
$$= \frac{2}{3}\sigma^h(1+\sigma)^{3/2}\Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} - \frac{2}{3}h\oint_\gamma \sigma^{h-1}(1+\sigma)\sqrt{1+\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{2h}{2h+3}N_{h-1}. \tag{42}$$

Întrucît avem $N_0 = 0$, urmează prin recurență

$$N_h = 0, \qquad h = 0, 1, 2, \ldots \tag{43}$$

Să introducem acum (21), (A.8.50) și (18.32) în expresiile (19.8), (19.9). Prima din ele a fost deja calculată în (18.40):

$$C_1 = (2/\pi)\,a^4. \tag{44}$$

În expresia lui C_2 apar integralele N_h definite mai sus, astfel că

$$C_2 = \frac{a^5}{4\pi}\mathrm{i}\oint_\gamma\left[-\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}} + 4\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\sigma^h\right]\frac{(1+\sigma)\sqrt{1+\sigma}}{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma =$$
$$= \frac{a^5}{4\pi}\mathrm{i}\left[-\pi\oint_\gamma\frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma - \pi\oint_\gamma\frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma + 4\oint_\gamma\frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\right] =$$
$$= \frac{a^5}{4\pi}\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left[-\pi f_3'(0) - \pi f_3(0) + 4f_1(0)\right],$$

de unde

$$C_2 = \left(\frac{3}{4}\pi - 2\right)a^5. \tag{45}$$

Calculul integralei C_3 prezintă dificultăți suplimentare, care pot fi însă ocolite calculîndu-se conjugata sa — în care intervin de asemenea termeni în N_k:

$$\overline{C}_3=\oint_{\mathscr{L}} r\bar{t}\bar{t}\,d\bar{t}=-\frac{a^5}{4\pi}i\oint_{\gamma}\left[-\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}}+4\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\sigma^h\right]\frac{(1+\sigma)\sqrt{1+\sigma}}{\sigma^2}d\sigma=$$

$$=-\frac{a^5}{4\pi}i\left[-\pi\oint_{\gamma}\frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma^3}d\sigma-\pi\oint_{\gamma}\frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma^2}d\sigma+4\oint_{\gamma}\frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma^2}d\sigma+\right.$$

$$\left.+4\oint_{\gamma}\frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma}d\sigma-\frac{4}{3}\oint_{\gamma}\frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma}d\sigma=\right.$$

$$=-\frac{a^5}{4\pi}i\cdot 2\pi i\left[-\frac{1}{2}\pi f_3''(0)-\pi f_3'(0)+4f_1'(0)+\frac{8}{3}f_1(0)\right],$$

de unde

$$C_3=\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\pi\right)a^5. \tag{46}$$

În fine, pentru C_4 obținem

$$C_4=\frac{1}{2}a^5\oint_{\gamma}\frac{(1+\sigma)\sqrt{1+\sigma}}{\sigma}d\sigma=\frac{1}{2}a^5\,2\pi i\,f_1(0),$$

de unde

$$C_4=i\pi a^5. \tag{47}$$

Utilizînd valoarea lui C din (18.41), și ținînd seama că $\operatorname{Im} C_1=0$, obținem acum din (19.10) și (29)

$$\mathscr{M}_3^0=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right)a^4\mu\tau-\frac{\frac{10}{3}-\pi+\left(2-\frac{1}{2}\pi\right)\nu}{\left(\pi-\frac{8}{3}\right)(1+\nu)}a\,i\,(R-\overline{R}). \tag{48}$$

Ca și în cazul cardioidei, în membrul al doilea al acestei relații apare numai componenta $\mathscr{R}_2$ — ceea ce se explică prin faptul că avem $I_{12}=0$. Componenta $\mathscr{R}_1$ intervine însă în expresia momentului $\mathscr{M}_3^0$.

Pentru a determina $\mathfrak{z}_c$, calculăm din (19.18), (29) și (A.8.54)

$$\mathscr{M}_c=-\frac{\pi\nu a}{8(1+\nu)}\operatorname{Im}\alpha=\frac{\pi\nu}{2\left(\pi-\frac{8}{3}\right)(1+\nu)a^3}i(R-\overline{R}), \tag{49}$$

astfel că din (48) urmează

$$\mathscr{M}_c=-\frac{\left(\frac{10}{3}-\pi\right)+\left(3-\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{8}\pi^2\right)\nu}{\left(\pi-\frac{8}{3}\right)(1+\nu)}a\,i(R-\overline{R}), \tag{50}$$

şi deci, din (19.20):

$$\mathfrak{z}_c = x_1^c = \frac{\left(\frac{20}{3} - 2\pi\right) + \left(6 - \pi - \frac{1}{4}\pi^2\right)\nu}{\left(\pi - \frac{8}{3}\right)(1+\nu)} a \cong \frac{0{,}807 + 0{,}823\,\nu}{1+\nu} a. \quad (51)$$

Centrul de încovoiere este situat pe axa de simetrie; el nu coincide cu centrul de greutate, şi poziţia sa depinde numai în mică măsură de proprietăţile mecanice ale materialului:

$$x_1^0 = 0{,}785\, a, \quad 0{,}807\, a \leqslant x_1^c \leqslant 0{,}812\, a. \quad (52)$$

Dacă $R = 0$, atunci avem $\alpha = c = 0$ şi $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{M}_3$, astfel că problema se reduce la cea a torsiunii. Din (41) obţinem acum

$$\mu\,\varphi'(\zeta) = \frac{1}{2} a^2\, \mathrm{i}\, \mu\tau \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} - \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\zeta}}{\zeta\sqrt{\zeta}} + \frac{1}{\zeta}\right], \quad (53)$$

de unde, ţinînd seama de dezvoltarea în serie (18.26), obţinem

$$\mu\,\tau\,\psi(\zeta) = \frac{a^2}{\pi}\mathrm{i}\,\mu\,\tau \int\left[\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\zeta^h - \sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\zeta^{h-1} + \frac{1}{\zeta}\right]\mathrm{d}\zeta, \quad (54)$$

de unde, abstracţie făcînd de o constantă complexă arbitrară:

$$\psi(\zeta) = \frac{a^2}{\pi}\mathrm{i}\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\left(\frac{1}{2h+1} + \frac{1}{2h+3}\right)\frac{\zeta^{h+1}}{h+1} =$$
$$= \frac{2a^2}{\pi}\mathrm{i}\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\left(\frac{1}{2h+1} - \frac{1}{2h+3}\right)\zeta^{h+1} =$$
$$= \frac{2a^2}{\pi}\mathrm{i}\left[\zeta\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\zeta^h + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\zeta^h\right]$$

şi deci

$$\psi(\zeta) = \frac{2a^2}{\pi}\mathrm{i}(1+\zeta)\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}\zeta^h - \frac{2a^2}{\pi}\mathrm{i}, \quad (55)$$

ceea ce — abstracţie făcînd de o constantă — coincide cu (18.30).

Dacă avem $\mathcal{M}_3 = 0$ şi afixul $\mathfrak{z}_r$ variază, atunci τ variază de asemenea, şi în (41) apare un termen suplimentar tocmai de forma (53), care conduce la o componentă torsională (55).

d) Alte metode şi probleme

Problema încovoierii nu diferă în principiu de cea a torsiunii. Totuşi, soluţiile efective sînt mult mai puţin numeroase.

O analiză a rezultatelor clasice este datorată lui J. Geckeler [1], capitolul 3. Menţionăm încă soluţiile lui R. Capildeo [1] (melcul lui Pascal, coroana circulară excentrică); B. Galerkin

[2], volumul 1 (obținute cu ajutorul funcțiilor lui Saint-Venant pentru problema încovoierii); A. Stevenson [1] (sector circular, triunghi dreptunghi isoscel). Printre profilele laminate, amintim cazul celui în dublu T, studiat de M. Sarkisian [1]. Încovoierea (și torsiunea) pentru secțiuni dreptunghiulare și pentru unele secțiuni reprezentabile conform pe acestea sînt studiate de către G. Wozniak [1]. Secțiuni dublu conexe sînt considerate de L. Kapanian [1], M. Naiman [1], I. Serebrennikova [1] (cu utilizarea funcției lui Timoshenko, sau cu ajutorul metodei reprezentării conforme). Vezi și D. Topolianski [1] (secțiune eliptică, prin intermediul unei reprezentări conforme aproximative).

Metodele lui Schwarz-Mihlin și Șerman (vezi § 5.18, pag. 301) își păstrează și aci întreg interesul. (Aplicații efective aparțin și lui I. Amenzade : vezi D. Șerman [8], [9].) Pentru folosirea metodelor variaționale, vezi L. Leibenzon [2]. Unele analogii electrice sînt utilizate de B. Azimov et al. [1]; I. Blagoveșcenski și P. Filciakov [1].

CAPITOLUL 6

PROBLEMA PLANĂ

§ 1. GENERALITĂŢI

Tehnica foloseşte adesea corpuri elastice care nu sînt masive, ci au una din dimensiuni (grosimea) mică în raport cu celelalte două. Fuselajul de avion, corpul de navă, acoperişurile autoportante, profilele laminate, rezervoarele — iată cîteva exemple. Studiul acestor corpuri constituie azi o teorie cu probleme şi metode proprii : *teoria plăcilor curbe*. Din bogata literatură consacrată ei, menţionăm : A. Goldenveizer [1], [4]; V. Novojilov [4]; S. Timoshenko şi S. Woinowsky-Krieger [1]; V. Visarion [1], [2]; V. Z. Vlasov [3]. Vezi şi P. Naghdi [2]; Iu. Rabotnov [1]. Pentru originile teoriei, vezi A. Love [1], capitolele 22—24. Pentru plăci curbe anizotrope, vezi S. Ambarţumian [1].

Un caz particular important de astfel de corpuri îl prezintă cele ce pot fi privite ca elemente *plane* materializate, numite pe scurt *plăci*.

Problema matematică corespunzătoare este — în primă aproximaţie — identică cu cea a echilibrului *corpurilor cilindrice foarte lungi*, solicitate de sarcini ce nu variază în lungul generatoarelor — aşadar aflate într-o stare oarecum complementară celor antiplane.

Pentru astfel de corpuri, ecuaţiile se simplifică (deşi nu atît de mult ca pentru starea antiplană), şi sîntem conduşi la probleme bidimensionale : avem de-a face cu funcţii de *două* variabile, definite — ca şi în problema antiplană — în secţiunea normală a cilindrului. Problema corespunzătoare se numeşte *problema plană a teoriei elasticităţii.*

În acest cadru, problemele la limită fundamentale sînt azi rezolvate, cel puţin în principiu. Dimpotrivă, probleme ca cea a cilindrului solicitat de sarcini oarecari pe suprafaţa laterală ; a încovoierii plăcilor groase ; a teoriei neliniare a plăcilor etc. — sînt încă departe de o soluţie definitivă.

Dacă în problema antiplană soluţia depinde în ultimă instanţă de determinarea *unei* funcţii de o variabilă complexă — în problema plană avem de-a face cu *două* astfel de funcţii.

Ca şi problema antiplană, problema plană constituie un model clasic (deşi mai puţin simplu) de utilizare a metodei semi-inverse.

Ideile fundamentale în studiul cu mijloace moderne al problemei plane îşi au originea în lucrările lui G. Kolosov [1] — [8], şi şi-au găsit o dezvoltare importantă în lucrările lui N. Mushelişvili [1] — [5] şi ale şcolii sale. O expunere detaliată a acestui cerc de idei este dată de I. Sokol-

nikoff [2], capitolul 6. Rezultate noi aparțin lui S. Belonosov [2]; A. Green și W. Zerna [1], capitolele 6 și 8; G. Grioli [3], capitolul 8; L. Milne-Thomson [2]; G. Savin [1]. Vezi de asemenea I. Babuska et al. [1]. Vezi încă articolele de analiză ale lui J. Goodier [3], [4]; N. Mushelișvili [5], capitolul 8 (probleme recente), și [5]; I. Sneddon și D. Berry [1]; D. Șerman [6], [8]; P. P. Teodorescu [3]; I. Vekua și N. Mushelișvili [1].

În cazul corpurilor neomogene sau anizotrope, dificultățile cresc considerabil. Pentru rezultatele fundamentale în cazul corpurilor anizotrope, vezi J. Brilla [1]; A. Green și W. Zerna [1], capitolul 9; S. Lehnițki [1], [2] (cap. 3 și 4); L. Milne-Thomson [2], capitolul 7.

Pentru teoria neliniară, vezi J. Ericksen și C. Truesdell [1]; A. Green și J. Adkins [1], capitolele 3, 4 și 6; C. Truesdell și R. Toupin [1], §§ 60–64.

Pentru unele probleme dinamice, vezi J. Miklowitz [2]; W. Nowacki [1], capitolele 9 și 10; R. Rosenfeld și J. Miklowitz [1].

§ 2. STAREA DE DEFORMAȚIE PLANĂ. (CILINDRU ELASTIC FOARTE LUNG)

Să considerăm un cilindru elastic omogen și izotrop. Vom nota secțiunea sa cu $\mathscr{D}$, și frontiera acesteia cu $\mathscr{L}$ (vezi § 5.2, pag. 167). Originea O va fi aleasă arbitrar într-o secțiune oarecare, iar axele Ox_1x_2 vor fi alese în $\mathscr{D}$ în așa fel încît sistemul $Ox_1x_2x_3$ (unde axa Ox_3 este paralelă cu generatoarele) să fie un sistem trirectangular drept.

Vom utiliza ecuațiile de echilibru neomogene (4.1.2):

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{1}$$

și ecuațiile de compatibilitate neomogene din (4.9.6):

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{F} - F_{i,j} - F_{j,i}. \tag{2}$$

Întrucît — ca și în problema antiplană — vom integra ecuațiile în tensiuni, ne vor fi necesare relațiile lui Hooke sub forma (3.4.19):

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E}[\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk})]\,(!!!), \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}. \tag{3}$$

Amintim încă ecuațiile geometrice (4.1.1), expresiile componentelor rotației locale (1.5.5), și relațiile lui Cauchy (2.3.3):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{4}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \tag{5}$$

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij}n_j. \tag{6}$$

Să presupunem că forțele de volum și datele la limită sînt de așa natură, încît nimic să nu modifice starea elastică în trecerea de la o secțiune $x_3 =$ const. la alta (monotonie după Ox_3). Pentru aceasta, vom lua

$$F_1 = F_1(x_1, x_2); \quad F_2 = F_2(x_1, x_2); \quad F_3 = 0. \tag{7}$$

Spre deosebire de capitolul 5, cuvîntul „cilindru" are deocamdată accepțiunea corectă: nu este vorba despre „baze", și condiții la limită se pot formula numai pe suprafața laterală. Liniile care separă porțiunile în care datele sînt formulate în deplasări, de porțiunile în care ele sînt formulate în tensiuni, sînt deci niște generatoare; ele definesc pe $\mathscr{L}$ o porțiune $\mathscr{L}'$ pe care este dat $\mathbf{u}$, și o porțiune $\mathscr{L}''$, pe care este dat $\boldsymbol{\sigma}_n$. Astfel, este suficientă cunoașterea datelor la limită numai pe curba directoare $\mathscr{L}$. Ca și în (7), trebuie să presupunem că

$$\begin{aligned} u_1\,|_{\mathscr{L}'} &= g_1(x_1, x_2), \; u_2\,|_{\mathscr{L}'} = g_2(x_1, x_2), \; u_3\,|_{\mathscr{L}'} = 0; \\ \sigma_{n1}|_{\mathscr{L}''} &= f_1(x_1, x_2), \; \sigma_{n2}|_{\mathscr{L}''} = f_2(x_1, x_2), \; \sigma_{n3}|_{\mathscr{L}''} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Întrucît ecuațiile elasticității nu depind explicit de variabila x_3, urmează că, dacă ipoteza (7), (8) este respectată, nici soluția lor nu va depinde de x_3, și că putem lua în general

$$\partial/\partial x^3 = 0, \tag{9}$$

ceea ce înseamnă că *toate funcțiile ce descriu starea elastică sînt funcții de două variabile* x_1, x_2, definite într-o secțiune oarecare $\mathscr{D}$.

Introducînd acum (9) în (4) și (3), obținem

$$\sigma_{31} = \mu u_{3,1}, \quad \sigma_{32} = \mu u_{3,2}, \tag{10}$$

astfel că a treia ecuație — în care $F_3 = 0$ — devine

$$\mu(u_{3,11} + u_{3,22}) = 0. \tag{11}$$

Întrucît pe suprafața laterală avem $n_3 = 0$, din (6) și (8) deducem

$$u_3|_{\mathscr{L}'} = 0, \quad u_{3,n}|_{\mathscr{L}''} = 0. \tag{12}$$

Din (9), (11) și (12) conchidem că în $\mathscr{D}$ avem $u_3 =$ const. dacă $\mathscr{L} = \mathscr{L}''$, și $u_3 = 0$ dacă $\mathscr{L}' \neq \emptyset$. Neglijînd o eventuală deplasare rigidă, vom putea lua și

$$u_3 = 0. \tag{13}$$

Ținînd seama de (9) și (13) în (4), sîntem conduși la relațiile

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0, \tag{14}$$

oarecum complementare relației (5.3.9) care stă la baza studiului problemei antiplane. Întrucît tensorul $\mathbb{E}$ se reduce la forma

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

rezultă că avem de-a face cu *o stare de deformaţie plană* (vezi (1.8.8)).

O astfel de stare poate exista şi în altfel de corpuri, dacă sînt satisfăcute condiţiile (9), (13). Plecînd direct de la (15), vom avea $u_{1,3} + u_{3,1} = 0$, $u_{2,3} + u_{3,2} = 0$, $u_{3,3} = 0$, de unde

$$\begin{aligned} u_1 &= - x_3 w_{0,1}(x_1, x_2) + u_1^0(x_1, x_2), \\ u_2 &= - x_3 w_{0,2}(x_1, x_2) + u_2^0(x_1, x_2), \\ u_3 &= w_0(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{16}$$

În particular, dacă $w_0(x_1, x_2) = 0$, de aci urmează

$$u_1 = u_1^0(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2^0(x_1, x_2), \quad u_3 = 0, \tag{17}$$

ceea ce echivalează cu (9), (13).

Întrucît avem $\varepsilon_{33} = 0$, din (3) deducem

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \tag{18}$$

Starea de tensiune nu variază cu x_3, dar ea nu e o stare plană:

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \not\equiv 0. \tag{19}$$

Componenta σ_{33} poate fi astfel eliminată din consideraţiile ulterioare.

Ţinînd seama de (7), (8) şi de (9), (13), şi introducînd notaţia

$$S_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \tag{20}$$

de unde urmează

$$\Theta = (1 + \nu)\, S_0, \tag{21}$$

obţinem acum ecuaţiile de echilibru sub forma

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + F_1 = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + F_2 = 0, \tag{22}$$

şi ecuaţiile de compatibilitate sub forma

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{11} + S_{0,11} &= - [\nu/(1 + \nu)] \operatorname{div} \boldsymbol{F} - 2F_{1,1}, \\ \Delta\sigma_{22} + S_{0,22} &= - [\nu/(1 + \nu)] \operatorname{div} \boldsymbol{F} - 2F_{2,2}, \\ \Delta\sigma_{12} + S_{0,12} &= - F_{1,2} - F_{2,1}, \end{aligned} \tag{23}$$

unde Δ şi div sînt operatori în două variabile. Ecuaţiile corespunzătoare indicilor (2,3) şi (3,1) se reduc la identităţi, iar cea corespunzătoare indicilor (3,3) se obţine prin adunarea primelor două ecuaţii (23).

Legea lui Hooke (3) se scrie acum sub forma

$$\varepsilon_{11} = (1/E)(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu^2 S_0), \quad \varepsilon_{22} = (1/E)(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu^2 S_0),$$
$$\varepsilon_{12} = [(1 + \nu)/E]\, \sigma_{12}, \tag{24}$$

iar ecuaţiile geometrice şi rotaţia locală se reduc la

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}), \tag{25}$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}). \tag{26}$$

Condiţiile la limită se scriu (întrucît avem $n_3 = 0$) :

$$u_1 = g_1(x_1, x_2), \quad u_2 = g_2(x_1, x_2) \qquad \text{pe } \mathscr{L}', \tag{27}$$

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = f_1(x_1, x_2), \quad \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 = f_2(x_1, x_2) \quad \text{pe } \mathscr{L}''. \tag{28}$$

Celelalte componente ale stării elastice, în afară de σ_{33}, sînt nule.

Cele 9 ecuaţii în tensiuni pentru funcţii de x_1, x_2, x_3 se reduc astfel la numai 5 ecuaţii, pentru funcţii de x_1, x_2. Odată determinate componentele σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, componenta σ_{33} rezultă din (18), iar legea lui Hooke (24) şi ecuaţiile (25) permit găsirea componentelor deplasării.

Funcţiile de studiat sînt definite în domeniul plan $\mathscr{D}$, de frontieră $\mathscr{L}$. Dar în timp ce în starea antiplană vectorul tensiune este definit pe elemente de normală *paralelă* cu Ox_3, în starea de deformaţie plană el este definit pe elemente cilindrice, de normală *perpendiculară* pe Ox_3. În locul tensiunilor pe astfel de elemente, vom considera tensiuni pe elemente *de arc* — curbele directoare ale acestor elemente de suprafaţă. De aceea nu mai putem vorbi — ca în cazul problemei antiplane — despre „tensiunea într-un punct". Tensiunile se măsoară acum în kgf/cm, subînţelegîndu-se că este vorba de tensiuni pe elemente de suprafaţă cilindrice, avînd înălţimea de 1 cm (forţă pe unitatea de lungime pe curba directoare). Pentru a calcula tensiunile pe alte elemente de suprafaţă, vom ţine seama de (19) şi (6).

Să presupunem acum că avem de-a face cu un cilindru *de lungime finită*, cu bazele libere. Rezolvînd problema ca mai sus, obţinem o soluţie valabilă pentru cilindrul dat, dar cu bazele solicitate de tensiunile $\sigma_{33} \not\equiv 0$ din (18). Aceasta conduce la a rezolva o problemă antiplană elementară (vezi §§ 5.5—5.6). Scăzînd soluţia ei din soluţia problemei pentru cilindrul infinit, obţinem soluţia problemei date.

Cu aceasta, putem studia pînă la capăt problema cilindrului lung solicitat de forţe oarecare pe baze, şi acţionat de forţe de volum şi de forţe superficiale (sau cu deplasări la limită) pe suprafaţa laterală, independente de x_3, şi fără componente după axa Ox_3.

Problema cilindrului *scurt*, ca şi cea a cilindrului acţionat de sarcini *oarecare*, pe suprafaţa sa laterală, nu vor fi abordate aci. Pentru aceste probleme dificile, vezi de exemplu A. Lurie [4], capitolul 7, şi I. Sneddon [1], capitolul 10.

Menţionăm totuşi *problema lui Michell şi Almansi*, înrudită cu problema antiplană şi cu cea plană (vezi E. Almansi [3]). Este vorba de cazul cilindrului zvelt, supus pe suprafaţa

sa laterală la sarcini *reprezentabile prin polinoame în* x_3. O analiză detailată este datorată lui G. Djanelidze [4] (corpuri izotrope) şi [5] (corpuri anizotrope). Raţionamentul se bazează pe un procedeu de recurenţă care permite să se reducă chestiunea la studiul unui *şir* de probleme similare celei plane, în număr egal cu gradul polinomului, plus unu.

OBSERVAŢIE. Toate aceste raţionamente îşi pierd valabilitatea în cazul corpurilor anizotrope sau neomogene, cu proprietăţi mecanice care *nu sînt* independente de x_3.

§ 3. STAREA DE TENSIUNE PLANĂ GENERALIZATĂ ŞI STAREA DE ÎNCOVOIERE A PLĂCII SUBŢIRI (ECUAŢIILE LUI V. MANEA)

Să considerăm acum un cilindru elastic de înălţime *foarte mică* în raport cu $d(\mathscr{D})$. Un astfel de cilindru se numeşte *placă*. Planul situat la jumătatea distanţei dintre baze se numeşte *plan median*, şi este ales drept plan Ox_1x_2. Ţinînd seama de rolul special al coordonatei x_3, vom scrie acum $x_3 = z$, $u_3 = w$, şi vom atribui indicilor literali numai valorile 1, 2. Bazele $z = \pm h$ se numesc *feţele* plăcii, iar distanţa $2h$ între feţe — *grosimea* ei. (Se pot defini şi plăci de grosime variabilă.)

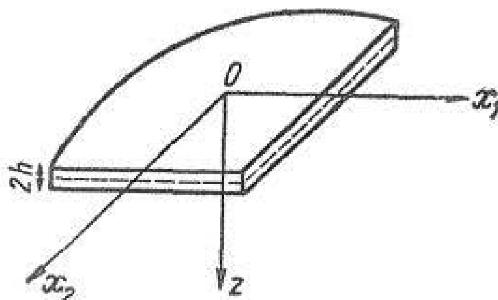


Fig. 6.3.1

Chiar dacă $F_3 = f_3 = 0$, nu mai putem afirma acum că componentele stării elastice sînt independente de x_3.

În schimb, faptul că înălţimea $2h$ este mică a sugerat (lui Cauchy şi Poisson) ideea de a căuta soluţia sub forma unei dezvoltări în serie după puterile lui x_3.

Menţionăm şi soluţia lui A. Lurie [4], capitolul 4, în serii divergente (de altfel uşor de manevrat), şi lucrările asupra metodelor simbolice care i-au urmat (vezi A. Agarev [1]; U. Nigul [1]; V. Prokopov [2]; V. V. Vlasov [1]).

Problema plăcii poate fi studiată desigur ca problemă tridimensională. Pentru o grosime destul de mică ($10\,h < d(\mathscr{D})$) prezintă însă avantaj construirea unui model simplificat, adaptat problemei. Această teorie aproximativă nu este lipsită de contradicţii : nu toate ecuaţiile elasticităţii sînt verificate, şi nu toate consecinţele relaţiilor aproximative sînt utilizabile.

Scopul raţionamentelor ce urmează este de a reprezenta starea elastică prin *funcţii de două variabile* x_1, x_2, definite în $\mathscr{D}$. Subliniem aci — şi nu o vom mai repeta — că expresiile ce se obţin sînt de *aspect* mult mai complicat decît cele din teoria generală, dar în fapt au o *structură* mult mai simplă, datorită caracterului lor bidimensional.

a) Componente plane și componente de încovoiere

Nu vom face uz de dezvoltări în serii după puterile lui z, ci vom reține numai cîțiva termeni din astfel de dezvoltări, și vom căuta să verificăm cu ajutorul lor ecuațiile și condițiile la limită (metodă semi-inversă).

Remarcăm că orice mărime $a(z)$ (funcție eventual și de x_1, x_2) poate fi scrisă sub forma unei sume de componente *pară* și *impară* [1])

$$a(z) = a^+(z) + a^-(z), \tag{1}$$

unde

$$a^+(z) = \frac{1}{2}[a(z) + a(-z)], \qquad a^-(z) = \frac{1}{2}[a(z) - a(-z)], \tag{2}$$

astfel că

$$a^+(-z) = a^+(z), \quad a^-(-z) = -a^-(z). \tag{3}$$

Dacă descompunem în acest mod componentele stării elastice — fie ele $a(x_1, x_2, z)$ — se constată ușor că unele din ele descriu o stare ce nu îndepărtează placa de la configurația ei plană, în timp ce altele tind să îndepărteze planul median de la poziția sa inițială. Cele dintîi vor corespunde unei stări numite — provizoriu — *stare plană*; celelalte, unei stări *de încovoiere*.

Din figura 6.3.2 se înțelege că starea plană este descrisă de componente a^+, dacă a este componenta după Ox_1 sau Ox_2 a deplasării, vectorului tensiune, sau a unei forțe exterioare, — și de componente a^-, dacă a este componenta după Oz a unei astfel de mărimi.

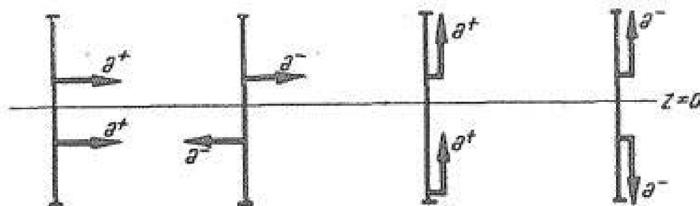


Fig. 6.3.2

Dacă $a(z)$ este un polinom, componentele a^+, a^- vor conține puterile pare, respectiv cele impare ale lui z.

Derivarea în raport cu x_1, x_2 conservă indicii $+$, $-$, în timp ce derivarea în raport cu z îi interverteşte :

$$(a_{,3})^+ = (a^-)_{,3}, \quad (a_{,3})^- = (a^+)_{,3}. \tag{4}$$

Este vizibil că starea plană trebuie să fie caracterizată de mărimile u_i^+, w^-. Ținînd seama de ecuațiile geometrice, de legea lui Hooke, și de cele spuse în legătură cu derivarea în raport cu x_i, z, — conchidem că starea plană trebuie să fie caracterizată de componentele σ_{ik}^+, σ_{3i}^-, σ_{33}^+, ale tensiunii.

[1]) Acest punct de vedere a fost amănunțit dezvoltat de către K. Friedrichs și R. Dressler [1]. În aceeași lucrare se propune o teorie a plăcilor bazată pe o idee analogă celei de strat-limită.

Pentru a înțelege aceasta intuitiv, să considerăm de pildă tensiunile $\sigma_{3i}(x_1, x_2, z_0)$ acționind asupra unui element de normală dirijată paralel cu Oz, şi tensiunile $\sigma_{3i}(x_1, x_2, -z_0)$, acționind asupra elementului simetric cu el, şi avînd normala paralelă de asemenea cu Oz. Dacă aceste mărimi ar fi egale (componentă +), pe elementul $z = -z_0$ de normală dirijată paralel cu sensul *negativ* al axei Oz ar apare o tensiune egală şi de semn opus lui $\sigma_{3i}(x_1, x_2, z_0)$, şi placa ar fi supusă la încovoiere. Pentru a obține starea plană, este necesar să reținem deci componente (−) ale lui σ_{3i}.

Tot astfel, conchidem că avem de-a face cu o stare plană dacă $\sigma_{33}(x_1, x_2, z) = -\sigma_{-3,3}(x_1, x_2, -z)$, aşadar dacă σ_{33} se reduce la componenta sa (+).

Aceste raționamente permit să notăm în mod potrivit componentele forțelor superficiale pe fețele plăcii. Anume, vom scrie

$$\sigma_{3i}|_{z=\pm h} = \pm q_i^{s,j}(x_1, x_2); \quad \sigma_{33}|_{z=\pm h} = \pm q^{s,j}(x_1, x_2), \tag{5}$$

unde indicii superiori s, j şi semnele +, − corespund valorilor $z = \pm h$ (fața de sus, şi fața de jos). (Dublul semn din membrul al doilea dispare, dacă în primul membru indicele 3 este înlocuit cu indicele normalei n.)

Mai departe, în spiritul notației din (2), vom scrie

$$q_i^{\pm} = \frac{1}{2}(q_i^s \pm q_i^j), \; q^{\pm} = \frac{1}{2}(q^s \pm q^j). \tag{6}$$

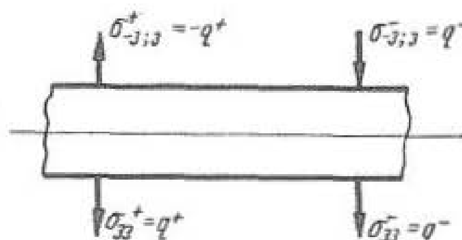


Fig. 6.3.3

După cum am arătat mai sus, starea plană este caracterizată de prezența componentelor σ_{33}^{+}, σ_{3i}^{-}; prin urmare, trebuie să avem în acest caz $q^s = -q^j$, şi $q_i^s = q_i^j$, sau încă $q^{+} = q_i^{-} = 0$ (ceea ce corespunde cu al patrulea şi primul caz din fig. 6.3.2, şi — pentru sarcina normală — cu primul caz din fig. 6.3.3). Pentru starea de încovoiere, raționamentele sînt complementare celor de aci.

Separarea părții pare de cea impară se poate realiza cu ajutorul operatorului ce face să corespundă oricărei funcții — media ei pe grosimea plăcii (care se va nota, *numai în acest paragraf*, cu o bară aşezată superior):

$$\overline{a}(x_1, x_2) = \overline{a(x_1, x_2, z)} = (1/2h)\int_{-h}^{h} a(x_1, x_2, z)\,\mathrm{d}z. \tag{7}$$

Într-adevăr, pentru orice funcție $a(x_1, x_2, z)$ avem evident

$$\overline{a^{+}} = \overline{a}, \quad \overline{a^{-}} = 0, \quad \overline{a^{+}z} = 0, \quad \overline{a^{-}z} = \overline{az}. \tag{8}$$

Se înțelege că cunoaşterea celor două funcții de 2 variabile $\overline{a}$ şi $\overline{az}$, nu echivalează cu cunoaşterea funcției de 3 variabile a. Dar pentru funcții ce variază *liniar* pe grosimea plăcii:

$$a(x_1, x_2, z) = a^0(x_1, x_2) + z\,a'(x_1, x_2), \tag{9}$$

avem imediat

$$a^+ = a^0(x_1, x_2) = \bar{a}, \quad a^- = z\, a'(x_1, x_2) = 3h^{-2}\, z\, \overline{az}. \tag{10}$$

În cazul unor funcții cu variație *parabolică*:

$$a\,(x_1, x_2, z) = a^0\,(x_1, x_2) + z\, a'\,(x_1, x_2) + z^2\, a''\,(x_1, x_2), \tag{11}$$

căpătăm

$$\bar{a} = a^0 + \frac{1}{3} h^2\, a''; \tag{12}$$

astfel că (11) se mai poate scrie (a' *păstrînd expresia din* (10)) sub forma

$$a\,(x_1, x_2, z) = \bar{a} + z\, a' + (z^2 - \frac{1}{3} h^2)\, a''. \tag{13}$$

Integrarea în raport cu z permută cu derivarea în x_1 sau x_2. În schimb, avem

$$\overline{(a_{,3})} = (1/2h)\int_{-h}^{h} a_{,3}\, \mathrm{d}z = (1/h)\, a^-(h), \tag{14}$$

(în timp ce, evident, $(\bar{a})_{,3} = 0$), și tot astfel

$$\overline{(z\, a_{,3})} = (1/2h)\int_{-h}^{h} [(az)_{,3} - a]\, \mathrm{d}z = a^+\,(x_1, x_2, h) - \bar{a}\,(x_1, x_2). \tag{15}$$

Teoria clasică caută soluția problemei sub o formă *liniară* în z. Aceasta conduce la contradicții ce vor fi explicitate mai jos, la pag. 368. Mărind gradul polinoamelor în z alese, se poate realiza — cu prețul unei ridicări a ordinului ecuațiilor — o mai bună satisfacere a condițiilor la limită.

Pionierul cercetării în această problemă (cu accent asupra chestiunii, mai dificile, a încovoierii plăcilor) este E. Reissner [1]—[3]. Ecuații analoge au fost stabilite de L. Bolle [1]. Asupra acestor ecuații — ce au avantajul de a conduce la soluții în care apare soluția clasică, *plus* termeni de corecție — vezi încă I. Babuska și M. Prager [1]; A. Goldenveizer [2]; B.F.Vlasov [1]. Aceeași problemă a mai fost abordată de către O. Aksentian și I. Vorovici [1]; K. Friedrichs [2]; A. Goldenveizer [3]; A. Goldenveizer și A. Kolos [1]; T. Haciaturian [1], [2]; A. Kolos [1], [2]; D. Morgenstern [1], [2]; H. Muștari [2]; M. Șeremetiev și B. Pelch [1]; R. Tiffen [1]; I. Vekua [2] etc.

În cele ce urmează, vom expune un rezultat al lui V. Manea [2], [3], [4], [7], interesant prin simplitatea sa, prin posibilitatea utilizării aproape imediate a teoriei funcțiilor complexe (vezi § 12), și ușor generalizabil la cazul plăcilor de grosime medie (V. Manea [6]).

Vom începe prin a căuta componentele deplasării ca expresii liniare în z. Diferite încercări au condus la a alege

$$u_i = u_i^0 + z\, u_i', \quad w = w\,(x_1, x_2, z), \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

unde u_i^0, u_i' sînt patru funcţii de variabilele x_1, x_2. Ecuaţiile (2.4) devin

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{2}(u^0_{i,k} + u^0_{k,i}) + \frac{1}{2} z (u'_{i,k} + u'_{k,i}), \\ \varepsilon_{3i} &= \frac{1}{2}(u'_i + w_{,i}), \quad \varepsilon_{33} = w_{,3}, \end{aligned} \tag{17}$$

astfel că pentru dilatarea de volum urmează

$$\theta = \theta^0 + z\,\theta' + w_{,3}, \tag{18}$$

unde am notat

$$\theta^0 = u^0_{i,i}, \quad \theta' = u'_{i,i}. \tag{19}$$

Să acceptăm încă — cu titlu provizoriu — legea lui Hooke, de unde

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \lambda\,(\theta^0 + z\,\theta' + w_{,3})\,\delta_{ik} + \mu\,[(u^0_{i,k} + u^0_{k,i}) + z\,(u'_{i,k} + u'_{k,i})], \\ \sigma_{3i} &= \mu\,(u'_i + w_{,i}), \quad \sigma_{33} = \lambda\,(\theta^0 + z\,\theta') + (\lambda + 2\mu)\,w_{,3}. \end{aligned} \tag{20}$$

Să ne ocupăm de satisfacerea condiţiilor la limită în tensiuni pe feţele plăcii. Dacă σ_{3i} variază liniar pe grosimea plăcii, deducem imediat

$$\sigma_{3i}(x_1, x_2, z) = \frac{1}{2}\,[\sigma_{3i}(x_1, x_2, h) + \sigma_{3i}(x_1, x_2, -h)] +$$

$$+ \frac{1}{2}(z/h)\,[\sigma_{3i}(x_1, x_2, h) - \sigma_{3i}(x_1, x_2, -h)],$$

de unde, ţinînd seama de notaţiile (5), (6) :

$$\sigma_{3i} = q_i^- + (z/h)\,q_i^+, \qquad \sigma_{33} = q^- + (z/h)\,q^+. \tag{21}$$

Condiţiile pe feţe rămîn verificate chiar dacă în componentele tensiunii apar termeni de ordin superior, nuli însă pe feţe :

$$\begin{aligned} \sigma_{3i} &= q_i^- + (z/h)\,q_i^+ + (1 - z^2/h^2)\,\psi_i(x_1, x_2), \\ \sigma_{33} &= q^- + (z/h)\,q^+ + (1 - z^2/h^2)\,\psi\,(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{22}$$

Desigur, aceasta revine la a preciza într-o anumită măsură funcţia w.

b) Eforturi şi momente

Pentru a determina pe u_i^0, u_i', w, urmează să ţinem seama acum de ecuaţiile de echilibru, încă nefolosite. Introducînd (20), (22) în (2.1), am obţine — prin identificarea coeficienţilor puterilor lui z — un număr de ecuaţii *superior* celui al funcţiilor necunoscute. De aceea, sîntem obligaţi să separăm numai termenii pari şi cei impari în z, ceea ce se poate realiza

cu ajutorul integrării pe grosime. În felul acesta, se introduc *mediile* pe grosime ale cantităților cu care operăm, precum și termeni ce caracterizează *liniar* abaterea lor de la valoarea medie — ceea ce este acceptabil, întrucît h este mic, și o evaluare exactă a componentelor stării elastice ca funcții de z nu ar avea sens.

Pentru componentele tensiunii, aceasta conduce la a introduce cantitățile

$$S_{ik} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ik}\, dz, \quad S_{3i} = \int_{-h}^{h} \sigma_{3i}\, dz, \quad S_{33} = \int_{-h}^{h} \sigma_{33}\, dz; \tag{23}$$

$$N_{ik} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ik}\, z\, dz, \quad N_{3i} = \int_{-h}^{h} \sigma_{3i}\, z\, dz, \quad N_{33} = \int_{-h}^{h} \sigma_{33}\, z\, dz. \tag{24}$$

Ținînd seama de definiția (7) și de relațiile (8), avem de pildă

$$S_{ik} = 2h\,\overline{\sigma_{ik}} = 2h\,\overline{\sigma^{+}_{ik}}, \quad N_{ik} = 2h\,\overline{\sigma_{ik}\, z} = \overline{\sigma^{-}_{ik}\, z}. \tag{25}$$

Pentru a înțelege semnificația mecanică a cantităților S_{ik}, N_{ik}, să considerăm un element de suprafață cilindric de generatoare paralele cu Oz, avînd înălțimea $2h$, și normala paralelă de pildă cu axa Ox_1.

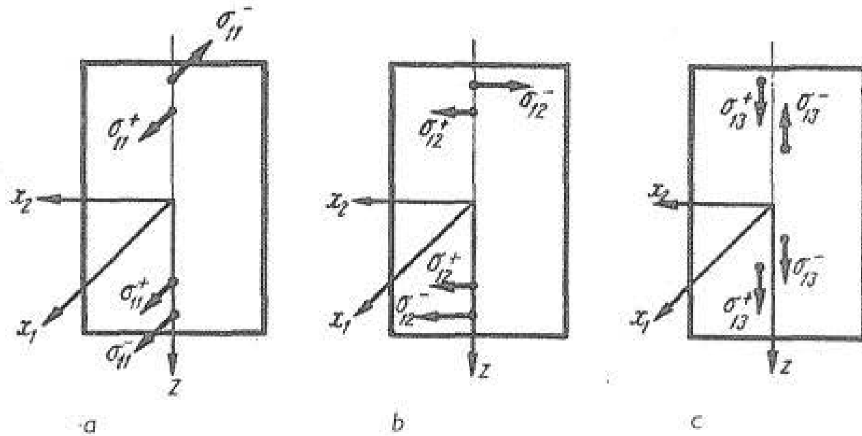


Fig. 6.3.4

Forțele σ^{+}_{11}, σ^{+}_{12}, σ^{+}_{13} din figură formează sisteme echivalente cu cîte o forță unică. Forțele σ^{-}_{11}, σ^{-}_{12} formează sisteme echivalente cu cîte un cuplu de moment dirijat după Ox_2, respectiv Ox_1. Forțele σ^{-}_{13} formează un sistem echivalent cu zero.

Prin urmare, mărimile S_{11}, S_{12} (și similar S_{22}) sînt rezultante ale componentelor, paralele cu Ox_1x_2, ale tensiunilor pe generatoarele unor elemente de suprafață cilindrice. Mărimile S_{11}, S_{22} se numesc *eforturi de întindere* (sau de *compresiune*), iar S_{12} este un *efort de alunecare*. Mărimile S_{13} și S_{23} sînt rezultante ale componentelor tangențiale ale tensiunii pe aceleași elemente cilindrice; ele se numesc *forțe tăietoare*. (Apariția lor, obligatorie și în teoria elementară a plăcilor, contrazice flagrant relațiile ce ar trebui să decurgă — vezi mai jos — din (84).)

Tot astfel, N_{11} (și analog N_{22}) sînt momente rezultante ale tensiunilor σ_{11} (respectiv σ_{22}); efectul lor este acela de a încovoia elementul cilindric considerat, silindu-l să se rotească în jurul unei axe paralele cu Ox_2 (respectiv Ox_1), așadar în afara planului său; din acest motiv, ele se

numesc *momente încovoietoare*. În fine, N_{12} este momentul rezultant al tensiunilor σ_{12}, şi el tinde să rotească elementul considerat în jurul unei axe paralele cu Ox_1, aşadar în planul său ; de aceea el se numeşte *moment de torsiune*.

Mărimile S_{33} şi N_{33} nu au o semnificaţie mecanică. Mărimile N_{3i} vor dispare şi ele din consideraţiile ulterioare (vezi mai jos pp. 361 şi 364). Remarcăm totodată că din figura 6.3.4, c), urmează că componenta după Oz a momentului rezultant al tensiunilor σ_{3i} este nulă.

Considerînd în planul median o curbă oarecare $\mathscr{C}$ de normală $\boldsymbol{n}$, drept curbă directoare a unui element cilindric, şi calculînd torsorul tensiunilor $\sigma_{ni}(x_1, x_2, z)$ faţă de punctul $x_1, x_2, 0$ de pe generatoarea acestui element, obţinem :

$$\begin{aligned} &\text{rezultanta :} && 2h\,\overline{\sigma_{n1}}, \quad 2h\,\overline{\sigma_{n2}}, \quad 2h\,\overline{\sigma_{n3}}; \\ &\text{momentul rezultant :} && 2h\,\overline{\sigma_{n2}\,z}, \; -2h\,\overline{\sigma_{n1}\,z}, \quad 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Prin urmare, rezultanta şi momentul rezultant al tensiunilor pe un astfel de element se calculează introducînd relaţiile lui Cauchy (2.6) în (26), şi ţinînd apoi seama de (23), (24). Dacă axele locale $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ sînt orientate la fel cu axele (x_1, x_2), putem defini eforturile şi momentele (23), (24), făcînd uz de formulele de transformare (2.5.5). Noile componente se vor nota evident $S_{nn}, S_{ss}, S_{ns}, S_{nz}, S_{sz}, N_{nn}, N_{ss}, N_{ns}$, etc.

În felul acesta, formulele (23), (24) înlocuiesc studiul celor 6 componente ale tensiunii σ_{ik}, funcţii de 3 variabile, prin studiul a 5 eforturi şi 3 momente, funcţii de numai 2 variabile, şi privite ca „reduse" la planul median.

Pentru a putea face uz de (20) şi (22) în (23) şi (24), vom mai observa că

$$\int_{-h}^{h} z^2\, dz = \frac{2}{3}\, h^3, \quad \int_{-h}^{h} (1 - z^2/h^2)\, dz = \frac{4}{3}\, h. \tag{27}$$

Cu aceasta, introducînd (20) în (23), (24) şi păstrînd pentru integrala derivatei $w_{,3}$ notaţia $2h\overline{w_{,3}}$, obţinem acum

$$\begin{aligned} &S_{ik} = 2h\,\lambda\,(\theta^0 + \overline{w_{,3}})\,\delta_{ik} + \mu\,(u^0_{i,k} + u^0_{k,i}), \\ &S_{3i} = 2h\,\mu\,(u'_i + \overline{w}_{,i}), \quad S_{33} = 2h\,[\lambda\theta^0 + (\lambda + 2\mu)\,\overline{w_{,3}}], \end{aligned} \tag{28}$$

şi tot astfel :

$$\begin{aligned} &N_{ik} = 2h\,\lambda\left(\frac{1}{3}\,h^2\,\theta' + \overline{z\,w_{,3}}\right)\delta_{ik} + \frac{2}{3}\,h^3\,\mu\,(u'_{i,k} + u'_{k,i}), \\ &N_{3i} = 2h\,\mu\,\overline{z\,w_{,i}}, \quad N_{33} = 2h\left[\frac{1}{3}\,h^2\,\lambda\,\theta' + (\lambda + 2\mu)\,\overline{z w_{,3}}\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Remarcăm aci prezenţa mărimilor medii $\overline{w}$ (care va fi păstrată, ca avînd o evidentă semnificaţie mecanică), şi $\overline{w_{,3}}$ şi $\overline{z\,w_{,3}}$, care trebuie eli-

minate : vezi (14), (15). În acest scop, vom remarca mai întîi că forțele tăietoare S_{3i} pot fi calculate și cu ajutorul expresiilor (22). Utilizînd și (27), obținem astfel :

$$S_{3i} = 2h\, q_i^- + \frac{4}{3}\, h\, \psi_i , \tag{30}$$

și deci, comparînd cu (28) :

$$\psi_i = \frac{3}{2}\, [\mu\, (u_i' + \overline{w}_{,i}) - q_i^-]. \tag{31}$$

În felul acesta, componentele tangențiale din (22) ale tensiunii devin

$$\sigma_{3i} = q_i^- + (z/h)\, q_i^+ + \frac{3}{2}\, (1 - z^2/h^2)\, [\mu\, (u_i' + \overline{w}_{,i}) - q_i^-]. \tag{32}$$

Un raționament analog pentru componenta normală σ_{33} dă întîi

$$S_{33} = 2h\, q^- + \frac{4}{3}\, h\psi, \tag{33}$$

și deci, prin comparație cu (28) :

$$\lambda\, \theta^0 + (\lambda + 2\mu)\, \overline{w_{,3}} = q^- + \frac{2}{3}\, \psi. \tag{34}$$

Să presupunem pentru moment că cele 3 componente ale deplasări ar fi polinoame de grad 2 în z. După cum rezultă din (12), media θ^0 s-ar înlocui prin $\theta^0 + \frac{1}{3}\, h^2\, \theta''$, și am avea $\overline{w_{,3}} = w'$. Prin urmare, (34) ar deveni

$$\lambda\, (\theta^0 + \frac{1}{3}\, h^2\, \theta'') + (\lambda + 2\mu)\, w' = q^- + \frac{2}{3}\, \psi. \tag{35}$$

Dar pentru o aproximație liniară a lui σ_{33}, deducem (vezi și (21))

$$\lambda\theta^0 + (\lambda + 2\mu)\, w' = q^-, \tag{36}$$

astfel că funcția de corecție ψ depinde în întregime de termenii patratici în expresiile u_i, prin intermediul lui $\theta'' = u''_{i,i}$ (spre deosebire de ψ_i care depind de termenii liniari u_i'). În spiritul aproximației adoptate, ψ trebuie deci neglijată, astfel că rămîne

$$\sigma_{33} = q^- + (2/h)\, q^+. \tag{37}$$

Să comparăm această expresie cu cea care rezultă din (20) :

$$\sigma_{33} = \lambda\, (\theta^0 + z\, \theta') + (\lambda + 2\mu)\, w_{,3}. \tag{38}$$

Integrînd ambele expresii în raport cu z, deducem

$$2h\,[\lambda\,\theta^0 + (\lambda + 2\mu)\,\overline{w_{,3}}] = 2h\,q^-. \tag{39}$$

Înmulţindu-le cu z şi integrînd, deducem de asemenea

$$\frac{2}{3}\,h^3\,\lambda\,\theta' + (\lambda + 2\mu)\,2h\,\overline{zw_{,3}} = \frac{2}{3}\,h^2\,q^+. \tag{40}$$

Prin urmare, avem

$$\overline{w_{,3}} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\,(q^- - \lambda\,\theta^0), \quad \overline{zw_{,3}} = \frac{h}{3\,(\lambda + 2\mu)}\,(q^+ - h\,\lambda\,\theta'), \tag{41}$$

ceea ce permite să eliminăm termenii corespunzători din (28), (29).

După calcule elementare, sîntem conduşi la relaţiile

$$\begin{gathered} S_{ik} = 2h\left[\frac{2\,\lambda\,\mu}{\lambda + 2\mu}\,\theta^0\,\delta_{ik} + \mu\,(u^0_{i,k} + u^0_{k,i}) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\,q^-\,\delta_{ik}\right], \\ S_{3i} = 2h\,\mu\,(u'_i + \overline{w}_{,i}), \quad S_{33} = 2h\,q^-, \end{gathered} \tag{42}$$

şi respectiv

$$\begin{gathered} N_{ik} = \frac{2}{3}\,h^3\left[\frac{2\lambda\,\mu}{\lambda + 2\mu}\,\theta'\,\delta_{ik} + \mu\,(u'_{i,k} + u'_{k,i})\right] + \frac{2h^2\,\lambda}{3(\lambda + 2\mu)}\,q^+\,\delta_{ik}, \\ N_{3i} = 2h\,\mu\,\overline{z\,w_{,i}}, \quad N_{33} = \frac{2}{3}\,h^2\,q^+. \end{gathered} \tag{43}$$

Relaţiile (42), (43) sînt ecuaţiile fizico-geometrice ale teoriei plăcilor subţiri, transcrise în eforturi şi momente. Acestea din urmă depind la rîndul lor de 5 funcţii de 2 variabile : u^0_i, u'_i, şi $\overline{w}$.

Ţinînd seama de cele spuse la pag. 354, precum şi de relaţiile (25), rezultă că starea plană va fi caracterizată de cantităţile S_{ik}, N_{3i} şi S_{33}, — în timp ce starea de încovoiere va fi caracterizată de cantităţile N_{ik}, S_{3i} şi N_{33}.

Putem trece acum la ecuaţiile (2.1) pe care le vom scrie sub forma

$$\sigma_{ik,k} + \sigma_{i3,3} + F_i = 0, \quad \sigma_{3i,k} + \sigma_{33,3} + F_3 = 0. \tag{44}$$

Ţinînd seama de definiţiile eforturilor şi momentelor (23), (24), scriind forţele de volum sub forma ce rezultă din (7), (8) şi făcînd în fine uz de (14), (15), obţinem prin integrarea ecuaţiilor (44) în raport cu z :

$$\begin{gathered} S_{ik,k} + 2\,\sigma^-_{3i}\,(h) + 2h\,\overline{F}_i = 0, \\ S_{3k,k} + 2\,\sigma^-_{33}\,(h) + 2h\,\overline{F}_3 = 0. \end{gathered} \tag{45}$$

Înmulţind în (44) cu z şi integrînd în raport cu z, deducem şi

$$\begin{aligned} N_{ik,k} + 2h\, \sigma_{3i}^{+}(h) - S_{3i} + 2h\overline{F_i z} = 0, \\ N_{3k,k} + 2h\, \sigma_{33}^{+}(h) - S_{33} + 2h\overline{F_3 z} = 0. \end{aligned} \qquad (46)$$

Dar din condiţiile la limită (5), (6) pe feţele plăcii urmează că

$$\sigma_{3i}^{-}(h) = q_i^{+},\ \sigma_{33}^{-}(h) = q^{+};\ \sigma_{3i}^{+}(h) = q_i^{-},\ \sigma_{33}^{+}(h) = q^{-}. \qquad (47)$$

În definitiv, cele 6 ecuaţii (45), (46) se separă în două grupuri de cîte 3 ecuaţii, primele relative la starea plană, iar celelalte, la starea de încovoiere:

$$\begin{cases} S_{ik,k} + 2h\,\overline{F_i} + 2q_i^{+} = 0, & (48) \\ N_{3k,k} - S_{33} + 2h\, q^{-} + 2h\,\overline{F_3 z} = 0, & (49) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{ik,k} - S_{3i} + 2h\,\overline{F_i z} + 2h\, q_i^{-} = 0, & (50) \\ S_{3k,k} + 2h\,\overline{F_3} + 2q^{+} = 0. & (51) \end{cases}$$

Să încercăm acum să realizăm o separare analogă în condiţiile la limită pe suprafaţa laterală; prin integrare pe grosime, din relaţiile (2.8) — unde g_i, f_i depind de data aceasta şi de z — obţinem din nou condiţii relative la frontiera $\mathscr{L}$ a domeniului $\mathscr{D}$.

Ţinînd seama de expresiile (16), de formula (10), şi de valorile din (27), căpătăm imediat pentru datele la limită în deplasări

$$u_i^0 = \overline{g_i}, \quad \overline{w} = \overline{g_3}, \quad u_i' = 3h^{-2}\,\overline{g_i z} \quad \text{pe } \mathscr{L}'. \qquad (52)$$

Pentru condiţiile la limită în tensiuni obţinem — ţinînd seama că pe suprafaţa laterală avem $n_3 = 0$ —

$$\begin{cases} S_{ik}\, n_k = 2h\,\overline{f_i}, \quad S_{3k}\, n_k = 2h\,\overline{f_3}, \\ N_{ik}\, n_k = 2h\,\overline{f_i z}, \quad N_{3k}\, n_k = 2h\,\overline{f_3 z} \end{cases} \text{pe } \mathscr{L}''. \qquad (53)$$

Cantităţile $\overline{f_i}$, $\overline{f_3}$ şi $\overline{f_i z}$, $\overline{f_3 z}$ sînt componentele torsorului pe grosimea plăcii a forţelor superficiale aplicate în lungul generatoarelor. Dată fiind grosimea mică a plăcii, este greu să măsurăm cantităţile f_i, f_3 ca funcţii de z, astfel că folosirea numai a torsorului lor corespunde informaţiei de care dispunem în fapt. Tot din cauza micii grosimi a plăcii, putem face uz de principiul lui Saint-Venant, şi afirma că înlocuirea sistemului real de sarcini f_i, f_3 printr-un sistem static echivalent lui, este admisibilă. (Aceasta se confirmă la cercetare exactă: vezi A. Goldenveizer [3].)

Din (52), (53) se vede că o separare similară a celor două stări este realizabilă. Sistemul (48), (49) trebuie deci rezolvat cu datele

$$\begin{aligned} & u_i^0 = \overline{g_i} && \text{pe } \mathscr{L}', \\ & S_{ik}\, n_k = 2h\,\overline{f_i}, \quad N_{3k}\, n_k = 2h\,\overline{f_3 z} && \text{pe } \mathscr{L}'', \end{aligned} \qquad (54)$$

iar sistemul (50), (51) va fi însoţit de datele la limită

$$\overline{w} = \overline{g_3}, \qquad u_i' = 3h^{-2}\,\overline{g_i z} \quad \text{pe } \mathscr{L}',$$
$$N_{ik} n_k = 2h\overline{f_i z}, \qquad S_{3k} n_k = 2h\overline{f_3} \text{ pe } \mathscr{L}''. \tag{55}$$

Această separare totală a ecuaţiilor şi datelor la limită reprezintă principala simplificare de atins. Dar totodată această separare a celor două stări ce apar în placă reprezintă marele dezavantaj al utilizării lor — în comparaţie cu plăcile curbe subţiri (corpuri de mică grosime, dar a căror suprafaţă mediană nu mai e un plan) : în acestea din urmă, componentele stării „plane" (în acest caz : situate în planul tangent la suprafaţa mediană) şi cele ale stării de încovoiere sînt intrinsec legate, şi asigură o mult mai bună repartizare a tensiunilor în material.

c) *Starea de tensiune plană generalizată*

Să presupunem că forţele de volum şi datele la limită sînt de aşa natură, încît fenomenul de încovoiere nu apare. Vom alege (vezi pag. 354—355)

$$\overline{F_i z} = \overline{F_3} = 0, \quad \overline{g_i z} = \overline{g_3} = 0 \quad \text{pe } \mathscr{L}'.$$
$$\overline{f_i z} = \overline{f_3} = 0 \quad \text{pe } \mathscr{L}'', \quad q_i^+ = q_i^- = 0. \tag{56}$$

Sistemul (50), (51) cu datele (55) va fi un sistem omogen. Ţinînd seama şi de ecuaţiile (42), (43), acest sistem admite soluţia identic nulă. (Nu dispunem de o teoremă de unicitate, şi deci nu se poate afirma că aceasta este *singura* soluţie a problemei cu date nule pentru forţe şi deplasări la limită.)

Rămîne deci de rezolvat sistemul (48), (49), cu datele la limită din (54) pe suprafaţa laterală, şi cele ce decurg din (22) pe feţe :

$$\sigma_{3i}(\pm h) = \pm q_i^+, \quad \sigma_{33}(\pm h) = q^-. \tag{57}$$

Ţinînd seama în (22) de funcţia de corecţie ψ_i din (31), şi observînd că aceasta este nulă în virtutea relaţiei a doua din (56), şi a faptului că componenta S_{3i} din (42) este acum nulă, amintind că $\psi = 0$, şi ţinînd seama şi de ultimele relaţii (56), sîntem conduşi la a scrie

$$\sigma_{3i}(x_1, x_2, z) = (z/h)\, q_i^+, \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, z) = q^-, \tag{58}$$

astfel că componentele de indice 3 ale tensiunii sînt determinate elementar, în funcţie de sarcina pe feţe. De acum încolo, *ne putem limita la cazul în care feţele plăcii sînt libere.*

Să examinăm ecuaţia (49). Întrucît $S_{33} = 2h\, q^-$ (vezi (42)), rezultă că — chiar pentru placa ale cărei feţe nu sînt libere — (49) devine

$$N_{3k,k} + 2h\,\overline{F_3 z} = 0. \tag{59}$$

Introducînd (29) în (59), căpătăm acum

$$\mu\Delta\,\overline{zw} + \overline{F_3 z} = 0. \tag{60}$$

Presupunînd deplasarea normală w scrisă de asemenea sub formă polinomială în z, rezultă că în (60) va apare laplasianul componentei sale impare w' — așadar al unei mărimi greu de evaluat cu precizie pentru o placă subțire. Ținînd seama de acest fapt, de faptul că mărimile N_{3i} nu au semnificație mecanică, de faptul că cantitatea $\overline{zw}$ nu intervine în datele la limită, conchidem că (60) este o relație incertă între mărimi de al doilea ordin, pe care o vom neglija. (Raționamente mai precise confirmă acest mod de a proceda.)

Drept sistem de ecuații de echilibru vom reține deci numai ecuațiile (48) care, întrucît fețele sînt libere, devin acum

$$S_{ik,k} + 2h\,\overline{F}_i = 0. \tag{61}$$

Datele la limită (54) devin la rîndul lor

$$u_i^0\,|_{\mathscr{L}'} = \overline{g}_i, \quad S_{ik}\,n_k\,|_{\mathscr{L}''} = 2h\,\overline{f}_i, \tag{62}$$

iar ecuațiile fizico-geometrice (42) se reduc la

$$S_{ik} = 2h\,[\lambda^*\,\theta^0\,\delta_{ik} + \mu\,(u_{i,k}^0 + u_{k,i}^0)], \tag{63}$$

unde s-a notat

$$\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu). \tag{64}$$

Formulele (63) pot fi evident privite ca reprezentînd legea lui Hooke pentru un corp aflat în *stare de deformație plană*, cu constanta λ înlocuită prin λ^*. Relațiile (61) și (62) coincid cu (2.22), (2.27) și (2.28) — scrise însă pentru *mediile* pe grosime ale deplasărilor, tensiunilor, forțelor de volum, și datelor la limită.

Condiției (2.14) îi corespunde aci (vezi (58), cazul fețelor libere):

$$S_{31} = S_{32} = S_{33} = 0. \tag{65}$$

Prin analogie cu (2.5.15), o astfel de stare va fi numită *stare de tensiune plană generalizată* — căci nu tensorul tensiune, ci numai cel al tensiunilor medii are (aproximativ) proprietatea ce ne interesează: componente independente de z, și orientate în plane paralele cu planul $z = 0$.

Întrucît sistemul format de ecuațiile de echilibru și de ecuațiile de compatibilitate constituie un echivalent al sistemului complet de ecuații, urmează că problema stării plane *de tensiune* generalizate este rezolvată prin studiul acelorași ecuații (2.22), (2.23) ca în starea plană *de deformație* scrise însă pentru valorile medii u_i^0, $(1/2h)\,S_{ik}$, pentru mediile datelor la limită, și pentru același domeniu, dar pentru constantele modificate λ^*, μ.

Din (3.4.6), (3.4.7), (3.4.16) urmează, ținînd seama de (64):

$$\begin{aligned}
&\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \mu^* = \mu, \quad \nu^* = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1+\nu}, \quad E^* = E\,\frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2};\\
&\lambda = \frac{2\lambda^*\mu}{2\mu - \lambda^*}, \quad \nu = \frac{\nu^*}{1-\nu^*}, \quad E = E^*\,\frac{1}{1-\nu^{*2}}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Cu aceasta, problema plăcii solicitate în condiţiile ce rezultă din (56) şi avînd feţele libere se reduce la studiul stării plane de deformaţie, şi nu vom avea a ne mai ocupa de ea. *Sub o formă mai elementară, aceeaşi concluzie decurge din raţionamentele lui* N. Mushelişvili [3], § 26.

OBSERVAŢIA 1. Legea lui Hooke pentru starea de tensiune plană generalizată este o consecinţă a legii lui Hooke (2.3) în care se ia $\sigma_{33} = 0$ — astfel că domeniul ei de valabilitate este mai larg decît ar părea. Într-adevăr, în acest caz avem

$$\varepsilon_{11} = (1/E)(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22} = (1/E)(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}). \tag{67}$$

Ţinînd seama de (3.4.7) şi încercînd să separăm, de pildă, un termen de forma $2\mu\varepsilon_{11}$, obţinem uşor

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) = \frac{2\mu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11},$$

astfel încît constanta modificată din (64) apare şi aci. Pentru σ_{22} găsim o expresie similară. Constanta μ rămîne nealterată.

Presupunerea $\sigma_{33} = 0$ este frecvent utilizabilă. Într-adevăr, sarcina normală pe feţele plăcii nu depăşeşte de obicei cîteva tone pe m² (planşee încărcate cu utilaj greu). Din formula liniară (37) urmează că σ_{33} variază între 0 (pe faţa inferioară, nesolicitată) şi valoarea sarcinii pe unitatea de suprafaţă de pe faţa superioară, aşadar este de ordinul a cîteva kgf/cm². În fond, placa plană joacă rolul unei adevărat „transformator" al tensiunilor: sarcinile normale, cărora (din cauza micii grosimi) ea nu le poate rezista, sînt transformate în tensiuni dirijate în planul median.

OBSERVAŢIA 2. Ca şi în cazul stării plane de deformaţie, ecuaţiile (61), (63) formează un sistem de 5 ecuaţii de primul ordin pentru 5 funcţii necunoscute. Introducînd (63) în (61), obţinem imediat

$$\mu\Delta u_i^0 + (\lambda^* + \mu)\,\theta^0_{,i} + \overline{F}_i = 0, \tag{68}$$

aşadar un sistem de 2 ecuaţii de ordinul al doilea pentru 2 funcţii necunoscute de 2 variabile. Desigur, acesta este un sistem de ecuaţii Lamé bidimensionale (vezi şi § 4.8).

Pentru studiul stării de tensiune plană generalizată, vezi încă şi lucrările lui E. Reiss şi S. Locke [1]; R. Salganik [1]; E. Vorovici [1].

d) Starea de încovoiere a plăcii subţiri

Să presupunem acum că forţele de volum şi datele la limită sînt de aşa natură, încît să nu apară starea de tensiune plană generalizată. Pentru aceasta, vom face ipotezele complementare celor din (56), aşadar vom presupune

$$\begin{aligned} &\overline{F}_i = \overline{F_3 z} = 0, \quad \overline{g}_i = \overline{g_3 z} = 0 \quad \text{pe } \mathscr{L}', \\ &\overline{f}_i = \overline{f_3 z} = 0 \quad \text{pe } \mathscr{L}'', \quad q^- = q_i^+ = 0. \end{aligned} \tag{69}$$

Sistemul (48), (49) cu datele (54) va admite deci (vezi (42), (43)) soluția identic nulă. Rămîne de rezolvat sistemul (50), (51), cu datele (55) pe suprafața laterală, și cele ce decurg din (22) pe fețe:

$$\sigma_{3i}(\pm h) = q_i^-, \quad \sigma_{33}(\pm h) = \pm q^+. \tag{70}$$

Cu aceasta, ecuațiile de echilibru ale problemei capătă forma

$$\begin{aligned} &N_{ik,k} - S_{3i} + 2h\overline{F_i z} + 2h\, q_i^- = 0, \\ &S_{3k,k} + 2h\,\overline{F}_3 + 2q^+ = 0, \end{aligned} \tag{71}$$

de rezolvat împreună cu ecuațiile fizico-geometrice ce ne rămîn din (42), (43):

$$\begin{aligned} &N_{ik} = \frac{2}{3} h^3 [\lambda^* \theta' \delta_{ik} + \mu(u'_{i,k} + u'_{k,i})] + \frac{1}{3} h^2 (\lambda^*/\mu)\, q^+ \delta_{ik}, \\ &S_{3i} = 2h\,\mu(u'_i + \overline{w}_{,i}), \qquad N_{33} = \frac{2}{3} h^2 q^+. \end{aligned} \tag{72}$$

Introducînd valorile din (72) în (71), obținem

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} h^2 [\mu\Delta u'_i + (\lambda^* + \mu)\, \theta'_{,i}] - \mu(u'_i + \overline{w}_{,i}) + \\ &\qquad + \overline{F_i z} + q_i^- + \frac{1}{6} h\,(\lambda^*/\mu)\, q^+_{,i} = 0, \\ &\mu\Delta\overline{w} + \mu\theta' + \overline{F}_3 + q^+/h = 0, \end{aligned} \tag{73}$$

așadar un sistem de 3 ecuații de al doilea ordin, pentru cele 3 funcții necunoscute u'_i, $\overline{w}$. Primele două ecuații din (73) prezintă o asemănare vizibilă cu ecuațiile (68) ale stării plane. În același timp, este evident gradul sporit de dificultate al problemei încovoierii.

Trecînd la condițiile la limită, constatăm că datele de tip Dirichlet din (55) conțin valorile pe frontieră ale celor trei funcții necunoscute. Poate prezenta utilitate înlocuirea componentelor u'_1, u'_2 prin componente ce se vor nota u'_n, u'_s (proiecții ale aceleiași mărimi cu caracter vectorial, pe axele locale ($\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{s}$) în fiecare punct al frontierei).

În ce privește datele de tip Neumann din (55), ele pot fi de asemenea transcrise, cu ajutorul relațiilor (72), prin intermediul lui u'_i, $\overline{w}$ — ceea ce conduce însă la 3 expresii foarte complicate de al doilea ordin. Semnificația mărimilor ce apar în aceste condiții este aceea a unor momente N_{n1}, N_{n2} și a unei forțe tăietoare S_{n3}. Ca și mai sus, este preferabil să trecem în fiecare punct de pe frontiera laterală la axele locale ($\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{s}$), și să înlocuim — în urma unei rotații de axe — momentele N_{n1}, N_{n2} prin N_{nn} și N_{ns} (moment de încovoiere, respectiv de torsiune, pe elementul frontieră de normală $\boldsymbol{n}$). Condițiile de tip Neumann din (55) devin atunci

$$N_{nn}|_{\mathcal{L}''} = N_{nn}(s), \; N_{ns}|_{\mathcal{L}''} = N_{ns}(s), \; S_{n3}|_{\mathcal{L}''} = S_{n3}(s), \tag{74}$$

unde funcțiile din al doilea membru sînt funcții cunoscute de arcul s.

După cum se vede, atît condiţiile de tip Dirichlet, cît şi cele de tip Neumann, sînt în număr de 3 pe fiecare porţiune a frontierei.

Odată rezolvat sistemul (71), se pot determina şi componentele tensiunii; anume, din (9), (10) şi (24) avem imediat

$$\sigma_{ik} = \frac{3}{2} h^{-3} z N_{ik}. \tag{75}$$

Pentru componentele σ_{3i} nu putem face uz de formulele (9), (10) şi (23): acestea sînt liniare în z, ceea ce este infirmat în (32). Ţinînd seama de faptul că la încovoiere avem $q_i^+ = 0$, precum şi de expresia (72) a forţei tăietoare, căpătăm din (32):

$$\sigma_{3i} = \frac{3}{4} h^{-1} (1 - z^2/h^2) S_{3i} + \left[1 - \frac{3}{2} (1 - z^2/h^2)\right] q_i^-. \tag{76}$$

Dacă se rezolvă sistemul în deplasări (73), componentele tensiunii se deduc introducînd (72) în (75), şi făcînd uz de (32) pentru $q_i^+ = 0$.

Să ne fixăm atenţia asupra sistemului (73).

Derivînd prima sa ecuaţie în raport cu x_i şi sumînd, obţinem

$$\frac{1}{3} h^2(\lambda^* + 2\mu)\,\Delta\theta' - \mu(\theta' + \Delta\overline{w}) + \overline{zF_{i,i}} + q^-_{i,i} + \frac{1}{6} h\,(\lambda^*/\mu)\,\Delta q^+ = 0. \tag{77}$$

Să introducem aci valoarea lui $\mu(\theta' + \Delta\overline{w})$ din ultima ecuaţie (73); să înmulţim expresia obţinută cu $2h$, şi să introducem notaţiile

$$D = 2h\left(\frac{1}{3} h^2\right)(\lambda^* + 2\mu) = \frac{2}{3} h^3\, E/(1 - \nu^2), \tag{78}$$

$$Q = 2h\left[\overline{F}_3 + \overline{zF_{i,i}} + q^+/h + \frac{1}{6} h\,(\lambda^*/\mu)\,\Delta q^+ + q^-_{i,i}\right]. \tag{79}$$

Mărimea D (a nu se confunda cu aria!) se numeşte *rigiditate la încovoiere* a plăcii. Q este *sarcina normală* redusă. Cu aceasta, (77) devine

$$\Delta\theta' = -\,Q/D, \tag{80}$$

aşadar o ecuaţie Poisson pentru dilatarea θ'. (Compară cu (4.9.5).)

Izolînd $\Delta\overline{w}$ în ultima ecuaţie (73), aplicînd în ambii membri operatorul lui Laplace, şi ţinînd seama de (80), deducem (vezi şi (4.10.9)):

$$\Delta\Delta\overline{w} = Q/D - \mu^{-1}\,\Delta(\overline{F}_3 + q^+/h). \tag{81}$$

În fine, prima ecuaţie (73) (pentru $i = 1,2$) se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} &\mu\left(\frac{1}{3} h^2\,\Delta u_i' - u_i'\right) + \frac{1}{3} h^2\,(\lambda^* + \mu)\,\theta'_{,i} - \mu\overline{w}_{,i} + \\ &+ \left[\overline{zF_i} + q_i^- + \frac{1}{6} h\,(\lambda^*/\mu)\,q^+_{,i}\right] = 0, \end{aligned} \tag{82}$$

așadar o ecuație de ordinul al doilea pentru fiecare din componentele u'_i, dacă θ' și $\bar{w}$ sînt cunoscute. Aplicînd operatorul biarmonic și ținînd seama de (80), (81), se obțin două ecuații de ordinul al șaselea :

$$\mu\left(\frac{1}{3}h^2\,\Delta\Delta\Delta u'_i - \Delta\Delta u'_i\right) + Q_i = 0, \quad i = 1, 2, \tag{83}$$

unde sarcinile reduse Q_i se determină elementar din termenii liberi din (80)—(82).

Determinarea componentelor u'_i conduce deci la studiul unor ecuații de ordin *superior* celei pentru $\bar{w}$, și chiar a ecuațiilor lui Lamé în cazul tridimensional. În schimb, numărul variabilelor se reduce de la 3 la 2.

e) Teoria clasică

Varianta clasică a teoriei este bazată pe anumite ipoteze simplificatoare, numite ale lui Love și Kirchhoff. În esență, acestea tind să reducă problema la determinarea *unei singure* funcții necunoscute. Pentru aceasta, să presupunem că

$$\varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{3i}|_{z=\pm h} = 0, \quad \sigma_{33} = 0. \tag{84}$$

Prima din aceste relații exprimă presupunerea că contracția transversală este neglijabilă, și revine la a lua $w = w^0(x_1, x_2)$, deci la a neglija termenii de forma $\bar{w}_{,3}$. Cea de-a doua — valabilă numai în cazul fețelor libere — este o consecință a teoremei de reciprocitate (vezi finele § 2.4). Împreună cu ipoteza de liniaritate în raport cu z, ea conduce la concluzia $\varepsilon_{3i} \equiv \sigma_{3i} \equiv S_{3i} \equiv 0$, ceea ce ar contrazice flagrant condițiile de echilibru. În fine, cea de-a treia ipoteză (84) — justificată în spiritul celor de la pag. 365 — este evident în contradicție cu cea dintîi (vezi pag. 351).

O imagine intuitivă a acestui ansamblu de ipoteze se realizează dacă presupunem că — dată fiind mica grosime a plăcii — deplasarea w nu variază pe grosime, iar componentele u_i^- apar *numai* datorită încovoierii planului median, așa cum se vede în figura 6.3.5 (unde $\sin\alpha \cong \operatorname{tg}\alpha \cong w^0_{,1}$). Aceasta revine la a lua $u_i^- = -z\,w^0_{,i}$ ceea ce conduce din nou la primele două relații (84) (vezi și (2.16)).

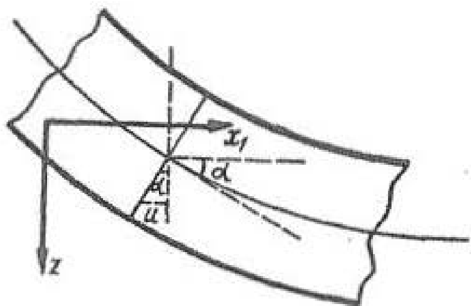


Fig.6.3.5

Pentru a restabili valabilitatea ecuației a treia de echilibru, teoria clasică introduce totuși pe o cale ocolită componentele S_{3i}. Întrucît w nu depinde de z, a doua ipoteză (84) conduce la relația (vezi (17)) :

$$u'_i + w^0_{,i} = 0. \tag{85}$$

Să observăm că (85) nu are un sens fizic, ci este numai o relație de simplificare a ecuațiilor ; de aceea ea trebuie folosită cît mai tîrziu

posibil. (Dacă (85) se introduce în ultima ecuaţie (73), aceasta dispare pur şi simplu — ceea ce nu e acceptabil.) Pentru acest motiv, păstrăm ecuaţiile (80), (81), şi introducem (85) numai în (82), care se reduce la:

$$\frac{1}{3} h^2 [\mu \Delta u'_i + (\lambda^* + \mu) \theta'_{,i}] + \left[\overline{F_i z} + q_i^- + \frac{1}{6} h (\lambda^*/\mu) q^+_{,i} \right] = 0, \qquad (86)$$

aşadar un sistem similar sistemului (68) care descrie starea plană. Componentele u'_i, w sînt deci acum soluţii ale unor probleme cu caracter bi-armonic.

Din (85) urmează că toate mărimile cu care avem de-a face pot fi exprimate prin intermediul funcţiei w^0. Anume, avem

$$u'_i = - w^0_{,i}, \quad \theta' = - \Delta w^0, \quad u'_{i,k} = u'_{k,i} = - w^0_{,ik}. \qquad (87)$$

Din (72) deducem aşadar

$$N_{11} = - D (w^0_{,11} + \nu w^0_{,22}) + \frac{1}{3} h^2 (\lambda^*/\mu) q^+,$$

$$N_{22} = - D (w^0_{,22} + \nu w^0_{,11}) + \frac{1}{3} h^2 (\lambda^*/\mu) q^+, \qquad (88)$$

$$N_{12} = - D (1 - \nu) w^0_{,12},$$

în timp ce forţele tăietoare rezultă nule. Din (75) şi (88) avem acum

$$\sigma_{ik} = \frac{3}{2} h^{-3} z N_{ik}, \qquad (89)$$

în timp ce σ_{3i} trebuie determinate pe altă cale. Anume, ecuaţiile de echilibru (44) dau derivatele $\sigma_{3i,3}$ prin intermediul componentelor σ_{ik}, aşadar, făcînd uz de (88) şi (89), prin intermediul lui w^0. Integrînd în raport cu z, şi presupunînd $F_i = q_i^- = 0$ (ipoteze provenind din teoria clasică), deducem

$$\sigma_{3i} = - \frac{3}{4} (D/h) (1 - z^2/h^2) \Delta w^0_{,i}, \qquad (90)$$

şi printr-o nouă integrare:

$$S_{3i} = - D \Delta w^0_{,i}, \qquad (91)$$

ceea ce nu se poate obţine prin particularizare din (72).

Faptul că acum atît numărul funcţiilor necunoscute, cît şi ordinul ecuaţiilor se micşorează, obligă la reconsiderarea condiţiilor la limită.

Introducînd (87) în condiţiile de tip Dirichlet din (55), rezultă că sînt date valorile la limită ale lui w^0 şi $w^0_{,i}$.

Dar întrucît avem

$$w^0_{.s} = -w^0_{.1} n_2 + w^0_{.2} n_1, \qquad w^0_{.n} = w^0_{.1} n_1 + w^0_{.2} n_2, \tag{92}$$

şi întrucît cunoaşterea valorilor funcţiei w^0 pe o curbă permite să se calculeze derivata sa tangenţială, rezultă că condiţiile (55) echivalează cu

$$w^0|_{\mathscr{L}'} = w^0(s), \quad w^0_{.n}|_{\mathscr{L}'} = w^0_1(s). \tag{93}$$

Astfel de condiţii pot fi într-adevăr puse pentru ecuaţia bi-armonică (81), şi problema are sens.

În schimb, condiţiile de tip Neumann din (74) conduc la un număr prea mare de condiţii, în general incompatibile. Dificultatea este ocolită în teoria clasică cu ajutorul următorului raţionament al lui G. Kirchhoff [1].

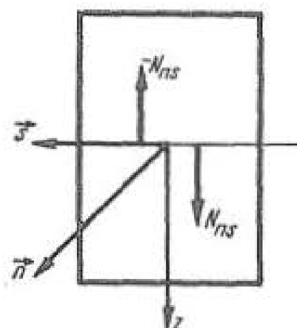


Fig. 6.3.6.

Se observă că efectul de rotire în planul elementului-frontieră, caracteristic pentru acţiunea momentului N_{ns}, poate fi obţinut şi cu ajutorul unui sistem de forţe tăietoare. Într-adevăr, acţiunea cuplului de moment $N_{ns}\,ds$ aplicat pe elementul de lungime ds de pe $\mathscr{L}''$ poate fi înlocuită prin acţiunea a două forţe paralele N_{ns} şi $-N_{ns}$. Considerînd şi segmentul alăturat acestuia (în sensul $ds > 0$), acţionat de forţele $N_{ns} + dN_{ns}$ şi $-(N_{ns} + dN_{ns})$, şi continuînd din aproape în aproape această operaţie de înlocuire, obţinem un sistem de forţe tăietoare de intensitate $N_{ns,s}$, distribuite pe $\mathscr{L}''$. Momentele de torsiune din (74) pot fi deci înlocuite prin nişte forţe tăietoare, care se adaugă forţelor tăietoare $S_{n3}(s)$ date. Pentru forţa tăietoare sumară, vom scrie (evident, s nu este un indice numeric, de sumare):

$$N_{n3} = S_{n3} + N_{ns,s}, \tag{94}$$

astfel că (74) conduce la numai *două* condiţii

$$N_{nn}|_{\mathscr{L}''} = N_{nn}(s), \qquad N_{s3}|_{\mathscr{L}''} = N_{n3}(s), \tag{95}$$

în acord cu ordinul ecuaţiei de studiat.

Această ecuaţie nu păstrează totuşi forma (81). Anume, întrucît în teoria clasică ea este obţinută pe o altă cale, cel de-al doilea termen din membrul al doilea nu apare, şi avem numai

$$\Delta\Delta\, w^0 = Q/D, \tag{96}$$

unde D are aceeaşi valoare ca în (78), iar Q se reduce la

$$Q = 2h\,\overline{F}_3 + 2q^+. \tag{97}$$

Ecuaţia (96) este *ecuaţia lui Sophie Germain şi J. Lagrange*. (În (88) termenii în q^+ trebuie de asemenea neglijaţi în teoria ce porneşte de la ecuaţia (96).)

Deosebirea esențială între ecuațiile (80)—(83) și ecuația (96) constă tocmai în ordinul mai înalt al celor dintîi — așadar în posibilitatea de a include soluții pe care ecuația (96) nu le poate pune în evidență, și de a satisface mai corect condițiile la limită cu semnificație mecanică.

Calculele efectuate pînă în prezent par totuși să arate că în general (pentru plăci suficient de subțiri), ecuația (96) conduce la soluții ce nu se deosebesc prea mult de cele ale ecuațiilor mai exacte, de ordin superior. Aceasta se explică prin configurația cu totul specială a plăcii *plane* subțiri. Dimpotrivă, pentru teoria plăcilor *curbe* subțiri, o astfel de coborîre a ordinului ecuațiilor și micșorare a numărului de condiții la limită utilizabile poate duce la neglijarea unor factori cu efect catastrofal.

Raționamentele din paragraful de față conduc la concluzia că problema *stării de deformație plană*, cea a *stării de tensiune plană generalizată*, și cea a *încovoierii plăcilor subțiri*, sînt echivalente din punct de vedere matematic. Acest fapt permite să ne mărginim la studiul *uneia singure* din aceste probleme, soluția obținută transferîndu-se cu ușurință și asupra celorlalte două.

§ 4. SISTEMUL COMPLET DE ECUAȚII AL ELASTICITĂȚII PLANE. FUNCȚIA LUI AIRY

a) Sistemul de ecuații

Ne vom fixa atenția asupra sistemului de ecuații obținut în § 2. Recapitulăm datele problemei. Avem de studiat ecuațiile

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + F_1 = 0, \qquad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + F_2 = 0; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{11} + S_{0,11} &= -[\nu/(1+\nu)]\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} - 2F_{1,1},\\ \Delta\sigma_{22} + S_{0,22} &= -[\nu/(1+\nu)]\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} - 2F_{2,2},\\ \Delta\sigma_{12} + S_{0,12} &= -F_{1,2} - F_{2,1}, \end{aligned} \tag{2}$$

unde am folosit notația

$$S_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}. \tag{3}$$

Odată tensiunile σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} determinate, componentele deformației și deplasările se calculează din relațiile

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = (1/E)\,(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu^2 S_0), \qquad \varepsilon_{22} = (1/E)\,(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu^2 S_0),\\ \varepsilon_{12} = [(1+\nu)/E]\,\sigma_{12}; \end{gathered} \tag{4}$$

$$u_{1,1} = \varepsilon_{11}, \quad u_{2,2} = \varepsilon_{22}, \quad u_{1,2} + u_{2,1} = 2\varepsilon_{12}. \tag{5}$$

Toate funcțiile din (1)—(5) sînt funcții de x_1, x_2, definite în domeniul $\mathscr{D}$. Componentele deplasării sînt funcții de clasă $C^2(\mathscr{D})$.

Acestea sînt ecuații *exacte* pentru starea de deformație plană, și ecuații *aproximative*, obținute prin integrare pe grosime, pentru starea de tensiune plană generalizată (constantele elastice trebuind să fie înlocuite prin cele din (3.66)). Menționăm că în această ultimă problemă, apar dificultăți suplimentare dacă se încearcă integrarea pe grosime a ecuațiilor de compatibilitate. Vezi în acest sens și lucrările indicate la pag. 365.

Problemele la limită fundamentale și teorema de unicitate decurg printr-un simplu decalc al rezultatelor din capitolul 4. Prin urmare, *problema lui Dirichlet* va fi caracterizată prin darea valorilor :

$$\boldsymbol{u}|_{\mathscr{L}} = \boldsymbol{g}(x_1, x_2); \tag{6}$$

problema lui Neumann — prin darea valorilor

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{L}} = \boldsymbol{f}(x_1, x_2), \tag{7}$$

unde

$$\sigma_{n1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2, \quad \sigma_{n2} = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2; \tag{8}$$

problema mixtă — prin darea valorilor

$$\boldsymbol{u}|_{\mathscr{L}'} = \boldsymbol{g}(x_1, x_2), \quad \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{L}''} = \boldsymbol{f}(x_1, x_2), \tag{9}$$

unde $\mathscr{L}' \cup \mathscr{L}'' = \mathscr{L}$, $\mathscr{L}' \cap \mathscr{L}'' = \emptyset$. Aceasta din urmă cuprinde drept cazuri particulare problemele Dirichlet și Neumann, și teorema de unicitate corespunzătoare se obține ca și în § 4.5.

În ce privește *a patra problemă fundamentală*, menționăm cazul

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|_{\mathscr{L}'} = h(x_1, x_2), \quad \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{s}|_{\mathscr{L}''} = k(x_1, x_2), \tag{10}$$

(vezi de ex. L. Milne-Thomson [2], § 3.50; N. Mushelișvili [5], § 115).

Evident, toți vectorii din (6)—(10) au numai cîte două componente.

Reproducînd calculele din § 4.8, se obține *sistemul lui Lamé*

$$\Delta \boldsymbol{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mu^{-1} \boldsymbol{F} = 0. \tag{11}$$

Aceste două ecuații sînt evident analoge ecuațiilor (4.8.7). Ca și în cazul problemei antiplane, este însă mai comod să abordăm studiul problemei plane pornind de la cele cinci ecuații în tensiuni (1), (2).

După cum am arătat în § 4.10, putem face în general abstracție de forțele de volum. Întrucît însă raționamentele necesare nu sînt aci esențial mai complicate, și întrucît în problema încovoierii plăcilor este util să considerăm ecuațiile neomogene, vom presupune totuși deocamdată $\boldsymbol{F} \neq 0$.

b) *Funcția lui Airy*

Să considerăm funcțiile G_1, G_2 definite prin relațiile

$$G_{1,1} = F_1, \quad G_{2,2} = F_2. \tag{12}$$

Ecuațiile (1) se scriu acum sub forma

$$(\sigma_{11} + G_1)_{,1} = -\sigma_{12,2}, \quad \sigma_{12,1} = -(\sigma_{22} + G_2)_{,2}, \tag{13}$$

și ele vor fi identic satisfăcute, dacă putem găsi două funcții A_1, A_2 astfel încît

$$\sigma_{11} + G_1 = A_{1,2}, \quad \sigma_{12} = -A_{1,1}, \quad \sigma_{12} = A_{2,2}, \quad \sigma_{22} + G_2 = A_{2,1}. \tag{14}$$

De aci urmează relația $A_{1,1} = -A_{2,2}$, la rîndul ei satisfăcută dacă există o funcție $\mathsf{A}(x_1, x_2)$ astfel ca

$$A_1 = \mathsf{A}_{,2}, \quad A_2 = -\mathsf{A}_{,1}. \tag{15}$$

Introducînd (15) în (14), obținem

$$\sigma_{11} = \mathsf{A}_{,22} - G_1, \quad \sigma_{22} = \mathsf{A}_{,11} - G_2, \quad \sigma_{12} = -\mathsf{A}_{,12}. \tag{16}$$

Orice funcție $\mathsf{A}(x_1, x_2) \in C^3(\mathscr{D})$ permite, cu ajutorul relațiilor (16), să asigurăm verificarea identică a ecuațiilor de echilibru. Funcția astfel introdusă se numește *funcția lui G. Airy* [1]. Ea este un *potențial de tensiune.*

J. Maxwell [1] a observat însă că funcția lui Airy trebuie să satisfacă și ecuațiile ce derivă din condițiile de compatibilitate. Introducînd (16) în (2), a treia ecuație rezultă identic verificată, în timp ce primele două se reduc la o aceeași ecuație

$$\Delta\Delta\mathsf{A} = G_{1,22} + G_{2,11} - [\nu/(1-\nu)]\,(G_{1,11} + G_{2,22}). \tag{17}$$

Dacă există o funcție de forță G, așadar dacă

$$F_1 = G_{,1}, \quad F_2 = G_{,2}, \tag{18}$$

urmează $G_1 = G_2 = G$, și ecuația (17) devine

$$\Delta\Delta\mathsf{A} = [(1-2\nu)/(1-\nu)]\Delta G. \tag{19}$$

În fine, în cazul absenței forțelor de volum, din (16) căpătăm

$$\sigma_{11} = \mathsf{A}_{,22}, \quad \sigma_{22} = \mathsf{A}_{,11}, \quad \sigma_{12} = -\mathsf{A}_{,12}, \tag{20}$$

iar funcția lui Airy verifică *ecuația biarmonică*

$$\Delta\Delta\mathsf{A} = 0. \tag{21}$$

Problema a fost astfel redusă la integrarea unei singure ecuații (17) (sau (21)), cu condiții la limită ce rezultă din (6)–(10). Ecuația (17)

este *identică* cu ecuaţia lui Sophie Germain şi Lagrange (3.96). În § 12 vom vedea că şi condiţiile la limită concordă.

Dacă $F = 0$, ecuaţiile considerate conduc la ecuaţia biarmonică. Ţinînd seama de teorema lui E. Almansi şi M. Nicolescu (vezi § 4.10, pag. 156), rezultă că soluţia problemei depinde de determinarea a *două* funcţii armonice (independente), sau (ceea ce e acelaşi lucru) a *două funcţii analitice de o variabilă complexă* definite în $\mathscr{D}$, — în timp ce soluţia problemei antiplane depinde de determinarea *unei singure* astfel de funcţii.

OBSERVAŢIE. Pentru unele încercări de extindere a rezultatului lui Airy la cazul tridimensional, vezi începutul § 7.3.

§ 5. UTILIZAREA FUNCŢIEI LUI AIRY. EXEMPLE

Utilizarea funcţiei lui Airy a mers în general pe linia unei metode de tip invers: dîndu-se funcţii biarmonice în domenii $\mathscr{D}$, se determinau apoi condiţiile la limită mecanice corespunzătoare. Sînt puţin numeroase domeniile pentru care problema a putut fi studiată direct sub o formă efectivă.

G. Airy [1] şi A. Mesnager [1] au căutat soluţii pentru anumite domenii simple, sub forma unor *polinoame biarmonice*. Numeroase exemple de acest tip sînt expuse de către M. Filonenko-Borodici [1], capitolele 6 şi 7; P. Papkovici [4], capitolele 9–11; S. Timoshenko şi J. Goodier [1], capitolele 3, 4 şi 7. Vezi de asemenea lucrările lui Th. von Karman [3] şi F. Seewald [1] pentru domeniul dreptunghiular, comportînd comparaţii între soluţiile exacte şi cele aproximative. Vezi încă P.P. Teodorescu [2], privitor la acelaşi domeniu.

a) Soluţii polinomiale

Componentele stării elastice nu depind de eventuali termeni liniari din funcţia lui Airy. Să începem deci cu considerarea polinomului

$$\mathsf{A}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} p\, x_1^2 + q\, x_1 x_2 + \frac{1}{2} r\, x_2^2, \tag{1}$$

unde p, q, r sînt nişte constante. Introducînd (1) în (4.20), obţinem

$$\sigma_{11} = r, \quad \sigma_{22} = p, \quad \sigma_{12} = -q, \tag{2}$$

astfel că funcţia (1) caracterizează o stare de tensiune *omogenă* a corpului, oricare ar fi configuraţia sa. Constantelor p, r le corespund stări de întindere (compresiune), iar constantei q, o stare de alunecare pură.

Luînd mai departe drept funcţie a lui Airy un polinom de grad 3

$$\mathsf{A}(x_1, x_2) = \frac{1}{6} p\, x_1^3 + \frac{1}{2} q\, x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} r\, x_1 x_2^2 + \frac{1}{6} s\, x_2^3, \tag{3}$$

avem de asemenea $\Delta^2 \mathsf{A} = 0$.

Introducînd (3) în (4.20), deducem

$$\sigma_{11} = rx_1 + sx_2, \quad \sigma_{22} = px_1 + qx_2, \quad \sigma_{12} = -qx_1 - rx_2. \tag{4}$$

De aci obținem cele patru stări de tensiune posibile :

$$p \neq 0: \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = px_1, \quad \sigma_{12} = 0; \tag{5}$$

$$q \neq 0: \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = qx_2, \quad \sigma_{12} = -qx_1; \tag{6}$$

$$r \neq 0: \quad \sigma_{11} = rx_1, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -rx_2; \tag{7}$$

$$s \neq 0: \quad \sigma_{11} = sx_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0. \tag{8}$$

Primul caz rezolvă problema domeniului dreptunghiular de laturi $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$, supus la încovoiere pură (plană !) de către tensiuni normale aplicate pe laturile $x_2 = \pm b$, și variind

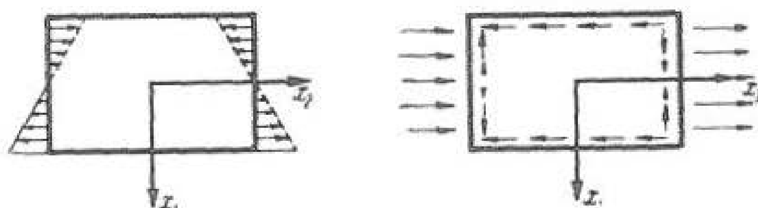


Fig. 6.5.1

liniar pe aceste laturi (compară cu (5.6.17)). Al doilea caz rezolvă problema aceluiași domeniu, supus la o combinație de întinderi și alunecări. Ultimele două cazuri se deduc din cele dintîi prin intervertirea axelor. În figură sînt redate primele două cazuri, pentru $p > 0$, $q > 0$.

b) *Placa dreptunghiulară în consolă*

Să trecem la studiul analogului plan al problemei consolei de secțiune dreptunghiulară, cercetată în § 5.20, exemplul *f*.

Pentru aceasta, fie că consola de axă Ox_3 este plană în raport cu Ox_2 — înțelegînd prin aceasta fie că ea are forma unei plăci plane de grosime $2h$ pe direcția Ox_2 (stare de tensiune plană generalizată), fie forma unui cilindru infinit de generatoare paralele cu Ox_2 (stare plană de deformație). În primul caz este vorba de o placă subțire dispusă *vertical*; în cel de-al doilea, de o placă infinită (eventual groasă) dispusă *orizontal*. (A se revedea figurile 5.20.2 și 5.20.3.)

Prima din aceste probleme a putut fi rezolvată ca problemă anti-plană, soluția fiind dată cu o bună aproximație chiar de formulele lui Jurawski (5.20.39); dimpotrivă, cea de a doua nu a putut fi examinată (vezi § 5.20, pag. 318). Cea de-a doua problemă poate fi la rîndu-i studiată în două moduri : ca stare plană de deformație, și ca problemă de placă încovoiată.

Să reducem chestiunea la studiul problemei plane pentru domeniul din figura 6.5.2, unde avem $-a \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_3 \leqslant l$, sarcina fiind echivalentă cu o forță $\mathcal{R}_1$ (măsurată în kgf/cm). Domeniul $\mathcal{D}$ considerat este o secțiune longitudinală a consolei, ce trece prin axele Ox_1 și Ox_3.

Axa Ox_1 este axă centrală principală de inerţie. Întrucît planul Ox_1x_2 din paragrafele anterioare este aci înlocuit cu planul Ox_1x_3, vom avea de făcut modificările corespunzătoare de notaţii.

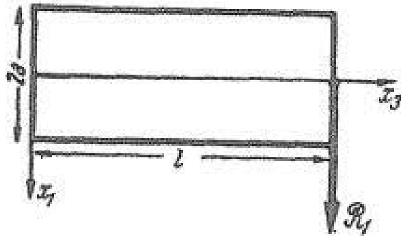


Fig. 6.5.2

Avem de rezolvat ecuaţia (4.21) cu condiţiile la limită pe frontiera domeniului $\mathscr{D}$, condiţii care, în spiritul principiului lui Saint-Venant, trebuie scrise sub forma :

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \qquad \text{pentru } x_1 = \pm a, \tag{9}$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \int_{-a}^{a} \sigma_{13}\, \mathrm{d}x_1 = \mathcal{R}_1 \quad \text{pentru } x_3 = l, \tag{10}$$

ele exprimînd faptul că suprafaţa laterală a consolei (aşadar, feţele „superioară" şi „inferioară" ale paralelipipedului) este liberă, iar baza $x_3 = l$ este supusă la o sarcină tangenţială de rezultantă $\mathcal{R}_1$.

Vom începe prin a căuta soluţia problemei tot cu ajutorul unei funcţii Airy polinomiale, de grad 3 (aşadar evident biarmonică):

$$\mathsf{A}(x_1, x_3) = px_1^3 + qx_1^2 x_3 + rx_1 x_3^2 + sx_3^3 + p' x_1^2 + q' x_1 x_3 + r' x_3^2, \tag{11}$$

de unde, cu ajutorul relaţiilor (4.20), deducem

$$\sigma_{11} = 2rx_1 + 6sx_3 + 2r', \quad \sigma_{33} = 6px_1 + 2qx_3 + 2p', \quad \sigma_{13} = -2qx_1 - 2rx_3 - q'. \tag{12}$$

Din (9) şi din prima condiţie (10), obţinem

$$\pm 2ra + 6sx_3 + 2r' = \pm 2qa - 2rx_3 - q' = 6px_1 + 2ql + 2p' = 0,$$

ceea ce este posibil dacă şi numai dacă luăm

$$p = r = s = 0, \quad r' = \pm ra, \quad q' = \pm 2qa, \quad p' = -ql,$$

aşadar dacă toate constantele din (11) sînt nule. Prin urmare, forma aleasă pentru funcţia lui Airy este prea elementară pentru a permite satisfacerea tuturor condiţiilor la limită. Adăugîndu-i un termen de grad 4, de forma $s' x_1^3 x_3$, obţinem în loc de (12), expresiile

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2rx_1 + 6sx_3 + 2r', \\ \sigma_{33} &= 6px_1 + 2qx_3 + 2p' + 6s' x_1 x_3, \\ \sigma_{13} &= -2qx_1 - 2rx_3 - q' - 3s'x_1^2; \end{aligned} \tag{13}$$

condiţiile la limită mai sus considerate dau acum $\pm 2ra + 6sx_3 + 2r' = 0$, $\pm 2qa - 2rx_3 - q' - 3s'a^2 = 0$, $6px_1 + 2ql + 2p' + 6s'x_1 l = 0$, ceea ce conduce la

$$q = r = s = p' = r' = 0, \quad p = -s'l, \quad q' = -3s'a^2. \tag{14}$$

Introducînd (13) în a doua condiţie (10), obţinem acum

$$s' = \mathcal{R}_1/4a^3, \tag{15}$$

astfel că în definitiv funcţia lui Airy se scrie

$$\mathsf{A}(x_1, x_3) = (\mathcal{R}_1/4a^3)(x_1^3 x_3 - l x_1^3 - 3a^2 x_1 x_3), \tag{16}$$

iar componentele (13) ale tensiunii au valorile

$$\sigma_{11} = 0, \qquad \sigma_{33} = -(3\mathcal{R}_1/2a^3)\, x_1 (l - x_3), \qquad \sigma_{13} = (3\mathcal{R}_1/4a^3)(a^2 - x_1^2). \tag{17}$$

Să calculăm acum momentul de inerţie I_2 al secţiunii (normale) a consolei. Pentru dreptunghiul de laturi $2a$, $2b$ avem din (5.7.7)

$$I_2 = \iint_{\mathcal{D}} x_1^2 \, dD = \frac{4}{3} a^3 b. \tag{18}$$

Raportînd acest moment de inerţie la unitatea de lungime pe direcţia Ox_2 — aşa cum procedăm cu toate mărimile cu care avem de-a face în problema plană — vom obţine pentru *momentul de inerţie unitar* $I_2/2b$, pe care îl notăm din nou cu I_2, valoarea

$$I_2 = \frac{2}{3} a^3. \tag{19}$$

Cu aceasta, formulele (17) devin

$$\sigma_{11} = 0, \qquad \sigma_{33} = -(\mathcal{R}_1/I_2)\, x_1 (l - x_3), \qquad \sigma_{13} = (\mathcal{R}_1/2I_2)(a^2 - x_1^2). \tag{20}$$

Valoarea componentei σ_{33} coincide cu cea rezultînd din (5.9.7). Componenta σ_{13} are valoarea din (5.20.39). În fine, componentele σ_{11} şi σ_{2j} (în particular, σ_{23}) sînt nule, ca şi în cazul problemei consolei tratate cu formulele lui Jurawski.

Formulele (20) nu depind de constantele elastice, şi deci conduc la aceleaşi valori ale tensiunii, atît pentru starea de deformaţia plană, cît şi pentru cea de tensiune plană generalizată. Spre deosebire de soluţia elementară din § 5.20, cea de aci se dovedeşte însă valabilă şi dacă $2b \gg l \gg 2a$.

Dimpotrivă, deplasările diferă între ele. Pentru a le calcula, putem face uz de (1.9.8), transcriind deformaţia cu ajutorul legii lui Hooke *în cele două variante distincte* ce rezultă din (3.67) pentru primul caz, respectiv (2.24) pentru cel de-al doilea (unde trebuie să intervertim şi variabilele x_2 şi x_3), şi făcînd uz de (17) sau (20). Integrarea se poate face pe *orice* drum, de pildă pe un drum compus din segmente paralele cu axele.

Tot atît de uşor se pot integra direct ecuaţiile fizico-geometrice. Astfel, din (3.67) şi (20) se obţin valorile $u_{1,1}$, $u_{3,3}$ şi $u_{1,3} + u_{3,1}$. Integrînd primele două expresii, apar două funcţii necunoscute, care se determină ţinînd seama de cea de-a treia expresie considerată. Obţinem astfel:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/EI_2)\left[l\, x_3^2 - \frac{1}{3} x_3^3 + \nu x_1^2 (l - x_3) + A x_3 + C\right], \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/EI_2)\left[x_1(x_3^2 - 2l\, x_3) - \frac{1}{3}(2 + \nu)\, x_1^3 - B x_1 - D\right], \end{aligned} \tag{21}$$

unde A, B, C, D sînt constante, legate prin relaţia $A - B = 2(1 + \nu)\, a^2$.

În cazul stării plane de deformație, ecuațiile (3.67) se înlocuiesc cu (2.24). Rezultatul final se poate obține direct din (21), înlocuind constantele ν, E prin valorile din a doua linie din (3.66), și apoi revenind la notațiile ν, E.

Tratînd problema ca problemă de *încovoiere a unei plăci infinite*, avem de integrat (3.96) cu condițiile (3.93), (3.95). De data aceasta, trebuie să intervertim x_1 cu x_3 și u_1 cu u_3, și să înlocuim $2h$ cu $2a$. Întrucît componentele stării elastice nu depind de x_2, sîntem conduși la a integra ecuația

$$\mathrm{d}^4 u_1/\mathrm{d}x_3{}^4 = 0. \tag{22}$$

În ce privește condițiile la limită, vom presupune că placa este rigid fixată (*încastrată*) în lungul liniei $x_3 = 0$: această linie nu se poate deplasa, și planul tangent în lungul ei de asemenea nu se deplasează în procesul de deformație. Dimpotrivă, marginea $x_3 = l$ se rotește liber, astfel că aci nu pot fi aplicate momente încovoietoare, ci numai o forță tăietoare. Avem deci

$$u_1\big|_{x_3=0} = \mathrm{d}u_1/\mathrm{d}x_3\big|_{x_3=0} = 0, \qquad N_{33}\big|_{x_3=l} = 0,\ N_{31}\big|_{x_3=l} = \mathcal{R}_1. \tag{23}$$

Făcînd uz de formulele (3.88), (3.91) și (3.78), obținem imediat

$$u_1 = \frac{1}{2}\,(\mathcal{R}_1/D)\left(l x_3^2 - \frac{1}{3}\,x_3^3\right),\ D = \frac{2}{3}\,E\,a^3/(1-\nu^2). \tag{24}$$

Ținînd acum seama de presupunerea că componenta σ_{11} (care înlocuiește aci pe σ_{33}) este neglijabilă, precum și de relațiile (3.88) – (3.90), obținem componentele tensiunii

$$\sigma_{11} = 0,\ \sigma_{33} = -\frac{3}{2}\,(\mathcal{R}_1/a^3)\,x_1\,(l - x_3),\ \sigma_{13} = \frac{3}{4}\,(\mathcal{R}_1/a^3)\,(a^2 - x_1^2), \tag{25}$$

ceea ce coincide cu (17), sau — ceea ce este același lucru — cu (20).

Rezultatul privind starea de tensiune este deci identic în cele trei variante. Pentru determinarea deplasărilor în ultima variantă, dispunem de u_1 din (24), unde putem introduce valorile I_2 și D din (19) și (24). Componenta u_2 este nulă, iar din (3.16) și (3.85) căpătăm $u_3 = -x_1 u_{1,3}$. Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\,(\mathcal{R}_1/E\,I_2)\,(1-\nu^2)\left(l x_3^2 - \frac{1}{3}\,x_3^3\right), \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= \frac{1}{2}\,(\mathcal{R}_1/E\,I_2)\,(1-\nu^2)\,x_1\,(x_3^2 - 2l x_3). \end{aligned} \tag{26}$$

Formulele (21) cu constantele elastice înlocuite așa cum am arătat mai sus, conțin încă și alți termeni — a căror prezență se explică prin aceea că soluția în cazul stării plane de deformație este soluția exactă, în timp ce în starea de încovoiere a plăcii intervin ipoteze suplimentare. (De unde obligația de a satisface primele două condiții (23).) Expresiile ce depind de A, B, C, D descriu o deplasare rigidă, eliminată în (26) prin condițiile de încastrare.

c) Grinda pe două reazime

Să considerăm acelaşi paralelipiped de muchii $2a$, $2b$, l, solicitat de o sarcină repartizată de intensitate constantă Q pe faţa sa superioară. Dacă $2b \ll 2a \ll l$, avem de-a face cu o placă dispusă în planul vertical, şi aşezată pe două reazime cvasi-punctuale (fig. 5.20.2). Dacă $2b \gg l \gg 2a$, placa este aşezată orizontal şi e sprijinită pe două linii de rezemare (fig. 5.20.3).

În primul caz, Q măsoară intensitatea liniară a sarcinii pe grosimea plăcii; în cel de-al doilea, intensitatea liniară a sarcinii pe o fîşie de lăţime unitară a feţei superioare a plăcii.

În ambele cazuri, secţiunea normală a cilindrului (de ax Ox_3), sau planul median al plăcii subţiri, sînt solicitate după schema din figura 6.5.3. Probleme de acest tip (sarcină *pe suprafaţa laterală* a barei cilindrice, eventual funcţie de x_3) se rezolvă curent cu mijloacele rezistenţei materialelor — cu toate că soluţiile exacte nu sînt încă în general cunoscute.

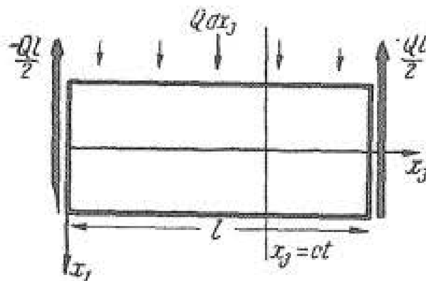


Fig. 6.5.3

În cazul secţiunii dreptunghiulare, problema poate fi rezolvată aproape la fel ca în cazul plăcii în consolă. Este însă adesea util să folosim eventuale soluţii aproximative ale problemei — dacă dispunem de ele — pentru a uşura căutarea funcţiei lui Airy.

Să abordăm problema de faţă cu mijloacele rezistenţei materialelor, aşadar utilizînd (5.20.39). Ţinînd seama şi de (5.9.7), vom lua ca punct de plecare

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,(a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = (\mathcal{R}_1/I_2)\,x_1\,(x_3 - l). \tag{27}$$

Să considerăm că componentele normale σ_{33} apar ca efect al acţiunii momentului încovoietor corespunzător în fiecare secţiune (vezi § 5.9, pag. 207). Componentele σ_{31} sînt produse de forţele dirijate tangenţial, după direcţia axei Ox_1. Soluţia se va obţine deci suprapunînd efectele forţelor $Q\,dx_3$ distribuite în lungul barei, precum şi efectul momentelor corespunzătoare, considerînd secţiunea x_3 acţionată de toate forţele ce lucrează la dreapta ei (principiul secţiunilor imaginare).

Sarcina globală Ql provoacă apariţia în reazime a două reacţiuni egale cu $-Ql/2$. Momentul sarcinilor repartizate $Q\,dx_3$ aplicate în punctele curente $x_3 \leqslant X_3 \leqslant l$, plus momentul reacţiunii în reazimul $x_3 = l$, este dirijat după Ox_2 şi are valoarea

$$\mathcal{M}_2(x_3) = Q\int_{x_3}^{l} (X_3 - x_3)\,dx_3 - \frac{1}{2}\,Ql\,(l - x_3) = -\frac{1}{2}\,Qx_3\,(l - x_3). \tag{28}$$

Din (5.9.22) şi (5.9.17) urmează acum

$$\sigma_{33} = -\,[\mathcal{M}_2(x_3)/I_2]\,x_1 = \frac{1}{2}\,(Q/I_2)\,(l - x_3)\,x_1\,x_3. \tag{29}$$

Pentru a determina σ_{31}, vom face uz de prima formulă (27), luînd $\mathcal{R}_1 = Q\,\mathrm{d}X_3$, integrînd de la x_3 la l şi ţinînd seama şi de sarcina $-\,Ql/2$ pe baza $x_3 = l$. Obţinem atunci

$$\sigma_{31} = -\frac{1}{2}\,Ql\,(1/2\,I_2)\,(a^2 - x_1^2) + (Q/2\,I_2)\,(a^2 - x_1^2)\int_{x_3}^{l} \mathrm{d}X_3 =$$

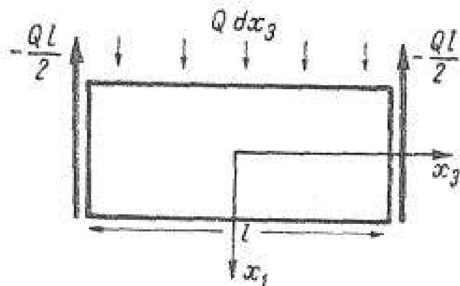


Fig. 6.5.4

$$= \frac{1}{2}\,(Q/I_2)\,(a^2 - x_1^2)\left(\frac{1}{2}\,l - x_3\right). \tag{30}$$

Soluţia (29), (30) va constitui punctul de pornire pentru căutarea funcţiei lui Airy a problemei. Întrucît este de preferat să raportăm domeniul dreptunghiular considerat din planul $Ox_1\,x_3$ la axele centrale principale, vom înlocui x_3 cu $x_3 + l/2$. Cu aceasta, formulele (29), (30) devin

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2}\,(Q/I_2)\left(x_3^2 - \frac{1}{4}\,l^2\right)x_1, \quad \sigma_{13} = -\frac{1}{2}\,(Q/I_2)\,(a^2 - x_1^2)\,x_3. \tag{31}$$

Vom începe prin a căuta acum soluţia corectă a problemei sub forma

$$\sigma_{33} = px_1 + q\,x_1\,x_3^2, \quad \sigma_{13} = rx_3 + sx_1^2\,x_3, \tag{32}$$

care păstrează structura formulelor elementare (31). Notînd cu $\mathsf{B}\,(x_1,x_2)$ funcţia lui Airy prezumată care — prin intermediul relaţiilor (4.20) — conduce la expresiile (32), obţinem

$$\mathsf{B}_{,11} = px_1 + qx_1\,x_3^2, \quad \mathsf{B}_{,13} = -\,rx_3 - sx_1^2\,x_3. \tag{33}$$

Integrînd prima din aceste ecuaţii, avem

$$\mathsf{B}\,(x_1,\,x_3) = \frac{1}{6}\,px_1^3 + \frac{1}{6}\,qx_1^3\,x_3^2 + x_1\,f_1\,(x_3) + f_2\,(x_3). \tag{34}$$

Introducînd această expresie în a doua ecuaţie (33), deducem

$$qx_1^2\,x_3 + f_1'\,(x_3) = -\,rx_3 - sx_1^2\,x_3,$$

de unde, introducînd o nouă constantă t:

$$s = -\,q, \quad f_1\,(x_3) = -\frac{1}{2}\,r\,x_3^2 + t, \tag{35}$$

astfel că (34) devine (termenul în t fiind neglijabil)

$$\mathsf{B}\,(x_1,\,x_3) = \frac{1}{6}\,p\,x_1^3 + \frac{1}{6}\,q\,x_1^3\,x_3^2 - \frac{1}{2}\,r\,x_1\,x_3^2 + f_2\,(x_3). \tag{36}$$

Această funcţie verifică relaţiile (33) — dar nu este biarmonică, întrucît

$$\Delta\Delta \mathsf{B} = 4\,qx_1 + f_2^{\mathrm{IV}}(x_3) \neq 0. \tag{37}$$

Ea nu poate fi funcţia lui Airy a problemei : spre deosebire de cazul plăcii în consolă, soluţia elementară nu poate asigura verificarea ecuaţiilor exacte. Să luăm atunci

$$\mathsf{A}(x_1, x_3) = \mathsf{B}(x_1, x_3) + \mathsf{C}(x_1, x_3), \tag{38}$$

şi să determinăm funcţia $\mathsf{C}(x_1, x_3)$ din condiţia ca $\mathsf{A}(x_1,x_3)$ să fie biarmonică. Deducem

$$\Delta\Delta \mathsf{C} = -\,4qx_1 - f_2^{\mathrm{IV}}(x_3), \tag{39}$$

ecuaţie care este satisfăcută dacă alegem (cu scopul ca $\Delta\Delta\mathsf{C}$ să fie liniară în x_1)

$$\mathsf{C}(x_1, x_3) = p'\,x_1 x_3^4 + q' x_1^5 - f_2(x_3) + g_1(x_3), \tag{40}$$

unde $g_1(x_3)$ este un polinom de grad cel mult 3. Avem desigur $\Delta\Delta\mathsf{C} = 24p'x_1 + 120q'x_1 - f_2^{\mathrm{IV}}(x_3)$, de unde, comparînd cu (39), deducem

$$p' + 5q' = -\frac{1}{6}\,q. \tag{41}$$

Funcţia lui Airy se scrie deci deocamdată sub forma

$$\mathsf{A}(x_1, x_3) = \frac{1}{6}\,p\,x_1^3 + \frac{1}{6}\,q\,x_1^3 x_3^2 - \frac{1}{2}\,r\,x_1 x_3^2 + p' x_1 x_3^4 - \left(\frac{1}{5}\,p' + \frac{1}{30}\,q\right) x_1^5 + g_1(x_3). \tag{42}$$

Introducînd (42) în relaţiile (4.20), obţinem acum

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{1}{3}\,qx_1^3 - rx_1 + 12\,p' x_1 x_3^2 + g_1''(x_3),\\
\sigma_{33} &= px_1 + qx_1 x_3^2 - \left(4p' + \frac{2}{3}\,q\right) x_1^3,\\
\sigma_{13} &= -\,qx_1^2\,x_3 + rx_3 - 4q' x_3^3.
\end{aligned} \tag{43}$$

Pentru a determina p, q, r, p' şi $g_1''(x_3)$, dispunem de condiţiile la limită ale problemei, care — scrise în spiritul principiului lui Saint-Venant — sînt

$$\sigma_{1;-1} = Q, \qquad \sigma_{13} = 0 \qquad \text{pentru } x_1 = -\,a; \tag{44}$$

$$\sigma_{11} = 0, \qquad \sigma_{13} = 0 \qquad \text{pentru } x_1 = a; \tag{45}$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \int_{-a}^{a} \sigma_{13}\,\mathrm{d}x_1 = \mp\,\frac{1}{2}\,Q\,l \qquad \text{pentru } x_3 = \pm\,\frac{1}{2}\,l. \tag{46}$$

(Pe baza $x_3 = -\dfrac{1}{2}\,l$ acţionează tensiunea $\sigma_{1;-3} = -\,\sigma_{13}$.)

Prima condiţie (44) şi prima condiţie (45) se scriu sub forma

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{3}\,q\,a^3 + ra - 12\,p'\,ax_3^2 + g_1''(x_3) = -\,Q,\\
&\frac{1}{3}\,q\,a^3 - ra + 12\,p'\,ax_3^2 + g_1''(x_3) = 0.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Adunînd şi scăzînd aceste relaţii termen cu termen, obţinem

$$
g_1''(x_3) = -\frac{1}{2}\,Q, \quad \frac{2}{3}\,qa^3 - 2ra = Q, \quad p' = 0. \tag{48}
$$

Formulele (43) devin atunci (q şi r nemaifiind independente)

$$
\sigma_{11} = \frac{1}{3}\,q\,x_1^3 - rx_1 - \frac{1}{2}\,Q, \quad \sigma_{33} = px_1 + qx_1x_3^2 - \frac{2}{3}\,q\,x_1^3, \quad \sigma_{13} = qx_1^2\,x_3 + rx_3. \tag{49}
$$

Introducînd expresia σ_{13} din (49) în (44) şi (45), deducem

$$
q = r/a^2, \tag{50}
$$

şi a doua relaţie (48) permite atunci să scriem

$$
q = -\frac{3}{4}\,Q/a^3, \quad r = -\frac{3}{4}\,Q/a. \tag{51}
$$

Cele două condiţii (46) rămîn deci să servească la determinarea unicei constante încă necunoscute din (49), constanta p. A doua din aceste condiţii este identic verificată : într-adevăr, ţinînd seama de (51), avem pentru $x_3 = \pm\, l/2$

$$
\int_{-a}^{a} \sigma_{13}\,\mathrm{d}x_1 = \pm\,\frac{1}{2}\,l \int_{-a}^{a} (-\,qx_1^2 + r)\,\mathrm{d}x_1 = \mp\,\frac{1}{2}\,Ql.
$$

În schimb, din (49) şi (51) deducem

$$
\sigma_{33}\Big|_{x_3=\pm\frac{1}{2}l} = \left(p - \frac{3}{16}\,Ql^2/a^3\right)x_1 + \frac{1}{2}\,(Q/a^3)\,x_1^3, \tag{52}
$$

astfel că cea dintîi din condiţiile (46) *nu poate fi* verificată identic.

Dispunem de două căi pentru a ieşi din acest impas. Prima ar consta dintr-o nouă modificare a funcţiei lui Airy, în aşa fel încît să fie respectate condiţiile deja verificate, şi să se asigure şi satisfacerea celei din urmă condiţii. A doua cale constă în a ne mulţumi cu verificarea acesteia în spiritul principiului lui Saint-Venant. Calculînd rezultanta şi momentul rezultant al tensiunilor σ_{33} pentru $x_3 = \pm\, l/2$ obţinem din (52)

$$
\mathcal{R}_3 = \int_{-a}^{a} \sigma_{33}\,\mathrm{d}x_1 = 0, \quad \mathcal{M}_2 = -\int_{-a}^{a} \sigma_{33}\,x_1\,\mathrm{d}x_1 = -\left(\frac{2}{3}\,pa^3 - \frac{1}{8}\,Q\,l^2 + \frac{1}{5}\,Qa^2\right), \tag{53}
$$

astfel că tensiunile normale σ_{33} formează un sistem static echivalent cu un cuplu de moment $\mathcal{M}_2$, în general diferit de zero. Din (54) obținem deci

$$p = (3/2a^3)\left(-\mathcal{M}_2 + \frac{1}{8}Q\,l^2 - \frac{1}{5}Qa^2\right), \tag{54}$$

astfel că relațiile (49) iau forma definitivă

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -(3\,Q/4a^3)\left(\frac{1}{3}x_1^3 - a^2 x_1 + \frac{2}{3}a^3\right), \\ \sigma_{33} &= (3/2a^3)\left(-\mathcal{M}_2 + \frac{1}{8}Ql^2 - \frac{1}{5}Qa^2\right)x_1 - (3Q/4a^3)\,x_1 x_3^2 + (Q/2a^3)\,x_1^3, \\ \sigma_{13} &= -(3\,Q/4a^3)(a^2 - x_1^2)\,x_3. \end{aligned} \tag{55}$$

Să presupunem acum $\mathcal{M}_2 = 0$, ceea ce înseamnă că condiția (46) pentru σ_{33} este satisfăcută în spiritul principiului lui Saint-Venant. Ținînd seama și de (19), obținem din (55) soluția problemei inițiale :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{1}{2}(Q/I_2)\left(\frac{1}{3}x_1^3 - a^2x_1 + I_2\right), \qquad \sigma_{13} = -\frac{1}{2}(Q/I_2)(a^2 - x_1^2)\,x_3, \\ \sigma_{33} &= -\frac{1}{2}(Q/I_2)\left(x_3^2 - \frac{1}{4}l^2 - \frac{2}{3}x_1^2 + \frac{2}{5}a^2\right)x_1. \end{aligned} \tag{56}$$

Comparînd-o cu soluția elementară din (31) (completată cu valoarea $\sigma_{11} = 0$), se constată că componenta σ_{31} își păstrează valoarea, în timp ce σ_{33} crește cu $(Q/I_2)\left(\frac{1}{3}x_1^2 - \frac{1}{5}a^2\right)x_1$. Aceasta e o mărime neglijabilă, în afară de cazul $x_3 \cong \pm l/2$. În fine, σ_{11} nu e nulă, ci variază de la zero la $-Q$.

Pornind de la (55), se pot determina deplasările (ceea ce soluția (31) nu îngăduie). În particular, aceasta permite și rezolvarea problemei grinzii *încastrate* la capete, caz în care valoarea (necunoscută) a momentului $\mathcal{M}_2$ se determină din condițiile la limită de forma

$$u_{1,3}\big|_{x_3=\pm l/2} = 0, \quad \text{sau} \quad u_{3,1}\big|_{x_3=\pm l/2} = 0. \tag{57}$$

(Prima exprimă condiția ca direcția elementelor orizontale să nu varieze la capetele barei ; a doua exprimă aceeași condiție pentru elementele verticale.)

d) Problema dreptunghiului. Metoda separării variabilelor

În general, se pot întîlni date la limită oarecare pe cele patru laturi ale dreptunghiului, ceea ce obligă la atacarea problemei printr-o metodă directă.

În acest scop, se caută adesea funcția lui Airy sub forma

$$\mathsf{A}(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{X}_n(x_1)\,\mathsf{Y}_n(x_2). \tag{58}$$

Introducînd (3) în (4.20), deducem

$$\sigma_{11} = rx_1 + sx_2, \quad \sigma_{22} = px_1 + qx_2, \quad \sigma_{12} = -qx_1 - rx_2. \tag{4}$$

De aci obţinem cele patru stări de tensiune posibile :

$$p \neq 0: \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = px_1, \quad \sigma_{12} = 0; \tag{5}$$

$$q \neq 0: \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = qx_2, \quad \sigma_{12} = -qx_1; \tag{6}$$

$$r \neq 0: \quad \sigma_{11} = rx_1, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -rx_2; \tag{7}$$

$$s \neq 0: \quad \sigma_{11} = sx_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0. \tag{8}$$

Primul caz rezolvă problema domeniului dreptunghiular de laturi $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$, supus la încovoiere pură (plană!) de către tensiuni normale aplicate pe laturile $x_2 = \pm b$, şi variind

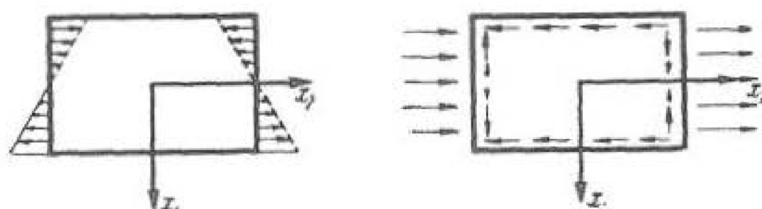


Fig. 6.5.1

liniar pe aceste laturi (compară cu (5.6.17)). Al doilea caz rezolvă problema aceluiaşi domeniu, supus la o combinaţie de întinderi şi alunecări. Ultimele două cazuri se deduc din cele dintîi prin intervertirea axelor. În figură sînt redate primele două cazuri, pentru $p > 0$, $q > 0$.

b) *Placa dreptunghiulară în consolă*

Să trecem la studiul analogului plan al problemei consolei de secţiune dreptunghiulară, cercetată în § 5.20, exemplul *f*.

Pentru aceasta, fie că consola de axă Ox_3 este plană în raport cu Ox_2 — înţelegînd prin aceasta fie că ea are forma unei plăci plane de grosime $2h$ pe direcţia Ox_2 (stare de tensiune plană generalizată), fie forma unui cilindru infinit de generatoare paralele cu Ox_2 (stare plană de deformaţie). În primul caz este vorba de o placă subţire dispusă *vertical*; în cel de-al doilea, de o placă infinită (eventual groasă) dispusă *orizontal*. (A se revedea figurile 5.20.2 şi 5.20.3.)

Prima din aceste probleme a putut fi rezolvată ca problemă anti-plană, soluţia fiind dată cu o bună aproximaţie chiar de formulele lui Jurawski (5.20.39); dimpotrivă, cea de a doua nu a putut fi examinată (vezi § 5.20, pag. 318). Cea de-a doua problemă poate fi la rîndu-i studiată în două moduri : ca stare plană de deformaţie, şi ca problemă de placă încovoiată.

Să reducem chestiunea la studiul problemei plane pentru domeniul din figura 6.5.2, unde avem $-a \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_2 \leqslant l$, sarcina fiind echivalentă cu o forţă $\mathcal{R}_1$ (măsurată în kgf/cm). Domeniul $\mathcal{D}$ considerat este o secţiune longitudinală a consolei, ce trece prin axele Ox_1 şi Ox_3.

Axa Ox_1 este axă centrală principală de inerție. Întrucît planul Ox_1x_2 din paragrafele anterioare este aci înlocuit cu planul Ox_1x_3, vom avea de făcut modificările corespunzătoare de notații.

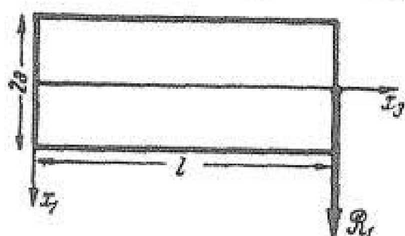


Fig. 6.5.2

Avem de rezolvat ecuația (4.21) cu condițiile la limită pe frontiera domeniului $\mathcal{D}$, condiții care, în spiritul principiului lui Saint-Venant, trebuie scrise sub forma:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \qquad \text{pentru } x_1 = \pm a, \tag{9}$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \int_{-a}^{a} \sigma_{13}\, dx_1 = \mathcal{R}_1 \quad \text{pentru } x_3 = l, \tag{10}$$

ele exprimînd faptul că suprafața laterală a consolei (așadar, fețele „superioară" și „inferioară" ale paralelipipedului) este liberă, iar baza $x_3 = l$ este supusă la o sarcină tangențială de rezultantă $\mathcal{R}_1$.

Vom începe prin a căuta soluția problemei tot cu ajutorul unei funcții Airy polinomiale, de grad 3 (așadar evident biarmonică):

$$\mathsf{A}(x_1, x_3) = px_1^3 + qx_1^2 x_3 + rx_1 x_3^2 + sx_3^3 + p' x_1^2 + q' x_1x_3 + r' x_3^2, \tag{11}$$

de unde, cu ajutorul relațiilor (4.20), deducem

$$\sigma_{11} = 2rx_1 + 6sx_3 + 2r', \quad \sigma_{33} = 6px_1 + 2qx_3 + 2p', \quad \sigma_{13} = -2qx_1 - 2rx_3 - q'. \tag{12}$$

Din (9) și din prima condiție (10), obținem

$$\pm 2ra + 6sx_3 + 2r' = \pm 2qa - 2rx_3 - q' = 6px_1 + 2ql + 2p' = 0,$$

ceea ce este posibil dacă și numai dacă luăm

$$p = r = s = 0, \quad r' = \pm ra, \quad q' = \pm 2qa, \quad p' = -ql,$$

așadar dacă toate constantele din (11) sînt nule. Prin urmare, forma aleasă pentru funcția lui Airy este prea elementară pentru a permite satisfacerea tuturor condițiilor la limită. Adăugîndu-i un termen de grad 4, de forma $s' x_1^3 x_3$, obținem în loc de (12), expresiile

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2rx_1 + 6sx_3 + 2r', \\ \sigma_{33} &= 6px_1 + 2qx_3 + 2p' + 6s' x_1 x_3, \\ \sigma_{13} &= -2qx_1 - 2rx_3 - q' - 3s'x_1^2; \end{aligned} \tag{13}$$

condițiile la limită mai sus considerate dau acum $\pm 2ra + 6sx_3 + 2r' = 0$, $\pm 2qa - 2rx_3 - q' - 3s'a^2 = 0$, $6px_1 + 2ql + 2p' + 6s'x_1 l = 0$, ceea ce conduce la

$$q = r = s = p' = r' = 0, \quad p = -s' l, \quad q' = -3s'a^2. \tag{14}$$

Introducînd (13) în a doua condiție (10), obținem acum

$$s' = \mathcal{R}_1/4a^3, \tag{15}$$

astfel că în definitiv funcția lui Airy se scrie

$$\mathsf{A}(x_1, x_3) = (\mathcal{R}_1/4a^3)(x_1^3 x_3 - l x_1^3 - 3a^2 x_1 x_3), \tag{16}$$

iar componentele (13) ale tensiunii au valorile

$$\sigma_{11} = 0, \qquad \sigma_{33} = -(3\mathcal{R}_1/2a^3)\, x_1 (l - x_3), \qquad \sigma_{13} = (3\mathcal{R}_1/4a^3)(a^2 - x_1^2). \tag{17}$$

Să calculăm acum momentul de inerţie I_2 al secţiunii (normale) a consolei. Pentru dreptunghiul de laturi $2a$, $2b$ avem din (5.7.7)

$$I_2 = \iint\limits_{\mathcal{D}} x_1^2 \, dD = \frac{4}{3} a^3 b. \tag{18}$$

Raportînd acest moment de inerţie la unitatea de lungime pe direcţia Ox_2 — aşa cum procedăm cu toate mărimile cu care avem de-a face în problema plană — vom obţine pentru *momentul de inerţie unitar* $I_2/2b$, pe care îl notăm din nou cu I_2, valoarea

$$I_2 = \frac{2}{3} a^3. \tag{19}$$

Cu aceasta, formulele (17) devin

$$\sigma_{11} = 0, \qquad \sigma_{33} = -(\mathcal{R}_1/I_2)\, x_1 (l - x_3), \qquad \sigma_{13} = (\mathcal{R}_1/2I_2)(a^2 - x_1^2). \tag{20}$$

Valoarea componentei σ_{33} coincide cu cea rezultînd din (5.9.7). Componenta σ_{13} are valoarea din (5.20.39). În fine, componentele σ_{11} şi σ_{2j} (în particular, σ_{22}) sînt nule, ca şi în cazul problemei consolei tratate cu formulele lui Jurawski.

Formulele (20) nu depind de constantele elastice, şi deci conduc la aceleaşi valori ale tensiunii, atît pentru starea de deformaţia plană, cît şi pentru cea de tensiune plană generalizată. Spre deosebire de soluţia elementară din § 5.20, cea de aci se dovedeşte însă valabilă şi dacă $2b \gg l \gg 2a$.

Dimpotrivă, deplasările diferă între ele. Pentru a le calcula, putem face uz de (1.9.8), transcriind deformaţia cu ajutorul legii lui Hooke *în cele două variante distincte* ce rezultă din (3.67) pentru primul caz, respectiv (2.24) pentru cel de-al doilea (unde trebuie să intervertim şi variabilele x_2 şi x_3), şi făcînd uz de (17) sau (20). Integrarea se poate face pe *orice* drum, de pildă pe un drum compus din segmente paralele cu axele.

Tot atît de uşor se pot integra direct ecuaţiile fizico-geometrice. Astfel, din (3.67) şi (20) se obţin valorile $u_{1,1}$, $u_{3,3}$ şi $u_{1,3} + u_{3,1}$. Integrînd primele două expresii, apar două funcţii necunoscute, care se determină ţinînd seama de cea de-a treia expresie considerată. Obţinem astfel:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/EI_2)\left[l x_3^2 - \frac{1}{3}x_3^3 + \nu x_1^2 (l - x_3) + A x_3 + C\right], \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/EI_2)\left[x_1 (x_3^2 - 2l x_3) - \frac{1}{3}(2+\nu)\, x_1^3 - B x_1 - D\right], \end{aligned} \tag{21}$$

unde A, B, C, D sînt constante, legate prin relaţia $A - B = 2(1+\nu)\, a^2$.

În cazul stării plane de deformație, ecuațiile (3.67) se înlocuiesc cu (2.24). Rezultatul final se poate obține direct din (21), înlocuind constantele ν, E prin valorile din a doua linie din (3.66), și apoi revenind la notațiile ν, E.

Tratînd problema ca problemă de *încovoiere a unei plăci infinite*, avem de integrat (3.96) cu condițiile (3.93), (3.95). De data aceasta, trebuie să intervertim x_1 cu x_3 și u_1 cu u_3, și să înlocuim $2h$ cu $2a$. Întrucît componentele stării elastice nu depind de x_2, sîntem conduși la a integra ecuația

$$d^4 u_1/dx_3{}^4 = 0. \tag{22}$$

În ce privește condițiile la limită, vom presupune că placa este rigid fixată (*încastrată*) în lungul liniei $x_3 = 0$: această linie nu se poate deplasa, și planul tangent în lungul ei de asemenea nu se deplasează în procesul de deformație. Dimpotrivă, marginea $x_3 = l$ se rotește liber, astfel că aci nu pot fi aplicate momente încovoietoare, ci numai o forță tăietoare. Avem deci

$$u_1\big|_{x_3=0} = du_1/dx_3\big|_{x_3=0} = 0, \qquad N_{33}\big|_{x_3=l} = 0, \; N_{31}\big|_{x_3=l} = \mathcal{R}_1. \tag{23}$$

Făcînd uz de formulele (3.88), (3.91) și (3.78), obținem imediat

$$u_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/D)\left(lx_3^2 - \frac{1}{3}x_3^3\right), \; D = \frac{2}{3}E\,a^3/(1-\nu^2). \tag{24}$$

Ținînd acum seama de presupunerea că componenta σ_{11} (care înlocuiește aci pe σ_{33}) este neglijabilă, precum și de relațiile (3.88) – (3.90), obținem componentele tensiunii

$$\sigma_{11} = 0, \; \sigma_{33} = -\frac{3}{2}(\mathcal{R}_1/a^3)\,x_1(l - x_3), \; \sigma_{13} = \frac{3}{4}(\mathcal{R}_1/a^3)(a^2 - x_1^2), \tag{25}$$

ceea ce coincide cu (17), sau — ceea ce este același lucru — cu (20).

Rezultatul privind starea de tensiune este deci identic în cele trei variante. Pentru determinarea deplasărilor în ultima variantă, dispunem de u_1 din (24), unde putem introduce valorile I_2 și D din (19) și (24). Componenta u_2 este nulă, iar din (3.16) și (3.85) căpătăm $u_3 = -x_1u_{1,3}$. Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/E\,I_2)(1-\nu^2)\left(lx_3^2 - \frac{1}{3}x_3^3\right),\\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/E\,I_2)(1-\nu^2)\,x_1(x_3^2 - 2lx_3). \end{aligned} \tag{26}$$

Formulele (21) cu constantele elastice înlocuite așa cum am arătat mai sus, conțin încă și alți termeni — a căror prezență se explică prin aceea că soluția în cazul stării plane de deformație este soluția exactă, în timp ce în starea de încovoiere a plăcii intervin ipoteze suplimentare. (De unde obligația de a satisface primele două condiții (23).) Expresiile ce depind de A, B, C, D descriu o deplasare rigidă, eliminată în (26) prin condițiile de încastrare.

c) Grinda pe două reazime

Să considerăm acelaşi paralelipiped de muchii $2a$, $2b$, l, solicitat de o sarcină repartizată de intensitate constantă Q pe faţa sa superioară. Dacă $2b \ll 2a \ll l$, avem de-a face cu o placă dispusă în planul vertical, şi aşezată pe două reazime cvasi-punctuale (fig. 5.20.2). Dacă $2b \gg l \gg 2a$, placa este aşezată orizontal şi e sprijinită pe două linii de rezemare (fig. 5.20.3).

În primul caz, Q măsoară intensitatea liniară a sarcinii pe grosimea plăcii; în cel de-al doilea, intensitatea liniară a sarcinii pe o fîşie de lăţime unitară a feţei superioare a plăcii.

În ambele cazuri, secţiunea normală a cilindrului (de ax Ox_3), sau planul median al plăcii subţiri, sînt solicitate după schema din figura 6.5.3. Probleme de acest tip (sarcină *pe suprafaţa laterală* a barei cilindrice, eventual funcţie de x_3) se rezolvă curent cu mijloacele rezistenţei materialelor — cu toate că soluţiile exacte nu sînt încă în general cunoscute.

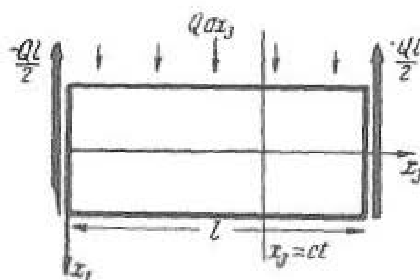


Fig. 6.5.3

În cazul secţiunii dreptunghiulare, problema poate fi rezolvată aproape la fel ca în cazul plăcii în consolă. Este însă adesea util să folosim eventuale soluţii aproximative ale problemei — dacă dispunem de ele — pentru a uşura căutarea funcţiei lui Airy.

Să abordăm problema de faţă cu mijloacele rezistenţei materialelor, aşadar utilizînd (5.20.39). Ţinînd seama şi de (5.9.7), vom lua ca punct de plecare

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}\,(\mathcal{R}_1/I_2)\,(a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = (\mathcal{R}_1/I_2)\,x_1\,(x_3 - l). \tag{27}$$

Să considerăm că componentele normale σ_{33} apar ca efect al acţiunii momentului încovoietor corespunzător în fiecare secţiune (vezi § 5.9, pag. 207). Componentele σ_{31} sînt produse de forţele dirijate tangenţial, după direcţia axei Ox_1. Soluţia se va obţine deci suprapunînd efectele forţelor $Q\,dx_3$ distribuite în lungul barei, precum şi efectul momentelor corespunzătoare, considerînd secţiunea x_3 acţionată de toate forţele ce lucrează la dreapta ei (principiul secţiunilor imaginare).

Sarcina globală Ql provoacă apariţia în reazime a două reacţiuni egale cu $-Ql/2$. Momentul sarcinilor repartizate $Q\,dx_3$ aplicate în punctele curente $x_3 \leqslant X_3 \leqslant l$, plus momentul reacţiunii în reazimul $x_3 = l$, este dirijat după Ox_2 şi are valoarea

$$\mathcal{M}_2(x_3) = Q\int_{x_3}^{l} (X_3 - x_3)\,dx_3 - \frac{1}{2}\,Ql\,(l - x_3) = -\frac{1}{2}\,Qx_3\,(l - x_3). \tag{28}$$

Din (5.9.22) şi (5.9.17) urmează acum

$$\sigma_{33} = -\,[\mathcal{M}_2(x_3)/I_2]\,x_1 = \frac{1}{2}\,(Q/I_2)\,(l - x_3)\,x_1\,x_3. \tag{29}$$

Pentru a determina σ_{31}, vom face uz de prima formulă (27), luînd $\mathcal{R}_1 = Q\,dX_3$, integrînd de la x_3 la l şi ţinînd seama şi de sarcina $-Ql/2$ pe baza $x_3 = l$. Obţinem atunci

$$\sigma_{31} = -\frac{1}{2} Ql\,(1/2\,I_2)\,(a^2 - x_1^2) + (Q/2\,I_2)\,(a^2 - x_1^2)\int_{x_3}^{l} dX_3 =$$

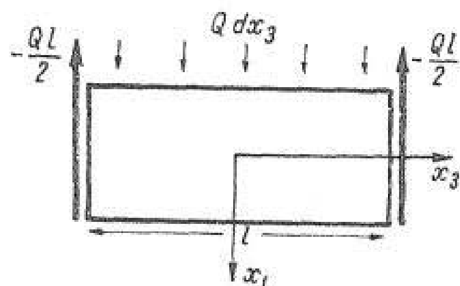


Fig. 6.5.4

$$= \frac{1}{2}(Q/I_2)\,(a^2 - x_1^2)\left(\frac{1}{2}\,l - x_3\right). \qquad (30)$$

Soluţia (29), (30) va constitui punctul de pornire pentru căutarea funcţiei lui Airy a problemei. Întrucît este de preferat să raportăm domeniul dreptunghiular considerat din planul $Ox_1\,x_3$ la axele centrale principale, vom înlocui x_3 cu $x_3 + l/2$. Cu aceasta, formulele (29), (30) devin

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2}\,(Q/I_2)\left(x_3^2 - \frac{1}{4}\,l^2\right)x_1, \quad \sigma_{13} = -\frac{1}{2}\,(Q/I_2)\,(a^2 - x_1^2)\,x_3. \qquad (31)$$

Vom începe prin a căuta acum soluţia corectă a problemei sub forma

$$\sigma_{33} = px_1 + q\,x_1\,x_3^2, \quad \sigma_{13} = rx_3 + sx_1^2\,x_3, \qquad (32)$$

care păstrează structura formulelor elementare (31). Notînd cu $\mathrm{B}(x_1, x_2)$ funcţia lui Airy prezumată care — prin intermediul relaţiilor (4.20) — conduce la expresiile (32), obţinem

$$\mathrm{B}_{,11} = px_1 + qx_1\,x_3^2, \quad \mathrm{B}_{,13} = -rx_3 - sx_1^2\,x_3. \qquad (33)$$

Integrînd prima din aceste ecuaţii, avem

$$\mathrm{B}(x_1, x_3) = \frac{1}{6}\,px_1^3 + \frac{1}{6}\,qx_1^3\,x_3^2 + x_1 f_1(x_3) + f_2(x_3). \qquad (34)$$

Introducînd această expresie în a doua ecuaţie (33), deducem

$$qx_1^2\,x_3 + f_1'(x_3) = -rx_3 - sx_1^2 x_3,$$

de unde, introducînd o nouă constantă t:

$$s = -q, \quad f_1(x_3) = -\frac{1}{2}\,r\,x_3^2 + t, \qquad (35)$$

astfel că (34) devine (termenul în t fiind neglijabil)

$$\mathrm{B}(x_1, x_3) = \frac{1}{6}\,p\,x_1^3 + \frac{1}{6}\,q\,x_1^3\,x_3^2 - \frac{1}{2}\,r\,x_1\,x_3^2 + f_2(x_3). \qquad (36)$$

Această funcție verifică relațiile (33) — dar nu este biarmonică, întrucît

$$\Delta \Delta \mathsf{B} = 4\, q x_1 + f_2^{\mathrm{IV}}(x_3) \neq 0. \tag{37}$$

Ea nu poate fi funcția lui Airy a problemei: spre deosebire de cazul plăcii în consolă, soluția elementară nu poate asigura verificarea ecuațiilor exacte. Să luăm atunci

$$\mathsf{A}(x_1, x_3) = \mathsf{B}(x_1, x_3) + \mathsf{C}(x_1, x_3), \tag{38}$$

și să determinăm funcția $\mathsf{C}(x_1, x_3)$ din condiția ca $\mathsf{A}(x_1,x_3)$ să fie biarmonică. Deducem

$$\Delta \Delta \mathsf{C} = -\, 4 q x_1 - f_2^{\mathrm{IV}}(x_3), \tag{39}$$

ecuație care este satisfăcută dacă alegem (cu scopul ca $\Delta \Delta \mathsf{C}$ să fie liniară în x_1)

$$\mathsf{C}(x_1, x_3) = p' x_1 x_3^4 + q' x_1^5 - f_2(x_3) + g_1(x_3), \tag{40}$$

unde $g_1(x_3)$ este un polinom de grad cel mult 3. Avem desigur $\Delta\Delta\mathsf{C} = 24 p' x_1 + 120 q' x_1 - f_2^{\mathrm{IV}}(x_3)$, de unde, comparînd cu (39), deducem

$$p' + 5q' = -\frac{1}{6}\, q. \tag{41}$$

Funcția lui Airy se scrie deci deocamdată sub forma

$$\mathsf{A}(x_1, x_3) = \frac{1}{6}\, p\, x_1^3 + \frac{1}{6}\, q\, x_1^3 x_3^2 - \frac{1}{2}\, r\, x_1 x_3^2 + p' x_1 x_3^4 - \left(\frac{1}{5}\, p' + \frac{1}{30}\, q\right) x_1^5 + g_1(x_3). \tag{42}$$

Introducînd (42) în relațiile (4.20), obținem acum

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{3}\, q x_1^3 - r x_1 + 12\, p' x_1 x_3^2 + g_1''(x_3), \\ \sigma_{33} &= p x_1 + q x_1 x_3^2 - \left(4p' + \frac{2}{3}\, q\right) x_1^3, \\ \sigma_{13} &= -\, q x_1^2 x_3 + r x_3 - 4 q' x_3^3. \end{aligned} \tag{43}$$

Pentru a determina $p,\ q,\ r,\ p'$ și $g_1''(x_3)$, dispunem de condițiile la limită ale problemei, care — scrise în spiritul principiului lui Saint-Venant — sînt

$$\sigma_{1;-1} = Q, \qquad \sigma_{13} = 0 \qquad \text{pentru } x_1 = -\, a; \tag{44}$$

$$\sigma_{11} = 0, \qquad \sigma_{13} = 0 \qquad \text{pentru } x_1 = a; \tag{45}$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \int_{-a}^{a} \sigma_{13}\, \mathrm{d}x_1 = \mp \frac{1}{2}\, Q\, l \qquad \text{pentru } x_3 = \pm \frac{1}{2}\, l. \tag{46}$$

(Pe baza $x_3 = -\dfrac{1}{2}\, l$ acționează tensiunea $\sigma_{1;-3} = -\, \sigma_{13}$.)

Prima condiţie (44) şi prima condiţie (45) se scriu sub forma

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{3} q\, a^3 + ra - 12\, p'\, a x_3^2 + g_1''(x_3) &= -Q,\\
\frac{1}{3} q\, a^3 - ra + 12\, p'\, a x_3^2 + g_1''(x_3) &= 0.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Adunînd şi scăzînd aceste relaţii termen cu termen, obţinem

$$
g_1''(x_3) = -\frac{1}{2} Q, \quad \frac{2}{3} q a^3 - 2ra = Q, \quad p' = 0. \tag{48}
$$

Formulele (43) devin atunci (q şi r nemaifiind independente)

$$
\sigma_{11} = \frac{1}{3} q\, x_1^3 - r x_1 - \frac{1}{2} Q, \quad \sigma_{33} = p x_1 + q x_1 x_3^2 - \frac{2}{3} q\, x_1^3, \quad \sigma_{13} = q x_1^2 x_3 + r x_3. \tag{49}
$$

Introducînd expresia σ_{13} din (49) în (44) şi (45), deducem

$$
q = r/a^2, \tag{50}
$$

şi a doua relaţie (48) permite atunci să scriem

$$
q = -\frac{3}{4} Q/a^3, \quad r = -\frac{3}{4} Q/a. \tag{51}
$$

Cele două condiţii (46) rămîn deci să servească la determinarea unicei constante încă necunoscute din (49), constanta p. A doua din aceste condiţii este identic verificată : într-adevăr, ţinînd seama de (51), avem pentru $x_3 = \pm l/2$

$$
\int_{-a}^{a} \sigma_{13}\, \mathrm{d}x_1 = \pm \frac{1}{2} l \int_{-a}^{a} (-q x_1^2 + r)\, \mathrm{d}x_1 = \mp \frac{1}{2} Ql.
$$

În schimb, din (49) şi (51) deducem

$$
\sigma_{33} \Big|_{x_3 = \pm \frac{1}{2} l} = \left(p - \frac{3}{16} Q l^2/a^3 \right) x_1 + \frac{1}{2} (Q/a^3)\, x_1^3, \tag{52}
$$

astfel că cea dintîi din condiţiile (46) *nu poate fi* verificată identic.

Dispunem de două căi pentru a ieşi din acest impas. Prima ar consta dintr-o nouă modificare a funcţiei lui Airy, în aşa fel încît să fie respectate condiţiile deja verificate, şi să se asigure şi satisfacerea celei din urmă condiţii. A doua cale constă în a ne mulţumi cu verificarea acesteia în spiritul principiului lui Saint-Venant. Calculînd rezultanta şi momentul rezultant al tensiunilor σ_{33} pentru $x_3 = \pm l/2$ obţinem din (52)

$$
\mathcal{R}_3 = \int_{-a}^{a} \sigma_{33}\, \mathrm{d}x_1 = 0, \quad \mathcal{M}_2 = -\int_{-a}^{a} \sigma_{33}\, x_1\, \mathrm{d}x_1 = -\left(\frac{2}{3} p a^3 - \frac{1}{8} Q l^2 + \frac{1}{5} Q a^2 \right), \tag{53}
$$

astfel că tensiunile normale σ_{33} formează un sistem static echivalent cu un cuplu de moment $\mathcal{M}_2$, în general diferit de zero. Din (54) obţinem deci

$$p = (3/2a^3)\left(-\mathcal{M}_2 + \frac{1}{8}Q\,l^2 - \frac{1}{5}Qa^2\right), \tag{54}$$

astfel că relaţiile (49) iau forma definitivă

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -(3\,Q/4a^3)\left(\frac{1}{3}x_1^3 - a^2x_1 + \frac{2}{3}a^3\right),\\
\sigma_{33} &= (3/2a^3)\left(-\mathcal{M}_2 + \frac{1}{8}Ql^2 - \frac{1}{5}Qa^2\right)x_1 - (3Q/4a^3)\,x_1x_3^2 + (Q/2a^3)\,x_1^3,\\
\sigma_{13} &= -(3\,Q/4a^3)\,(a^2 - x_1^2)\,x_3.
\end{aligned} \tag{55}$$

Să presupunem acum $\mathcal{M}_2 = 0$, ceea ce înseamnă că condiţia (46) pentru σ_{33} este satisfăcută în spiritul principiului lui Saint-Venant. Ţinînd seama şi de (19), obţinem din (55) soluţia problemei iniţiale:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{1}{2}(Q/I_2)\left(\frac{1}{3}x_1^3 - a^2x_1 + I_2\right), \qquad \sigma_{13} = -\frac{1}{2}(Q/I_2)(a^2 - x_1^2)\,x_3,\\
\sigma_{33} &= -\frac{1}{2}(Q/I_2)\left(x_3^2 - \frac{1}{4}l^2 - \frac{2}{3}x_1^2 + \frac{2}{5}a^2\right)x_1.
\end{aligned} \tag{56}$$

Comparînd-o cu soluţia elementară din (31) (completată cu valoarea $\sigma_{11} = 0$), se constată că componenta σ_{31} îşi păstrează valoarea, în timp ce σ_{33} creşte cu $(Q/I_2)\left(\frac{1}{3}x_1^2 - \frac{1}{5}a^2\right)x_1$. Aceasta e o mărime neglijabilă, în afară de cazul $x_3 \cong \pm l/2$. În fine, σ_{11} nu e nulă, ci variază de la zero la $-Q$.

Pornind de la (55), se pot determina deplasările (ceea ce soluţia (31) nu îngăduie). În particular, aceasta permite şi rezolvarea problemei grinzii *încastrate* la capete, caz în care valoarea (necunoscută) a momentului $\mathcal{M}_2$ se determină din condiţiile la limită de forma

$$u_{1,3}\big|_{x_3=\pm l/2} = 0, \quad \text{sau} \quad u_{3,1}\big|_{x_3=\pm l/2} = 0. \tag{57}$$

(Prima exprimă condiţia ca direcţia elementelor orizontale să nu varieze la capetele barei; a doua exprimă aceeaşi condiţie pentru elementele verticale.)

d) Problema dreptunghiului. Metoda separării variabilelor

În general, se pot întîlni date la limită oarecare pe cele patru laturi ale dreptunghiului, ceea ce obligă la atacarea problemei printr-o metodă directă.

În acest scop, se caută adesea funcţia lui Airy sub forma

$$\mathsf{A}(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{X}_n(x_1)\,\mathsf{Y}_n(x_2). \tag{58}$$

Ecuaţia biarmonică (4.21) ia astfel forma

$$X^{IV} Y + 2X'' Y'' + XY^{IV} = 0.$$

(pentru *fiecare* termen al sumei (58)), sau încă

$$X^{IV}/X + 2(X''/X)(Y''/Y) + Y^{IV}/Y = 0. \tag{59}$$

Derivînd această ecuaţie în raport cu x_1, obţinem

$$2(Y''/Y) = -(X^{IV}/X)' : (X''/X)', \tag{60}$$

astfel că ambii membri ai acestei ultime ecuaţii trebuie să fie egali cu o aceeaşi constantă, fie ea $-2\lambda^2$ (mai exact : $-2\lambda_n^2$). De aci avem mai întîi ecuaţia

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0, \tag{61}$$

a cărei soluţie are forma

$$Y = h \cos \lambda x_2 + k \sin \lambda x_2. \tag{62}$$

Întrucît din (61) urmează $Y^{IV} = -\lambda^2 Y'' = \lambda^4 Y$, ecuaţia (59) devine

$$X^{IV} - 2\lambda^2 X'' + \lambda^4 X = 0, \tag{63}$$

cu soluţia generală

$$X(x_1) = A \operatorname{ch} \lambda x_1 + B \operatorname{sh} \lambda x_1 + C x_1 \operatorname{ch} \lambda x_1 + D x_1 \operatorname{sh} \lambda x_1. \tag{64}$$

Funcţia lui Airy este deci o *sumă* de produse de funcţii de forma (62) şi (64), cu coeficienţi — funcţii de n — care trebuie determinaţi din condiţiile la limită.

În particular, luînd $h = 0$ în (62), se obţine soluţia lui L. Filon [1]; dimpotrivă, pentru $k = 0$, rezultă soluţia lui M. Ribière [1] [2]. Pentru detalii, vezi P. Papkovici [4], §§ 10.4—10.6; S. Timoshenko şi J. Goodier [1], § 23.

Dreptunghiul elastic — inclusiv în cazurile limită în care dezvoltările în serie sînt înlocuite prin integrale Fourier — este studiat cu un mare număr de exemple de P.P. Teodorescu [2]. Vezi încă B. Abramian şi M. Manukian [1] (soluţie prin serii, sisteme de ecuaţii complet regulate).

Pentru un punct de vedere modern, uzînd de teoria distribuţiilor, vezi J. Leray [1] (cu aplicaţii : J. C. Leray [1]).

Să examinăm pe scurt cazul dreptunghiului pentru $a \ll b$, ceea ce permite verificarea condiţiilor la limită pe laturile $x_2 = \pm b$ în spiritul principiului lui Saint-Venant.

Pentru a ne elibera de prezenţa unor sarcini σ_{22} pe laturile $x_2 = \pm b$, să luăm în (62) $h = 0$, $\lambda_n b = n\pi$, aşadar să căutăm soluţia sub forma propusă de Filon :

$$A(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x_2}{b} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x_1}{b} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x_1}{b} + C_n x_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi x_1}{b} + D_n x_1 \operatorname{sh} \frac{n\pi x_1}{b} \right]. \tag{65}$$

Într-adevăr, fiecare termen al seriei ce rezultă de aci pentru $\sigma_{22} = \mathsf{A}_{,11}$ este nul pentru $x_2 = \pm b$. În ce privește sarcinile tangențiale σ_{12}, ele trebuie să fie determinate din condițiile la limită de pe laturile $x_1 = \pm a$, care se scriu sub forma

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = \mathsf{A}_{,22} = f_1(x_2), \qquad \sigma_{12} = -\mathsf{A}_{,12} = g_1(x_2) \qquad \text{pentru } x_1 = a, \\ &\sigma_{1;-1} = -\mathsf{A}_{,22} = f_2(x_2), \qquad \sigma_{-1;2} = \mathsf{A}_{,12} = g_2(x_2), \qquad \text{pentru } x_1 = -a, \end{aligned} \tag{66}$$

unde f_1, f_2, g_1, g_2 sînt sarcinile (normale și tangențiale) cunoscute pe bazele dreptunghiului. Dezvoltînd aceste funcții în serii Fourier, obținem prin identificare un număr de $4m$ condiții pentru determinarea celor $4m$ coeficienți ce apar în (65), dacă se rețin numai primii m termeni ai seriei.

Funcțiile g_1, g_2 sînt valori la limită ale unor serii de cosinuși, și ele trebuie deci să satisfacă condițiile

$$\int_{-b}^{b} g_1(x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \int_{-b}^{b} g_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2 = 0, \tag{67}$$

ceea ce arată că sarcina tangențială trebuie să aibă rezultanta nulă. Sarcina normală pe laturile $x_1 = \pm a$ va fi echilibrată de rezultanta sarcinii tangențiale pe laturile $x_2 = \pm b$ (reacțiuni în reazime). Soluția de acest tip poate fi folosită și pentru sarcini ce nu respectă condiția globală (67), suprapunîndu-i-se soluții elementare polinomiale.

OBSERVAȚIE. Metoda separării variabilelor poate sluji și pentru alte domenii decît cel dreptunghiular, dacă putem trece la coordonate convenabile. Cazul cel mai simplu este cel al domeniilor cu frontiere circulare (coroană, sector etc.) studiat în coordonate polare. Pentru detalii, vezi de exemplu M. Filonenko-Borodici [1], capitolul 7, sau P. Papkovici [4], capitolul 11.

§ 6. FORMA ECUAȚIILOR PROBLEMEI PLANE ÎN VARIABILE COMPLEXE CONJUGATE

Am arătat la finele § 4 că problema plană poate fi redusă la determinarea a două funcții de o variabilă complexă, ceea ce permite atacarea problemelor fundamentale prin metode directe.

Eficacitatea acestui punct de vedere depinde în mare măsură de *modul* în care se stabilește legătura dintre mărimile elastice, și potențialii complecși. Primele cercetări în această direcție sînt cele ale lui A. Love [1], capitolul 9, și L. Filon [1]. Dar cele mai importante rezultate aparțin școlii lui N. Mushelișvili, și își găsesc originea în lucrările lui G. Kolosov, care încă în 1909 arăta că: „*Metoda expusă dă: 1° mijlocul de a aplica problemei plane teoria reprezentării conforme, așa cum ea se aplică în hidrodinamică; 2° o infinitate de mijloace de a transforma soluțiile și de a deduce dintr-o soluție, altele*". (G. Kolosov [4].)

În ce privește limitele metodei, avertizăm că ea nu poate fi decît cu greu extinsă la studiul problemelor tridimensionale. Rămîn aci valabile și rezervele formulate în § 5.18, *g*, pag. 301.

a) *Ecuațiile problemei*

Ca și în cazul sistemului (5.3.14), vom transcrie și integra ecuațiile (4.1) — (4.5) sub o formă complexă, privind toate funcțiile de x_1, x_2 care intervin în aceste ecuații, ca funcții de z și $\bar{z}$ (L. Solomon [10]). Vom admite deocamdată că $\boldsymbol{F} \neq 0$.

Să considerăm deci forța de volum complexă

$$\mathsf{F}(z, \bar{z}) = F_1(x_1, x_2) + \mathrm{i}\, F_2(x_1 x_2), \tag{1}$$

unde F_1, F_2 sînt componentele forței de volum $\boldsymbol{F}$, și deplasarea complexă

$$\mathsf{U}(z, \bar{z}) = u_1(x_1, x_2) + \mathrm{i}\, u_2(x_1, x_2). \tag{2}$$

Amintim încă relația (4.3)

$$\mathsf{S}_0(z, \bar{z}) = \sigma_{11}(x_1, x_2) + \sigma_{22}(x_1, x_2). \tag{3}$$

Pentru a transcrie sub formă complexă cantitatea reală div $\boldsymbol{F}$ ce apare în ecuațiile (4.2), remarcăm că din (A.4.13) urmează

$$\mathsf{F}_{,\bar{z}} = \frac{1}{2}\left[(F_{1,1} + F_{2,2}) + \mathrm{i}\,(F_{2,1} - F_{1,2})\right], \tag{4}$$

sau altfel scris

$$2\mathsf{F}_{,\bar{z}} = \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \mathrm{i} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

de unde

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \mathsf{F}_{,\bar{z}} + \bar{\mathsf{F}}_{,z}. \tag{6}$$

Pentru orice cantitate complexă $\mathsf{G} = G_1 + \mathrm{i}G_2$, deducem tot astfe

$$G_{1,1} + G_{2,2} = 2 \operatorname{Re} \mathsf{G}_{,\bar{z}}. \tag{7}$$

Să considerăm mai întîi ecuațiile de compatibilitate. Adunînd termen cu termen primele două ecuații (4.2) și ținînd seama de (3), găsim

$$\Delta \mathsf{S}_0 = -(1 - \nu)^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{F}, \tag{8}$$

sau încă, utilizînd expresia (A.4.7) și (6):

$$\mathsf{S}_{0,z\bar{z}} = -\frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1}(\mathsf{F}_{,\bar{z}} + \bar{\mathsf{F}}_{,z}). \tag{9}$$

Forma celui de-al doilea operator din (A.4.7) sugerează să scriem încă

$$\Delta(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2\mathrm{i}\,\sigma_{12}) + (\mathsf{S}_{0,22} - \mathsf{S}_{0,11} + 2\mathrm{i}\mathsf{S}_{0,12}) =$$
$$= -2F_{2,2} + 2F_{1,1} - 2\mathrm{i}\, F_{1,2} - 2\mathrm{i}\, F_{2,1},$$

ceea ce conduce la introducerea funcției complexe

$$S(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \sigma_{22}(x_1, x_2) - \sigma_{11}(x_1, x_2) + 2\mathrm{i}\,\sigma_{12}(x_1, x_2), \tag{10}$$

și permite ca, utilizînd (1), (3) și (4), să ajungem la ecuația

$$S_{,\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}} - S_{0,\mathfrak{z}\mathfrak{z}} = \bar{F}_{,\mathfrak{z}}. \tag{11}$$

Trecînd acum la transcrierea ecuațiilor de echilibru, vom exprima mai întîi componentele tensiunii prin intermediul mărimilor S_0 și S:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} S_0 - \frac{1}{4}(S + \bar{S}),\ \sigma_{22} = \frac{1}{2} S_0 + \frac{1}{4}(S + \bar{S}),\ \sigma_{12} = -\frac{1}{4}\mathrm{i}(S - \bar{S}), \tag{12}$$

de unde urmează și

$$\sigma_{11} + \mathrm{i}\,\sigma_{12} = \frac{1}{2}(S_0 - \bar{S}), \quad \sigma_{12} + \mathrm{i}\,\sigma_{22} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}(S_0 + \bar{S}). \tag{13}$$

Făcînd uz de (7) în (13), obținem pentru primii doi termeni ai ecuațiilor de echilibru (compară cu trecerea de la (5.3.14) la (5.4.16)):

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 2\,\mathrm{Re}\,(\sigma_{11} + \mathrm{i}\,\sigma_{12})_{,\mathfrak{z}} = \mathrm{Re}\,(S_0 - \bar{S})_{,\mathfrak{z}}; \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= 2\,\mathrm{Re}\,(\sigma_{12} + \mathrm{i}\,\sigma_{22})_{,\mathfrak{z}} = -\,\mathrm{Im}\,(S_0 + S)_{,\bar{\mathfrak{z}}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Adunînd membru cu membru ecuațiile (4.1) astfel transformate, deducem

$$S_{0,\mathfrak{z}} - S_{,\bar{\mathfrak{z}}} + \bar{F} = 0; \tag{15}$$

prin scădere termen cu termen, se găsește relația conjugată cu (15).

A doua ecuație de compatibilitate (11) este deci o consecință a ecuației (15), și nu trebuie reținută. Prin urmare, sistemul celor 5 ecuații (4.1), (4.2) se reduce la sistemul format de cele 2 ecuații (9) și (15)

$$S_{,\bar{\mathfrak{z}}} - S_{0,\mathfrak{z}} = \bar{F}, \quad S_{0,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = -\frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1}(F_{,\mathfrak{z}} + \bar{F}_{,\bar{\mathfrak{z}}}), \tag{16}$$

unde amintim că am notat

$$S_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad S = \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2\mathrm{i}\,\sigma_{12}. \tag{17}$$

Pentru a determina deplasările, deducem mai întîi din (4.4), (4.5), (3) și (10):

$$\begin{aligned} u_{1,1} + u_{2,2} &= [(1 - \nu - 2\nu^2)/E]\,S_0, \\ u_{1,1} - u_{2,2} &= [(1 + \nu)/E](\sigma_{11} - \sigma_{22}) = -\,[(1 + \nu)/E]\,\mathrm{Re}\,S, \\ u_{1,2} + u_{2,1} &= 2[(1 + \nu)/E]\sigma_{12} = [(1 + \nu)/E]\,\mathrm{Im}\,S. \end{aligned} \tag{18}$$

Dar, făcînd uz de (A.4.13), deducem

$$U,_\zeta = \frac{1}{2}[(u_{1,1} + u_{2,2}) + \mathrm{i}(u_{2,1} - u_{1,2})],$$
$$U,_{\bar\zeta} = \frac{1}{2}[(u_{1,1} - u_{2,2}) + \mathrm{i}(u_{2,1} + u_{1,2})], \qquad (19)$$

astfel că din (18) obținem

$$U,_{\bar\zeta} = -[(1+\nu)/2E]\bar{S}, \quad U,_\zeta + \bar{U},_{\bar\zeta} = [(1+\nu)(1-2\nu)/E]S_0, \qquad (20)$$

sau încă, înlocuind constantele:

$$U,_{\bar\zeta} = -(1/4\mu)\bar{S}, \quad U,_\zeta + \bar{U},_{\bar\zeta} = [(1-2\nu)/2\mu]S_0. \qquad (21)$$

Deplasarea U odată găsită, din (2.26) și (19) obținem și

$$\omega_{12} = -\operatorname{Im} U,_\zeta. \qquad (22)$$

Ecuațiile (16) sînt ecuațiile în tensiuni ale problemei plane (prima din ele fiind ecuația de echilibru, iar cea de-a doua, ecuația de compatibilitate). Ecuațiile (20) (sau (21)) sînt ecuațiile fizico-geometrice ale problemei.

Este semnificativă compararea ecuațiilor (16), (21) cu ecuațiile (5.4.16), (5.4.20) — (5.4.24) ale problemei anti-plane. În particular, rămîn valabile cele arătate la finele § 5.1, pag. 166 (vezi și mai jos, Observația de la pag. 391).

b) Criterii de rezistență

Pentru a încheia, să examinăm pe scurt criteriile de rezistență în cadrul problemei plane. (Compară cu § 5.10, pag. 212). Pentru simplitate, ne limităm la cazul deformației plane, astfel că tensorul tensiune are forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu S_0 \end{bmatrix}, \qquad (23)$$

iar invarianții săi sînt (vezi (2.5.19)):

$$\Sigma_1 = (1+\nu)S_0, \quad \Sigma_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \nu S_0^2, \quad \Sigma_3 = \nu S_0(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2). \qquad (24)$$

Dat fiind că $\sigma_{33} = \nu S_0$ este evident una din tensiunile principale, deducem că primul membru al ecuației (2.5.20) este aci divizibil prin $\sigma - \nu S_0$. După calcule elementare, obținem pentru celelalte două tensiuni principale ecuația

$$\sigma^2 - S_0\sigma + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) = 0, \tag{25}$$

astfel că în definitiv avem, ținînd seama și de (10):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(S_0 + |S|), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(S_0 - |S|), \quad \sigma_3 = \nu S_0. \tag{26}$$

(Componentele σ_1, σ_2, σ_3 *nu sînt* numerotate în ordinea mărimii lor, dat fiind că această ordine depinde esențial de valorile σ_{ij} și ν.)

Să ne limităm la cazul în care criteriile (4.3.1) și (4.3.2) sînt privite drept criterii de plasticitate. Din motive de continuitate, rezultă că în momentul trecerii în starea plastică avem $\nu = \frac{1}{2}$ (vezi § 3.4. pag. 93). Or, în acest caz $\sigma_3 = \frac{1}{2} S_0$ este tensiunea principală mijlocie, și din (2.6.11) și (26) urmează

$$T_{\max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}|S|. \tag{27}$$

În felul acesta, (4.3.1) conduce la condiția de plasticitate

$$|S| \leqslant \sigma_s. \tag{28}$$

Pe de altă parte, din (4.3.2) obținem ușor pentru $\nu = \frac{1}{2}$ condiția

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 \leqslant \frac{4}{3}\sigma_s^2,$$

sau încă, ținînd seama ca și în soluțiile ecuației (25) de expresia (10):

$$|S| \leqslant 1{,}16\ \sigma_s. \tag{29}$$

Prin urmare, în ambele variante considerate, condiția de plasticitate este independentă de S_0, și este în întregime caracterizată de $|S|$. Acest raționament subliniază semnificația diferită a mărimilor S_0 și S, introduse în (3) și (10) prin considerații formale. Prima din ele caracterizează deformația de volum (și intervine numai în ecuația de compatibilitate, specifică teoriei elasticității). Cea de-a doua (singura ce intervine în condiția de plasticitate) caracterizează distorsiunea.

§ 7. REPREZENTAREA SOLUŢIEI ECUAŢIILOR PROBLEMEI PLANE. FUNCŢIILE LUI KOLOSOV ŞI MUSHELIŞVILI

Ecuaţiile (6.16), (6.21) se pot integra asemănător celor din § 5.8.

a) Ecuaţiile omogene

Fie de rezolvat mai întîi sistemul omogen

$$S_{0,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = 0, \quad S_{,\bar{\mathfrak{z}}} - S_{0,\mathfrak{z}} = 0. \tag{1}$$

Integrînd[2]) prima din aceste ecuaţii întîi în raport cu $\bar{\mathfrak{z}}$ şi apoi în raport cu $\mathfrak{z}$, obţinem

$$S_0 = \int S_1(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z} + \overline{S_2(\mathfrak{z})} \tag{2}$$

(S_1 şi $\overline{S}_2$ sînt funcţii arbitrare). Dat fiind că S_0 este o cantitate reală, vom scrie

$$2\Phi(\mathfrak{z}) = \int S_1(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}. \tag{3}$$

şi relaţia (2) va deveni

$$S_0 = 2[\Phi(\mathfrak{z}) + \overline{\Phi(\mathfrak{z})}]. \tag{4}$$

Ţinînd seama acum de (4) în a doua ecuaţie (1), obţinem

$$S_{,\bar{\mathfrak{z}}} = 2\Phi'(\mathfrak{z}), \tag{5}$$

de unde, prin integrarea în raport cu $\bar{\mathfrak{z}}$, urmează

$$S = 2[\bar{\mathfrak{z}}\Phi'(\mathfrak{z}) + \Psi(\mathfrak{z})], \tag{6}$$

unde $\Psi(\mathfrak{z})$ este o nouă funcţie arbitrară. Întrucît $\sigma_{ij} \in C^1(\mathscr{D})$, urmează că $\Phi(\mathfrak{z})$, $\Psi(\mathfrak{z})$ sînt funcţii diferenţiabile şi cu derivate parţiale continue în $\mathscr{D}$, aşadar sînt *funcţii analitice de* $\mathfrak{z}$ *în* $\mathscr{D}$. Asupra naturii lor ne vom opri în § 10.

Considerînd încă şi funcţiile analitice $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$ (care nu trebuie desigur confundate cu funcţiile notate în acelaşi fel în studiul problemei anti-plane) definite în $\mathscr{D}$ prin relaţiile

$$\varphi'(\mathfrak{z}) = \Phi(\mathfrak{z}), \quad \psi'(\mathfrak{z}) = \Psi(\mathfrak{z}), \tag{7}$$

---

[2]) Vezi § 5.8, pag. 200, şi § A.4, pag. 704.

vom transcrie (4) și (6) sub forma definitivă

$$S_0 = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}],\quad S = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]. \tag{8}$$

Soluția ecuațiilor (1) are deci forma (8). Reciproc, pentru orice funcții analitice $\varphi(z)$, $\psi(z)$, funcțiile definite de (8) verifică (1).

Trecînd acum la integrarea ecuațiilor în deplasări, vom introduce expresiile (8) în ecuațiile (6.21), ceea ce dă sistemul

$$\begin{aligned} U_{,\bar{z}} &= -(1/2\mu)[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}],\\ U_{,z} + \bar{U}_{,\bar{z}} &= [(1-2\nu)/\mu]\,[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Integrînd prima din aceste ecuații în raport cu $\bar{z}$, obținem

$$U = -(1/2\mu)[z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}] + U_1(z), \tag{10}$$

unde $U_1(z)$ este o funcție deocamdată necunoscută. Introducînd expresia (10) în a doua ecuație (9), deducem mai întîi $U_1' + \overline{U}_1' = [(3-4\nu)/2\mu][\varphi' + \bar{\varphi}']$, de unde urmează

$$U_1(z) = [(3-4\nu)/2\mu]\varphi(z), \tag{11}$$

astfel că în definitiv (10) devine

$$2\mu U(z, \bar{z}) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{12}$$

unde am notat cu $\varkappa$ coeficientul funcției $\varphi(z)$ așa cum apare el din (11). Ținînd seama de relațiile (3.66), avem pentru $\varkappa$ valorile

$$\varkappa = \begin{cases} 3-4\nu \text{ în starea de deformație plană; } 1 < \varkappa < 3;\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} \text{ în starea de tensiune plană generalizată; } \dfrac{5}{3} < \varkappa < 3. \end{cases} \tag{13}$$

Formulele (8) și (12) dau — în absența forțelor de volum — reprezentarea soluției prin intermediul celor două funcții $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Aceste funcții au fost introduse de către G. Kolosov [1], [2][3]) și larg utilizate de N. Mushelișvili [1] — [5] în studiul problemei plane. Vom num funcțiile φ, ψ — *funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili*.

Raționamentul de mai sus este similar celui din § 5.8. El este apropiat de modul în care A. Stevenson [2], [3] a stabilit (după Kolosov și Mushelișvili, dar în mod independent) formule de același tip.

OBSERVAȚIA 1. Aparatul introdus de Kolosov pentru probleme de *elasto-statică*, începe să găsească aplicații și în probleme de elasto-dinamică (J. Radok [1], N. Șandru [3]), de *elasticitate asimetrică* (G. Savin [2], § 3; R. Mindlin [7]), de *visco-elasticitate asimetrică* (M. Mișicu [7]), chiar de *plasticitate* (B. Anin [1], V. L. Dobrovolski [1], [2], G. Dincă [1]). În unele din aceste lucrări, tocmai punctul de vedere din §§ 6 și 7 este cel care conduce la țintă. (Revezi încă cele spuse la pag. 388).

---

[3]) Unele din formulele lui Kolosov au fost găsite și utilizate în 1900 de către S. Ciaplighin, dar publicate abia postum, în [1], volumul 3, pag. 306—323.

Această formulă a fost stabilită făcînd uz de (A.3.12), așadar pentru axe ($\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}$) orientate la fel cu axele (x_1, x_2). În caz contrar, semnul din membrul al doilea trebuie schimbat.

Relațiile (8) și (19) au aceeași formă în starea de deformație, și în starea de tensiune plană generalizată. Dimpotrivă, relația (12) depinde de $\varkappa$, ale cărei valori, distincte, sînt date în (13) pentru cele două stări.

Se poate stabili ușor legătura între funcțiile φ, ψ, și funcția lui Airy. În acest scop, să considerăm soluția reală a ecuației

$$4\, \mathsf{A}_{,\bar{\mathfrak{z}}} = \mathsf{K}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}). \tag{20}$$

Ținînd seama aci de formula (17), deducem

$$\int \mathsf{K}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})\, d\bar{\mathfrak{z}} = 2[\bar{\mathfrak{z}}\varphi(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}\overline{\varphi(\mathfrak{z})} + \overline{\chi(\mathfrak{z})} + \chi_1(\mathfrak{z})], \tag{21}$$

unde $\chi_1(\mathfrak{z})$ este o funcție arbitrară de $\mathfrak{z}$, și unde am notat

$$\chi(\mathfrak{z}) = \int \psi(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}. \tag{22}$$

Pentru ca $\mathsf{A}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ să rezulte reală, e necesar și suficient ca $\chi_1 = \chi$. Din (20), (21) urmează acum

$$\mathsf{A}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \mathrm{Re}\, [\bar{\mathfrak{z}}\varphi(\mathfrak{z}) + \chi(\mathfrak{z})], \tag{23}$$

ceea ce este tocmai funcția lui Airy. Într-adevăr, din (23) avem evident

$$\Delta\Delta \mathsf{A} \equiv 16\, \mathsf{A}_{,\mathfrak{z}^2\bar{\mathfrak{z}}^2} = 0, \tag{24}$$

astfel că $\mathsf{A}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ este biarmonică. Mai departe, din (16) și (20) avem

$$S_0 = 4\mathsf{A}_{,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}, \quad S = \overline{\mathsf{K}}_{,\mathfrak{z}} = 4\mathsf{A}_{,\mathfrak{z}^2}; \tag{25}$$

ținînd seama de (6.17) și (A.4.7), deducem deci

$$\sigma_{11} = \mathsf{A}_{,22}, \ \sigma_{22} = \mathsf{A}_{,11}, \ \sigma_{12} = -\mathsf{A}_{,12}, \tag{26}$$

așadar tocmai relațiile (4.20).

Prin urmare, funcția $\mathsf{A}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ din (20) coincide cu funcția lui Airy $\mathsf{A}(x_1, x_2)$ din (4.20), iar formula (23) dă legătura ei cu funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili. Orice funcție de forma (23) este biarmonică, și reciproc, prin integrarea succesivă a ecuației (24) în raport cu $\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}$, se vede că orice funcție biarmonică admite această reprezentare. Formula (23) se numește *formula lui E. Goursat* [1], și constituie analogul în complex al teoremei lui Almansi și Nicolescu.

OBSERVAȚIA 2. Raționamentele de mai sus au un caracter formal (vezi § A.4, pag. 704; revezi și § 5.8, pag. 200). Justificarea lor rezidă în faptul că soluțiile ecuațiilor elasticității sînt (pentru $\boldsymbol{F} = 0$) funcții biarmonice (vezi § 4.10, pag. 155), așadar în cazul de față funcții

analitice de x_1, x_2 în $\mathcal{D}$. Încercările unor autori de a fundamenta introducerea funcțiilor $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$, demonstrarea formulei lui Goursat etc., pentru clase *mai largi* de funcții, nu are deci sens decît cel mult pentru $\boldsymbol{F} \neq 0$.

Să scriem încă componentele tensiunii și condițiile de plasticitate (în cazul $\boldsymbol{F} = 0$). Introducînd (8) în (6.12), avem imediat

$$\sigma_{11} = \mathrm{Re}\,(2\varphi' - \bar{\mathfrak{z}}\varphi'' - \psi'), \quad \sigma_{22} = \mathrm{Re}\,(2\varphi' + \bar{\mathfrak{z}}\varphi'' + \psi')$$
$$\sigma_{12} = \mathrm{Im}\,(\bar{\mathfrak{z}}\varphi'' + \psi'). \tag{27}$$

Pe de altă parte, ținînd seama în (6.28) și (6.29) de a doua formulă (8), conchidem că determinarea punctelor în care se face trecerea în starea de deformație plastică se reduce la căutarea punctelor de maximum pentru cantitatea

$$|S(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})| = 2\,|\bar{\mathfrak{z}}\varphi''(\mathfrak{z}) + \psi'(\mathfrak{z})|. \tag{28}$$

b) *Ecuațiile neomogene*

Formulele de mai sus pot fi extinse la cazul $F \neq 0$, prin adăugarea termenilor corespunzători unei soluții particulare S_0^*, S^*, U^* a sistemului neomogen (6.16), (6.21). În acest scop, să începem prin a considera ecuațiile

$$f_{,\bar{\mathfrak{z}}} = F, \qquad g_{,\mathfrak{z}} = F. \tag{29}$$

Formulele lui Pompeiu[4]) (A.4.48), (A.4.49) dau pentru orice domeniu (chiar multiplu conex) $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ de frontieră $\mathcal{C}$:

$$f(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z,\bar{Z})}{Z-\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}Z - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z-\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}D,$$
$$g(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{g(Z,\bar{Z})}{\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\bar{Z} - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}D, \tag{30}$$

în orice punct $\mathfrak{z} \in \mathcal{A}$ (unde $\mathrm{d}D = \mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2$). Integralele curbilinii din (30) sînt integrale de tip Cauchy, așadar reprezintă funcții olomorfe de $\mathfrak{z}$, respectiv de $\bar{\mathfrak{z}}$, în $\mathcal{A}$. Derivînd în mod convenabil formulele de mai sus, obținem din (29) și (30)

$$F(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathfrak{z}}}\iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z-\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}D, \qquad F(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}\iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}D, \tag{31}$$

---

[4]) Pentru primele lor aplicări la astfel de probleme, vezi N. Teodorescu [1].

de unde în particular urmează egalitatea

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} \iint\limits_{\mathscr{A}} \frac{F}{\overline{Z} - \bar{\mathfrak{z}}}\, \mathrm{d}D = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} \iint\limits_{\mathscr{A}} \frac{F}{Z - \mathfrak{z}}\, \mathrm{d}D. \tag{32}$$

Pentru integralele din (31) se obțin de asemenea, derivînd în raport cu $\mathfrak{z}$, respectiv $\bar{\mathfrak{z}}$ (ca parametri sub semnul integralei), formulele:

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} \iint\limits_{\mathscr{A}} \frac{F}{Z - \mathfrak{z}}\, \mathrm{d}D = \iint\limits_{\mathscr{A}} \frac{F}{(Z - \mathfrak{z})^2}\, \mathrm{d}D,$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} \iint\limits_{\mathscr{A}} \frac{F}{\overline{Z} - \bar{\mathfrak{z}}}\, \mathrm{d}D = \iint\limits_{\mathscr{A}} \frac{F}{(\overline{Z} - \bar{\mathfrak{z}})^2}\, \mathrm{d}D. \tag{33}$$

Pentru justificarea acestor formule (valabile pentru $F \in C^0(\mathscr{A})$) vezi I. Vekua [1], teorema 1.32. Faptul că derivatele din (31) *nu sînt nule* se explică tocmai prin prezența termenului izolat în teorema lui Pompeiu datorită singularității funcției $f(Z, \overline{Z})/(Z - \mathfrak{z})$.

Toate aceste formule au caracter de *identități*, valabile în punctele lui $\mathscr{A}$. Pentru valabilitatea lor în $\mathscr{D}$, este suficient să putem lua $\mathscr{A} = \mathscr{D}$ și $\mathscr{C} = \mathscr{L}$.

Să considerăm acum a doua ecuație (6.16) și să introducem în ea prima formulă (31) pentru $\mathscr{A} = \mathscr{D}$. Obținem atunci

$$S^*_{0,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{z}\, \partial \bar{\mathfrak{z}}} \iint\limits_{\mathscr{D}} \left(\frac{F}{Z - \mathfrak{z}} + \frac{\overline{F}}{\overline{Z} - \bar{\mathfrak{z}}} \right) \mathrm{d}D, \tag{34}$$

ecuație care posedă soluția evidentă

$$S^*_0 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \iint\limits_{\mathscr{D}} \left(\frac{F}{Z - \mathfrak{z}} + \frac{\overline{F}}{\overline{Z} - \bar{\mathfrak{z}}} \right) \mathrm{d}D. \tag{35}$$

Introducînd (35) în prima ecuație (6.16), căpătăm

$$S^*_{,\mathfrak{z}} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} \iint\limits_{\mathscr{D}} \left(\frac{F}{Z - \mathfrak{z}} + \frac{\overline{F}}{\overline{Z} - \bar{\mathfrak{z}}} \right) \mathrm{d}D + \overline{F}. \tag{36}$$

Ținînd seama de relațiile ce se deduc din a doua formulă (31) și din (32) dacă înlocuim F prin $\overline{F}$, avem

$$\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} \iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{\overline{F}}{\overline{Z} - \bar{\mathfrak{z}}}\, \mathrm{d}D + \overline{F} = -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} \iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{\overline{F}}{\overline{Z} - \bar{\mathfrak{z}}}\, \mathrm{d}D =$$
$$= -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} \iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{\overline{F}}{Z - \mathfrak{z}}\, \mathrm{d}D, \tag{37}$$

astfel că componenta corespunzătoare acestor doi termeni în S^* este găsită. Pentru a pune şi primul termen din (36) sub forma derivatei în raport cu $\bar{\mathfrak{z}}$ a unei funcţii, deocamdată necunoscute, remarcăm că avem

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}\iint_{\mathcal{D}} F\frac{\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}}}{(Z-\mathfrak{z})^2}\,\mathrm{d}D = -\iint_{\mathcal{D}}\frac{F}{(Z-\mathfrak{z})^2}\,\mathrm{d}D = -\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}\iint_{\mathcal{D}}\frac{F}{Z-\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}D, \tag{38}$$

unde am ţinut seama de (33), iar operaţia de derivare în raport cu $\mathfrak{z}$ ca parametru sub semnul integralei este evidentă. Cu aceasta, din (36)—(38) urmează

$$S^* = -\frac{3-4\nu}{4\pi(1-\nu)}\iint_{\mathcal{D}}\frac{\bar{F}}{Z-\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}D - \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\iint_{\mathcal{D}} F\frac{\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}}}{(Z-\mathfrak{z})^2}\,\mathrm{d}D. \tag{39}$$

Să introducem acum valoarea S^* de mai sus în prima din ecuaţiile (6.21). După integrare în raport cu parametrul $\bar{\mathfrak{z}}$, obţinem evident

$$U^* = -\frac{3-4\nu}{16\pi\mu(1-\nu)}\iint_{\mathcal{D}}\bar{F}\ln(\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}})\,\mathrm{d}D + \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\iint_{\mathcal{D}}\bar{F}\frac{Z-\mathfrak{z}}{\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}D + U_1^*(\mathfrak{z}), \tag{40}$$

unde $U_1^*(\mathfrak{z})$ este încă nedeterminată. Introducînd (40) şi (35) în a doua ecuaţie (6.21), şi ţinînd seama că prima integrală din (40) nu depinde de $\mathfrak{z}$, în timp ce în cea de-a doua putem deriva în raport cu $\mathfrak{z}$ ca parametru, obţinem

$$-\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\iint_{\mathcal{D}}\left(\frac{\bar{F}}{\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}}}+\frac{F}{Z-\mathfrak{z}}\right)\mathrm{d}D + \frac{\mathrm{d}U_1^*(\mathfrak{z})}{\mathrm{d}\mathfrak{z}} + \frac{\mathrm{d}\overline{U_1^*(\mathfrak{z})}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}} =$$

$$= \frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)}\iint_{\mathcal{D}}\left(\frac{F}{Z-\mathfrak{z}}+\frac{\bar{F}}{\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}}}\right)\mathrm{d}D,$$

de unde, separînd variabilele şi integrînd în raport cu parametrul $\mathfrak{z}$, deducem

$$U_1^*(\mathfrak{z}) = -\frac{3-4\nu}{16\pi\mu(1-\nu)}\iint_{\mathcal{D}} F\ln(Z-\mathfrak{z})\,\mathrm{d}D. \tag{41}$$

Cu aceasta, expresia (40) a deplasării U^* devine

$$^* = -\frac{3-4\nu}{8\pi\mu(1-\nu)}\iint_{\mathcal{D}} F\ln|Z-\mathfrak{z}|\,\mathrm{d}D + \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\iint_{\mathcal{D}}\bar{F}\frac{Z-\mathfrak{z}}{\bar{Z}-\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}D. \tag{42}$$

Termenul multiform din integrandul din (40) nu se menţine deci în rezultatul final. Formulele (35), (39) şi (42) dau soluţia particulară căutată.

Observaţia 3. Înlocuind $\mathcal{D}$ prin $\mathcal{A}$ în aceste formule, ele continuă să reprezinte o soluţie particulară a ecuaţiilor neomogene, valabilă însă numai în punctele $\mathfrak{z} \in \mathcal{A}$.

Să trecem la determinarea vectorului-tensiune. Din (14) urmează evident

$$\sigma_{n1}^{*} + i\sigma_{n2}^{*} = -\frac{1}{2} i [S_0^{*} \mathfrak{z}'(s) + \overline{S^{*}}\, \overline{\mathfrak{z}'(s)}], \tag{43}$$

unde trebuie să introducem (35) şi (39). Ţinînd seama de (31) şi (33), şi derivînd în raport cu $\mathfrak{z}$ ca parametru în a doua integrală din $\overline{S^{*}}$, obţinem mai întîi [5]):

$$\begin{aligned} S_{0,\mathfrak{z}}^{*} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)}(-\pi F) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\iint_{\mathscr{D}} \frac{\overline{F}}{(\overline{Z}-\overline{\mathfrak{z}})^2}\, dD, \\ \overline{S^{*}}_{,\mathfrak{z}} &= -\frac{3-4\nu}{4\pi(1-\nu)}(-\pi F) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\iint_{\mathscr{D}} \frac{\overline{F}}{(\overline{Z}-\overline{\mathfrak{z}})^2}\, dD. \end{aligned} \tag{44}$$

Întrucît avem $S_{0,\mathfrak{z}}^{*} \neq \overline{S^{*}}_{,\mathfrak{z}}$ rezultă că — spre deosebire de cazul $F = 0$ — nu se poate da aci un analog al formulelor (16) şi (18). Totuşi, se poate introduce o funcţie $K^{*}(\mathfrak{z}, \overline{\mathfrak{z}})$ în aşa fel încît

$$S_0^{*} = K^{*}_{,\mathfrak{z}} \quad , \quad \overline{S^{*}} = K^{*}_{,\overline{\mathfrak{z}}} + H^{*}, \tag{45}$$

unde H^{*} este un termen de corecţie. Al doilea termen din ambele derivate (44) intră evident în alcătuirea derivatelor funcţiei K^{*}, în timp ce corecţia H^{*} trebuie folosită pentru componentele corespunzătoare celui dintîi termen. Luînd

$$K^{*}(\mathfrak{z}, \overline{\mathfrak{z}}) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\iint_{\mathscr{D}} \left\{ \overline{F}\, \frac{Z-\mathfrak{z}}{\overline{Z}-\overline{\mathfrak{z}}} + F\,[\ln(Z-\mathfrak{z}) + \ln(\overline{Z}-\overline{\mathfrak{z}})] \right\} dD, \tag{46}$$

căpătăm

$$\begin{aligned} K^{*}_{,\mathfrak{z}} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\iint_{\mathscr{D}} \left[\frac{\overline{F}}{\overline{Z}-\overline{\mathfrak{z}}} + \frac{F}{Z-\mathfrak{z}} \right] dD, \\ K^{*}_{,\overline{\mathfrak{z}}} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\iint_{\mathscr{D}} \left[\overline{F}\, \frac{Z-\mathfrak{z}}{(\overline{Z}-\overline{\mathfrak{z}})^2} - \frac{F}{\overline{Z}-\overline{\mathfrak{z}}} \right] dD, \end{aligned}$$

de unde

$$S_0^{*} = K^{*}_{,\mathfrak{z}}, \quad \overline{S^{*}} = K^{*}_{,\overline{\mathfrak{z}}} - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathscr{D}} \frac{F}{\overline{Z}-\overline{\mathfrak{z}}}\, dD, \tag{47}$$

şi deci

$$\sigma_{n1}^{*} + i\,\sigma_{n2}^{*} = -\frac{1}{2} i\, K^{*}_{,s} - \frac{1}{2\pi i}\, \overline{\mathfrak{z}'(s)} \iint_{\mathscr{D}} \frac{F}{\overline{Z}-\overline{\mathfrak{z}}}\, dD. \tag{48}$$

---

[5]) A nu se confunda în asemenea expresii $\overline{S^{*}_{,\mathfrak{z}}}$ cu $\overline{S^{*}}_{,\mathfrak{z}}$.

Acesta este deci vectorul corespunzător prezenţei forţelor de volum, care trebuie adăugat vectorului din (18). Şi condiţia (28) poate fi modificată în aşa fel încît să ţinem seama de efectul acestor forţe: pentru aceasta se introduce în ea expresia (39).

Unele din integralele ce apar în (35), (39), (42) şi (48) pot fi calculate ca integrale de tip Cauchy pe $\mathscr{L}$. Dacă funcţia $F(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ este analitică şi dacă domeniul $\mathscr{D}$ este un disc sau o coroană circulară (sau un domeniu reprezentabil conform pe un astfel de domeniu canonic), aceste calcule sînt uneori destul de simple. Pentru unele cazuri, vezi C. Teodosiu [1]; I. Vekua [1], § 1.4.

Cazul $F \neq 0$ nu prezintă prea mare însemnătate pentru problema plană, dar poate fi de interes esenţial în studiul încovoierii plăcilor. Unele formule finale pentru cazul ecuaţiilor neomogene sînt date (fără demonstraţii) de I. Vekua şi N. Musheli\u0219vili [1].

§ 8. REZULTANTA ŞI MOMENTUL REZULTANT AL TENSIUNILOR

Cu ajutorul formulelor (7.19) (eventual şi (7.48)) se determină uşor torsorul faţă de origine al tensiunilor ce apar pe o curbă $\mathscr{C}$ din $\mathscr{D}$ (eventual pe $\mathscr{L}$). Ca şi în problema antiplană, aceasta va servi — printre altele — la calcularea anumitor parametri constanţi de care depind φ şi ψ.

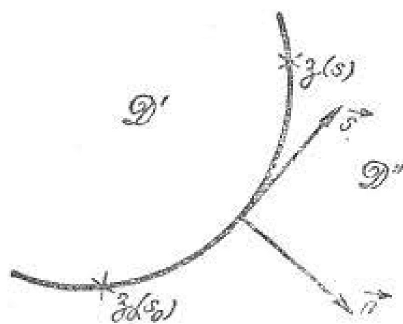


Fig. 6.8.1

Ca şi în problema antiplană, avem de calculat o rezultantă $R = \mathscr{R}_1 + i\,\mathscr{R}_2$ şi un moment rezultant $\mathscr{M}_3$. Deosebirea constă în faptul că aci intervine torsorul tensiunii pe elemente cilindrice, şi nu pe secţiuni normale.

Fie pentru început că $\mathscr{C}$ e o curbă simplă *deschisă*, de capete $\mathfrak{z}_0$ şi $\mathfrak{z}$ ($\mathfrak{z}_0$ *nu este* aici un centru de greutate), şi fie s abscisa curbilinie definită în aşa fel încît curba să fie parcursă prin valori crescătoare ($ds > 0$) de la s_0 pînă la s. Pentru a face uz de (7.19), vom alege normala $\boldsymbol{n}$ orientată *spre dreapta* în raport cu sensul pozitiv pe $\mathscr{C}$. Porţiunea din $\mathscr{D}$ înspre care este dirijat $\boldsymbol{n}$ se va nota $\mathscr{D}''$, iar cealaltă, cu $\mathscr{D}'$. Prin urmare, $\sigma_{n1} + i\,\sigma_{n2}$ este tensiunea ce descrie acţiunea părţii $\mathscr{D}''$ a corpului, asupra părţii $\mathscr{D}'$.

Cu această convenţie, găsim

$$R(s) = \mathscr{R}_1(s) + i\mathscr{R}_2(s) = \int_{s_0}^{s} (\sigma_{n1} + i\,\sigma_{n2})\,ds, \tag{1}$$

$$\mathscr{M}_3(s) = \int_{s_0}^{s} (x_1\,\sigma_{n2} - x_2\,\sigma_{n1})\,ds = \operatorname{Re}\int_{s_0}^{s} i\,\mathfrak{z}(\sigma_{n1} - i\,\sigma_{n2})\,ds =$$

$$= -\operatorname{Im}\int_{s_0}^{s} \mathfrak{z}(\sigma_{n1} - i\,\sigma_{n2})\,ds. \tag{2}$$

Spre deosebire de $\sigma_{n1} + i\,\sigma_{n2}$ — care este o funcţie de punct *şi* de orientarea normalei — mărimile $R(s)$ şi $\mathcal{M}_3(s)$ sînt funcţii numai de punct pe $\mathscr{C}$, întrucît în (1) şi (2) direcţia normalei este deplin determinată. Dacă — pentru un sens de parcurgere deja ales — calculăm torsorul tensiunilor aplicate în lungul lui $\mathscr{C}$ asupra părţii $\mathscr{D}''$, obţinem evident valorile $R(s)$ şi $-\mathcal{M}_3(s)$.

a) Problema omogenă

Să ne limităm deocamdată la cazul $F = 0$.

Făcînd uz de formulele (7.19) şi de notaţia (A.4.35), obţinem

$$R(s) = -i\,[\varphi + z\,\overline{\varphi'} + \overline{\psi}]_{s_0}^{s}. \tag{3}$$

Pentru momentul rezultant avem mai întîi, integrînd prin părţi

$$\mathcal{M}_3(s) = -\,\mathrm{Re}\int_{s_0}^{s} z\,\mathrm{d}(\varphi + \bar{z}\,\varphi' + \psi) =$$

$$= -\,\mathrm{Re}\,[z\,\overline{\varphi} + z\bar{z}\,\varphi' + z\psi]_{s_0}^{s} + \mathrm{Re}\int_{s_0}^{s}(\overline{\varphi} + \bar{z}\,\varphi' + \psi)\,\mathrm{d}z, \tag{4}$$

unde trebuie să calculăm desigur nu „o integrală" în sensul din §§ 5.8 sau 6.7, ci *integrala definită* în lungul curbei $\mathscr{C}$:

$$f(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}(\overline{\varphi} + \bar{z}\varphi' + \psi)\,\mathrm{d}z + (\varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\psi})\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{5}$$

Derivatele acestei funcţii se scriu imediat (vezi (A.4.28)):

$$f_{,z} = \frac{1}{2}(\overline{\varphi} + \bar{z}\,\varphi' + \psi), \quad f_{,\bar{z}} = \frac{1}{2}(\varphi + z\,\overline{\varphi'} + \overline{\psi}),$$

de unde urmează

$$f(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}(z\,\overline{\varphi} + \bar{z}\,\varphi + \chi + \overline{\chi}) = \mathrm{Re}\,(\bar{z}\varphi + \chi), \tag{6}$$

astfel că funcţia $f(z,\bar{z})$ coincide cu funcţia lui Airy scrisă sub forma complexă în (7.23). Introducînd acum (6) în (4), deducem

$$\mathcal{M}_3(s) = \mathrm{Re}\,[\chi - z\psi - z\bar{z}\psi']_{s_0}^{s}. \tag{7}$$

Formulele (3) şi (7) dau cantităţile cerute.

Este vizibil că mărimile din (3) şi (7) nu depind de drumul parcurs între punctele z_0 şi z. Aceasta era de prevăzut: schimbînd drumul, ar trebui să le adăugăm rezultanta şi momentul rezultant al tensiunilor ce iau naştere pe o curbă *închisă*; or, torsorul acestora va fi nul, întrucît forţele de volum acţionînd în domeniul mărginit de această curbă sînt nule.

b) Problema neomogenă

Pentru a ține seama de forțele de volum, trebuie să reproducem acum aceleași calcule pentru vectorul-tensiune $\sigma_{n1}^* + i\sigma_{n2}^*$ din (7.48). Ținînd seama de (1), vom scrie

$$R^*(s) = -\frac{1}{2} i K^* \Big|_{s_0}^{s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{s_0}^{s} \left[\iint_{\mathscr{D}} \frac{F}{\bar{Z} - \bar{\mathfrak{z}}} \, dD\right] d\bar{\mathfrak{z}}, \tag{8}$$

ceea ce este valabil pentru orice curbă $\mathscr{C}$ din $\mathscr{D}$. În cazul particular al unei curbe $\mathscr{C}$ simple închise, prima expresie din al doilea membru din (8) trebuie să fie nulă, întrucît K^* din (7.46) este vizibil o funcție uniformă. Integrala curbilinie din (8) are — ținînd seama de formula lui Stokes (A.4.29) și de a doua formulă (7.31), transcrisă pentru domeniul $\mathscr{A}$ de frontieră $\mathscr{C}$ — valoarea

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{C}} \left[\iint_{\mathscr{A}} \frac{F}{\bar{Z} - \bar{\mathfrak{z}}} \, dD\right] d\bar{\mathfrak{z}} = -\frac{1}{2\pi i}(-2i)\iint_{\mathscr{A}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}\left[\iint_{\mathscr{A}} \frac{F}{\bar{Z} - \bar{\mathfrak{z}}} \times \right.$$

$$\left. \times \, dX_1 \, dX_2\right] dx_1 \, dx_2 = -\iint_{\mathscr{A}} F \, dx_1 \, dx_2,$$

astfel că (8) ia forma

$$R^*(s) = -\iint_{\mathscr{A}} F \, dD. \tag{9}$$

Pentru momentul rezultant, deducem pe rînd din (2) și (7.48)

$$\mathscr{M}_3^*(s) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{s_0}^{s} \mathfrak{z}\, d\bar{K}^* + \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int_{s_0}^{s}\left[\iint_{\mathscr{A}} \frac{\bar{F}}{Z - \mathfrak{z}}\, dD\right] \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z},$$

de unde, integrînd prin părți:

$$\mathscr{M}_3^*(s) = -\frac{1}{4}\left[\mathfrak{z}\bar{K}^* + \bar{\mathfrak{z}} K^*\right]_{s_0}^{s} + \frac{1}{4}\int_{s_0}^{s} (\bar{K}^* \, d\mathfrak{z} + K^* \, d\bar{\mathfrak{z}}) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{s_0}^{s}\left\{\left[\iint_{\mathscr{D}} \frac{\bar{F}}{Z - \mathfrak{z}}\, dD\right] \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} + \left[\iint_{\mathscr{D}} \frac{F}{\bar{Z} - \bar{\mathfrak{z}}}\right] \bar{\mathfrak{z}}\, d\bar{\mathfrak{z}}\right\}. \tag{10}$$

Dacă $\mathscr{C}$ este o curbă simplă închisă, ținînd seama că K^* este uniformă, prima paranteză e nulă; înlocuind din nou pe $\mathscr{D}$ prin $\mathscr{A}$, și ținînd seama de prima relație (7.47) și de faptul că S_0^* este o cantitate reală, constatăm că prima integrală din (10) se anulează de asemenea. Pentru cea de-a doua integrală curbilinie, avem pe rînd

$$\frac{1}{4\pi} 2i \iint_{\mathscr{A}} \left[\mathfrak{z}\frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}\iint_{\mathscr{A}} \frac{\bar{F}}{Z - \mathfrak{z}}\, dX_1\, dX_2 - \bar{\mathfrak{z}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}\iint_{\mathscr{A}} \frac{F}{\bar{Z} - \bar{\mathfrak{z}}}\, dX_1 dX_2\right] dx \; dx_2 =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\iint_{\mathscr{A}} [\mathfrak{z}(-\pi\bar{F}) - \bar{\mathfrak{z}}(-\pi F)]\, dx_1\, dx_2 = \iint_{\mathscr{A}} \mathrm{Im}\,(\mathfrak{z}\bar{F})\, dx_1\, dx_2,$$

astfel că (10) devine în definitiv

$$\mathscr{M}_3^*(s) = -\iint\limits_{\mathscr{A}} (x_1 F_2 - x_2 F_1)\,\mathrm{d}D. \tag{11}$$

Integralele (9) și (11) reprezintă desigur torsorul forțelor de volum F din domeniul $\mathscr{A}$ (care are acum rolul domeniului $\mathscr{D}'$), și care fac echilibru tensiunilor de pe $\mathscr{C}$.

c) *Singularități admisibile pentru funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili*

Formulele de mai sus permit precizarea naturii eventualelor singularități ale funcțiilor φ, ψ în $\mathscr{D}$. Să presupunem că $F = 0$ și să transcriem formulele (3), (7) pentru cazul unei curbe simple închise $\mathscr{C}$, parcurse în sens direct:

$$R = -\mathrm{i}\,[\varphi + z\overline{\varphi}' + \overline{\psi}]_{\mathscr{C}}, \quad \mathscr{M}_3 = \mathrm{Re}\,[\chi - z\psi - z\bar{z}\,\varphi']_{\mathscr{C}}. \tag{12}$$

Mărimile R, $\mathscr{M}_3$ trebuie să fie evident niște constante.

Să presupunem acum că un punct oarecare din $\mathscr{A}$ este un punct regulat, sau cel mult un punct singular izolat *de tip uniform* pentru $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Alegîndu-l drept origine, rezultă că în vecinătatea lui avem

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n, \tag{13}$$

unde

$$a_n = a_n' + \mathrm{i}a_n'', \qquad b_n = b_n' + \mathrm{i}b_n'', \tag{14}$$

(și unde $a_n = b_n = 0$ pentru $n < 0$ dacă punctul considerat este punct regulat). Integrînd termen cu termen seria $\psi(z)$, avem și

$$\chi(z) = b_{-1}\ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} z^{n+1}. \tag{15}$$

Pentru a calcula torsorul tensiunilor pe o curbă $\mathscr{C}$ ce conține în interior originea (și nici un alt punct singular), introducem (13)—(15) în (12). Deducem

$$R = 0 \quad , \quad \mathscr{M}_3 = \mathrm{Re}\;[b_{-1}\ln z]_{\mathscr{C}} = -2\pi\, b_{-1}''. \tag{16}$$

De aci rezultă mai întîi că torsorul tensiunilor ce apar pe *orice* curbă care conține în interior numai puncte regulate ale funcțiilor $\varphi(z)$, $\psi(z)$, este nul. În particular, aceasta înseamnă că sarcini concentrate de orice natură pot apare numai în puncte singulare ale funcțiilor φ, ψ.

Mai departe, se vede că funcții Kolosov-Mushelișvili uniforme în vecinătatea unui punct singular izolat, corespund în general unei repartiții de tensiuni auto-echilibrate (de torsor nul). Fac excepție funcțiile

$$\varphi(\mathfrak{z}) = 0, \quad \psi(\mathfrak{z}) = -(\mathrm{i}\,\mathscr{M}_3/2\pi)\mathfrak{z}^{-1},$$

care descriu o repartiție de tensiuni static echivalente cu un cuplu de moment $\mathscr{M}_3$. Deformînd continuu curba $\mathscr{C}$ în așa fel încît ea să se reducă la punctul singular, conchidem că funcțiile de mai sus descriu acțiunea unui *moment concentrat*, aplicat în origine. Intensitatea acestuia este desigur $M_3 = -\mathscr{M}_3$, (pentru a asigura împreună cu tensiunile repartizate pe $\mathscr{C}$ echilibrul domeniului de frontieră $\mathscr{C}$). Funcțiile

$$\varphi(\mathfrak{z}) = 0, \quad \psi(\mathfrak{z}) = (\mathrm{i}\,M_3/2\pi)\,\mathfrak{z}^{-1}, \tag{17}$$

descriu deci acțiunea asupra planului nemărginit, a unui moment concentrat de intensitate M_3 aplicat în origine.

Să admitem acum existența unor singularități izolate de tip critic algebric. Alegînd din nou originea în punctul singular, și admițînd deci dezvoltări în serie în care termenul general are forma

$$\varphi(\mathfrak{z}) = a\,\mathfrak{z}^{p/q}, \qquad \psi(\mathfrak{z}) = b\,\mathfrak{z}^{r/s}, \tag{18}$$

(a, b — constante complexe; p, q, r, s — numere întregi), conchidem din (12) că mărimile R și $\mathscr{M}_3$ *depind* în general de numărul de parcurgeri ale curbei, precum și de alegerea punctelor $s_0 \equiv s$ pe această curbă, ceea ce contrazice semnificația mecanică a rezultantei și momentului rezultant. Prin urmare, funcțiile $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$ nu pot avea puncte critice algebrice — decît eventual pe componenta exterioară $\mathscr{L}_0$ a frontierei.

Dimpotrivă, funcțiile considerate pot avea puncte critice de tip logaritmic. Într-adevăr, dacă în alcătuirea lor intră termeni

$$\varphi(\mathfrak{z}) = a \ln \mathfrak{z}, \quad \psi(\mathfrak{z}) = b \ln \mathfrak{z}, \quad \chi(\mathfrak{z}) = b\mathfrak{z}\,(\ln \mathfrak{z} - 1), \tag{19}$$

atunci din (12) urmează

$$R = 2\pi\,(a - \overline{b}), \quad \mathscr{M}_3 = 0. \tag{20}$$

Reducînd curba $\mathscr{C}$ la punctul singular, constatăm că funcțiile (19) descriu o stare de tensiune corespunzătoare acțiunii unei *forțe concentrate*, aplicate în acel punct.

Vom reveni la finele § 10, precum și în § 16, exemplele ***d*** și ***e***, asupra soluțiilor de forma (17) și (19).

Din cele de mai sus se constată că prezența unei forțe sau a unui moment concentrat *nu caracterizează* starea elastică: coeficienții din (13) rămîn nedeterminați, cu excepția lui $\mathrm{Im}\, b_{-1}$. Prezența unei forțe sau a unui moment concentrat este deci descrisă de *orice* funcții $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$ în care apar termeni de forma (17) sau (19) — cu singura condiție ca seriile care eventual le definesc să fie convergente (exceptînd desigur punctul singular).

Înțelegînd însă starea corespunzătoare unei acțiuni mecanice concentrate ca definită printr-un proces de trecere la limită din cea corespunzătoare unei sarcini repartizate pe o porțiune din $\mathscr{D}$, rezultă că soluția problemei depinde esențial de *modul* în care este efectuată această trecere la limită, singura în măsură să definească coeficienții din (13). În particular, modul curent de a defini forța și momentul concentrat corespunde proceselor descrise în § 16, exemplele ***d*** și ***e*** (vezi și Observația din § 16, pag. 456 ; vezi încă și § 2.1, ***b***). Acțiuni concentrate de structură mai complicată pot fi construite în principiu cu ajutorul funcției δ a lui Dirac și al derivatelor sale.

§ 9. GRADUL DE ARBITRAR AL FUNCȚIILOR LUI KOLOSOV ȘI MUSHELIȘVILI. SCHIMBĂRI DE COORDONATE

a) Gradul de arbitrar

Cunoașterea funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili caracterizează pe deplin starea elastică, dar nu și reciproc (compară cu § 5.11, pag. 216). Aceste funcții trebuie deci determinate numai abstracție făcînd de anumiți termeni ce corespund stării elastice nule (tensiuni nule, sau tensiuni *și* deplasări nule). Vom atribui — *numai în acest paragraf* — indicele „o" funcțiilor ce descriu starea nulă.

Ne vom limita la cazul $F = 0$ (pentru $F \neq 0$, vezi C. Teodosiu [1]).

Fie că în $\mathscr{D}$ e realizată *starea de tensiune nulă*. Din prima relație (7.8) urmează, ținînd seama de (7.7), că

$$\operatorname{Re} \Phi_0 (\mathfrak{z}) = 0. \qquad (1)$$

Notînd $\Phi_0 = P_0 + iQ_0$, deducem din (1) și din ecuațiile Cauchy-Riemann că Q_0 se reduce la o constantă reală C, și deci

$$\Phi_0(\mathfrak{z}) = iC. \qquad (2)$$

Introducînd (2) în a doua ecuație (7.8), deducem

$$\Psi_0(\mathfrak{z}) = 0, \qquad (3)$$

astfel că prin integrare obținem

$$\varphi_0(\mathfrak{z}) = iC\mathfrak{z} + \gamma, \quad \psi_0(\mathfrak{z}) = \gamma', \qquad (4)$$

unde γ, γ' sînt constante complexe. Avem deci libertatea de a dispune de 5 constante reale, și funcțiile (4) pot fi adăugate funcțiilor problemei, fără a altera starea de tensiune. Prin urmare, putem alege arbitrar valorile funcțiilor φ, ψ și $\operatorname{Im} \varphi'$ într-un punct oarecare. Dacă $\mathscr{D}$ conține originea, putem alege arbitrar valorile $\varphi(0)$, $\psi(0)$ și $\operatorname{Im} \varphi'(0)$. Așadar, pe de o parte aceste valori nu pot fi *principial* determinate din datele formulate în tensiuni ; pe de altă parte cunoașterea lor *nu este necesară.*

Fie acum realizată în $\mathscr{D}$ *starea de deplasare nulă*. Funcțiile corespunzătoare trebuie căutate printre cele ce realizează starea de tensiune nulă, astfel că ele au forma (4). Din (7.12) obținem acum

$$C(\varkappa + 1)\, i\mathfrak{z} + (\varkappa\gamma - \bar{\gamma}') = 0. \tag{5}$$

Or, această condiție este satisfăcută identic dacă și numai dacă avem

$$C = 0,\ \gamma' = \varkappa\bar{\gamma}. \tag{6}$$

Aceasta revine la a stabili trei noi condiții (în real), și arată că mai putem dispune arbitrar numai de două constante reale. Putem deci alege arbitrar pe γ *sau* γ', așadar, dacă originea este în $\mathscr{D}$, valoarea $\varphi(0)$ *sau* $\psi(0)$. Notînd

$$\gamma = \gamma_1 + i\,\gamma_2,\quad \gamma' = \gamma_1' + i\gamma_2', \tag{7}$$

și introducînd (4) în (7.12), obținem deplasările ce corespund stării de tensiune nulă :

$$\begin{aligned} u_1^0 &= [-(\varkappa + 1)\, Cx_2 + (\varkappa\gamma_1 - \gamma_1')]/2\mu, \\ u_2^0 &= [(\varkappa + 1)\, Cx_1 + (\varkappa\gamma_2 + \gamma_2')]/2\mu. \end{aligned} \tag{8}$$

Aceasta este o roto-translație rigidă, caracterizată de parametrii C, $\varkappa\gamma_1 - \gamma_1'$, $\varkappa\gamma_2 + \gamma_2'$. Condițiile (6) echivalează cu cerința de anulare a acestora.

b) Schimbări de axe

Ca și în cazul problemei anti-plane (vezi § 5.11, pct. *d*) poate fi utilă transcrierea funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili dintr-un sistem de axe în altul. Notînd cu indicele „1" mărimile relative la noul sistem, avem deci în cazul translației

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^1 + \mathfrak{z}^0, \tag{9}$$

iar în cel al rotației

$$\mathfrak{z} = [\exp(i\vartheta)]\,\mathfrak{z}^1. \tag{10}$$

Ca și în (5.11.13), o funcție $F(x_1, x_2)$ se zice invariantă[6]) dacă avem

$$F^1(\mathfrak{z}^1, \bar{\mathfrak{z}}^1) \equiv F(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}). \tag{11}$$

Semnificația mecanică a componentelor σ_{ij} arată că funcțiile S, S_0 sînt invariante la o translație (dar nu și la o rotație !) a axelor :

$$S_0^1 = S_0,\ S^1 = S. \tag{12}$$

---

[6]) Poziția — inferioară sau superioară — a indicelui „1" este dictată aci (ca și în § 5.11) *exclusiv* de rațiuni de comoditate a scrierii.

Relația (7.4) dă prin urmare

$$\mathrm{Re}[\Phi(z) - \Phi_1(z - z^0)] = 0,$$

de unde urmează că partea imaginară a acestei funcții de z este o constantă, fie ea iC. Prin urmare, avem

$$\Phi(z) = \Phi_1(z - z^0) + iC, \tag{13}$$

unde, după cum urmează din (2), constanta iC poate fi neglijată.

Relația (7.6) conduce la egalitatea

$$\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = (\bar{z} - \bar{z}^0)\Phi_1'(z - z^0) + \Psi_1(z - z^0),$$

de unde, ținînd seama de (13), deducem

$$\Psi(z) = \Psi_1(z - z^0) - \bar{z}^0\Phi_1'(z - z^0). \tag{14}$$

Neglijînd termenii corespunzători rotației (2) și constantele complexe de integrare (corespunzătoare unei translații), deducem din (13), (14)

$$\varphi(z) = \varphi_1(z^1), \quad \psi(z) = \psi_1(z^1) - \bar{z}^0\varphi_1'(z^1). \tag{15}$$

Funcția $\varphi(z)$ este deci invariantă la o translație de axe, în timp ce $\psi(z)$ se transformă conform celei de a doua relații (15).

Trecînd la cazul rotației axelor, vom aminti că $S_0 = \Theta/(1 + \nu)$, și deci :

$$S_0 = S_0^1. \tag{16}$$

Funcția S nu este însă un invariant. Transcriind a doua ecuație (7.1) în axele z și z^1, obținem

$$\partial S/\partial \bar{z} = \partial S_0/\partial z, \quad \partial S^1/\partial \bar{z}^1 = \partial S_0^1/\partial z^1. \tag{17}$$

Ținînd seama de (16), precum și de faptul că din (10) urmează

$$dz/\partial z^1 = \exp(i\vartheta), \quad d/dz^1 = [\exp(i\vartheta)]\, d/dz, \tag{18}$$

putem transcrie a doua ecuație (17) sub forma

$$[\exp(-i\vartheta)]\, \partial S^1/\partial \bar{z} = [\exp(i\vartheta)]\partial S_0/\partial z. \tag{19}$$

Comparînd-o cu prima ecuație (17), deducem prin integrare

$$S^1 = [\exp(2i\vartheta)]\, S + f(z),$$

unde $f(z)$ este o funcție necunoscută. Întrucît formulele generale de transformare (2.5.5) sînt omogene, rezultă că trebuie să avem $f(z) \equiv 0$, și deci

$$S^1 = [\exp(2i\vartheta)]\, S. \tag{20}$$

Se înțelege că această relație — asemănătoare cu a doua relație (5.11.16) — putea fi stabilită direct, dar laborios, din (2.5.5).

Ţinînd seama de (16), obţinem acum din (7.4) — după neglijarea unei constante imaginare — la fel ca în cazul translaţiei

$$\Phi(z) = \Phi_1(z^1). \tag{21}$$

Din (7.6) deducem mai întîi

$$\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = [\exp(-2i\vartheta)]\,[\bar{z}^1\Phi_1'(z^1) + \Psi_1(z^1)]. \tag{22}$$

Întrucît din (21) şi (18) avem evident

$$\Phi'(z) = [\exp(-i\vartheta)]\,\Phi_1'(z^1),$$

primii termeni din ambii membri din (22) se reduc, şi astfel căpătăm

$$\Psi(z) = [\exp(-2i\vartheta)]\,\Psi_1'(z^1). \tag{23}$$

Ţinînd seama din nou de (18), obţinem din (21) şi (23) prin integrare (întrucît unghiul ϑ nu depinde de z):

$$\varphi(z) = [\exp(i\vartheta)]\,\varphi_1(z^1), \quad \psi(z) = [\exp(-i\vartheta)]\,\psi_1(z^1). \tag{24}$$

c) Ecuaţiile lui Lamé şi Maxwell

Formulele precedente permit printre altele să se stabilească ecuaţiile elasticităţii plane sub forma numită *a lui Lamé şi Maxwell*. Pentru aceasta, să căutăm să transcriem ecuaţiile (7.1) numai prin intermediul tensiunilor principale.

Prima din ele rămîne invariantă, în virtutea relaţiei (16). Dar pentru cea de-a doua, nu putem folosi nici un sistem de coordonate carteziene, întrucît poziţia axelor principale variază de la punct la punct. Va trebui deci ca această ecuaţie să fie transcrisă în coordonate curbilinii ortogonale, definite ca traiectorii ale tensiunilor principale (tangente în fiecare punct la direcţiile principale locale). Aceste traiectorii se numesc *linii izostatice*.

Păstrînd deocamdată notaţia z, $\bar{z}$ pentru coordonatele carteziene în axe oarecare, introducînd (16) şi (20) în a doua ecuaţie (7.1), şi ţinînd seama că unghiul ϑ este acum o funcţie de z şi $\bar{z}$, căpătăm mai întîi

$$\partial S_0^1/\partial z - [\exp(-2i\vartheta)]\,[\partial S^1/\partial \bar{z} - 2iS^1\partial\vartheta/\partial\bar{z}] = 0. \tag{25}$$

Această ecuaţie trebuie să rămînă valabilă la limită, atunci cînd atît axele z, cît şi axele z^1, sînt axele principale, adică pentru $\vartheta = 0$. Notînd cu s_1, s_2 abscisele curbilinii pe liniile izostatice, şi considerînd variabila complexă $\mathfrak{s} = s_1 + is_2$, deducem din (25):

$$\partial(\sigma_1 + \sigma_2)/\partial\mathfrak{s} - \partial(\sigma_2 - \sigma_1)/\partial\bar{\mathfrak{s}} + 2i(\sigma_2 - \sigma_1)\,(\partial\vartheta/\partial\bar{\mathfrak{s}})|_{\vartheta=0} = 0,$$

sau încă, făcînd uz de formulele (A.4.5) pentru variabilele $\hat{s}, \bar{\hat{s}}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} - i\frac{\partial}{\partial s_2}\right)(\sigma_1 + \sigma_2) - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + i\frac{\partial}{\partial s_2}\right)(\sigma_2 - \sigma_1) +$$

$$+ 2i(\sigma_2 - \sigma_1)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} + i\frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}\right)\Big|_{\vartheta=0} = 0. \quad (26)$$

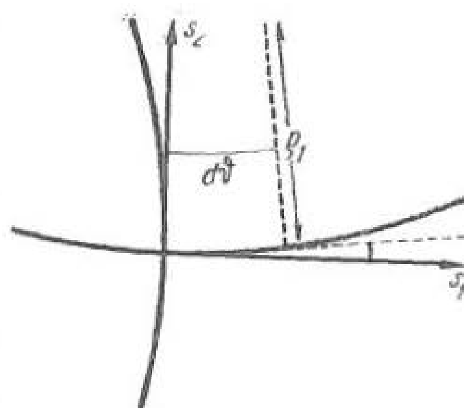


Fig. 6.9.1

Înlocuind în punctul considerat liniile izostatice prin cercurile osculatoare corespunzătoare, de raze ρ_1, respectiv ρ_2, avem evident $ds_1 = \rho_1 d\vartheta$, $ds_2 = \rho_2 d\vartheta$, de unde urmează

$$\partial\vartheta/\partial s_1 = 1/\rho_1, \quad \partial\vartheta/\partial s_2 = 1/\rho_2. \quad (27)$$

Separînd acum în (26) partea reală și cea imaginară, căpătăm în definitiv ecuațiile Lamé și Maxwell:

$$\partial\sigma_1/\partial s_1 + (\sigma_1 - \sigma_2)/\rho_2 = 0, \qquad \partial\sigma_2/\partial s_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)/\rho_1 = 0. \quad (28)$$

Pentru aceste ecuații forma în variabile reale (28) e cu mult mai simplă decît cea în variabile complexe.

§ 10. NATURA FUNCȚIILOR LUI KOLOSOV ȘI MUSHELIȘVILI ÎN DOMENII OARECARE

Proprietățile funcțiilor $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$ trebuie să decurgă din formulele ce le leagă de componentele tensiunii și deplasării, care trebuie evident să fie uniforme și *mărginite* în $\mathscr{D}$. Ne vom limita la cazul $F = 0$.

OBSERVAȚIA 1. Presupunerea — ciudată la prima vedere — că componentele deplasării pot *să nu fie* funcții uniforme, conduce la aplicații de importanță capitală în studiul tensiunilor termice și al dislocațiilor. (Vezi A. Love [1], § 156 A; N. Mushelișvili [5], §§ 45—46; V. Volterra [1]; G. Weingarten [1]; vezi și indicațiile din § 4.1, pag. 125).

Amintim aci relațiile fundamentale (7.8), (7.12) și (7.19):

$$S_0 = 2(\varphi' + \overline{\varphi'}), \quad S = 2(\bar{\mathfrak{z}}\varphi'' + \psi'); \quad (1)$$

$$2\mu U = \varkappa\varphi - \mathfrak{z}\overline{\varphi'} - \overline{\psi}; \quad (2)$$

$$\sigma_{n1} + i\sigma_{n2} = -i(\varphi + \mathfrak{z}\overline{\varphi'} + \overline{\psi})_{,s}. \quad (3)$$

Evident, funcțiile φ, ψ nu pot avea puncte singulare decît pe frontiera lui $\mathscr{D}$, sau în exteriorul acestui domeniu (de exemplu în $\mathscr{D}_i^+$).

a) Domenii simplu conexe

O funcţie analitică într-un domeniu mărginit şi simplu conex este cu necesitate uniformă (teorema monodromiei). Prin urmare, dacă $\mathscr{D}$ este *simplu conex* şi *mărginit*, funcţiile $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sînt *olomorfe* în $\mathscr{D}$.

Dacă $\mathscr{D}$ este multiplu conex, ele rămîn uniforme în orice porţiune mărginită şi simplu conexă a sa, putînd fi însă în general multiforme.

b) Domenii mărginite şi multiplu conexe

Cu notaţiile (A.4.35) — (A.4.38), condiţiile de uniformitate se scriu ca

$$[S_0]_{\mathscr{C}} = [S]_{\mathscr{C}} = [U]_{\mathscr{C}} = 0 \tag{4}$$

pentru orice curbă închisă $\mathscr{C}$ din $\mathscr{D}$. Întrucît $\mathbf{S}_0$ are forma din (1), prima relaţie (4) duce la

$$[\operatorname{Re}\Phi(z)]_{\mathscr{C}} = 0, \tag{5}$$

ceea ce arată că partea reală a funcţiei $\Phi(z)$ este uniformă în $\mathscr{D}$. Partea sa imaginară se obţine sub forma (A.5.62), aşadar a unei integrale curbilinii care pune în evidenţă o sumă de termeni logaritmici, şi o funcţie uniformă. Alegînd

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{m} A_j' \ln(z - z_j) + \Phi_0(z), \quad z_j \in \mathscr{D}_j^+, \tag{6}$$

— unde A_j' sînt constante *reale*, iar $\Phi_0(z)$ este uniformă, deci olomorfă în $\mathscr{D}$ — asigurăm verificarea condiţiei (5).

Pentru a deduce din (6) funcţia $\varphi(z)$, avem mai întîi

$$\int \sum_{j=1}^{m} A_j' \ln(z - z_j)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} A_j'(z - z_j)\ln(z - z_j) - \sum_{j=1}^{m} A_j'(z - z_j). \tag{7}$$

Pe de altă parte, din (A.5.60) deducem

$$\int \Phi_0(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} C_j \ln(z - z_j) + \Phi_{0;0}(z), \tag{8}$$

unde $\Phi_{0;0}(z)$ este olomorfă în $\mathscr{D}$. Adunînd expresiile (7) şi (8) şi strîngînd la un loc termenii uniformi, obţinem

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{m} A_j' z \ln(z - z_j) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \ln(z - z_j) + \varphi_0(z), \tag{9}$$

unde $\gamma_j = C_j - A_j' z_j$, iar $\varphi_0(z)$ este o funcţie olomorfă în $\mathscr{D}$.

Pentru a determina aspectul funcției $\psi(z)$, vom face uz de a doua condiție (4), vom ține seama de (1), și de faptul că funcția $\varphi''(z)$ rezultă din (9) a fi olomorfă în $\mathscr{D}$. Obținem astfel

$$[\Psi(z)]_{\mathscr{C}} = 0, \tag{10}$$

ceea ce corespunde relației (5) pentru $\Phi(z)$. Funcția $\Psi(z)$ este deci olomorfă în $\mathscr{D}$, iar primitiva ei se calculează ca în (8):

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^{m} \gamma'_j \ln(z - z_j) + \psi_0(z), \qquad z_j \in \mathscr{D}_j^+, \tag{11}$$

unde $\psi_0(z)$ este olomorfă.

Expresiile (9), (11) constituie punctul de plecare în studiul tensiunilor termice și al dislocărilor în corpurile plane multiplu conexe.

Să facem acum uz de ultima condiție (4), introducînd aci (2); obținem

$$\varkappa[\varphi]_{\mathscr{C}} - z[\overline{\varphi}']_{\mathscr{C}} - [\overline{\psi}]_{\mathscr{C}} = 0. \tag{12}$$

Dar din (9) și (11) avem în particular pentru $\mathscr{C} = \mathscr{L}_j$:

$$[\varphi]_{\mathscr{L}_j} = 2\pi\mathrm{i}(A'_j z + \gamma_j), \quad [\varphi']_{\mathscr{L}_j} = 2\pi\mathrm{i}A'_j, \quad [\psi]_{\mathscr{L}_j} = 2\pi\mathrm{i}\gamma'_j, \tag{13}$$

astfel că din (12) obținem m condiții (necesare și suficiente):

$$2\pi\mathrm{i}(\varkappa A'_j z + \varkappa\gamma_j + A'_j z + \overline{\gamma}'_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots m,$$

(amintim că A'_j sînt reale), de unde deducem

$$A'_j = 0, \quad \gamma'_j = -\varkappa\overline{\gamma}_j. \tag{14}$$

Relațiile (12) rezultă acum verificate pentru *orice* curbă $\mathscr{C}$ din $\mathscr{D}$. Introducînd (14) în (9) și (11), obținem

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \ln(z - z_j) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= -\varkappa \sum_{j=1}^{m} \overline{\gamma}_j \ln(z - z_j) + \psi_0(z), \end{aligned} \tag{15}$$

ceea ce asigură uniformitatea *tuturor* componentelor stării elastice.

Pentru a determina constantele γ_j, să considerăm rezultanta complexă $X^{(j)}$ și momentul rezultant $M_3^{(j)}$ al tensiunilor *exterioare* aplicate pe componenta $\mathscr{L}_j$ a frontierei:

$$\begin{aligned} X^{(j)} &= X_1^{(j)} + \mathrm{i}\, X_2^{(j)} = \oint_{\mathscr{L}_j} (\sigma_{n1} + \mathrm{i}\,\sigma_{n2})\, \mathrm{d}s, \\ M_3^{(j)} &= \oint_{\mathscr{L}_j} (x_1\,\sigma_{n2} - x_2\,\sigma_{n1})\, \mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{16}$$

pentru $j = 0, 1, 2, \ldots, m$. (Curbele $\mathscr{L}_j$ sînt parcurse în sensul direct, iar $\boldsymbol{n}$ este normala exterioară la $\mathscr{D}$.)

Comparînd (16) cu formulele (8.1), (8.2) scrise pentru o curbă $\mathscr{C}$ închisă, unde $\boldsymbol{n}$ este normala exterioară la domeniul $\mathscr{A}$ mărginit de $\mathscr{C}$, rezultă imediat că

$$R|_{\mathscr{L}_0} = X^{(0)}, \qquad R|_{\mathscr{L}_j} = -X^{(j)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{17}$$
$$\mathscr{M}_3|_{\mathscr{L}_0} = M_3^{(0)}, \qquad \mathscr{M}_3|_{\mathscr{L}_j} = -M_3^{(j)},$$

ceea ce se explică prin faptul că sensul normalei din (8.1), (8.2) coincide cu cel din (16) numai pe componenta exterioară a frontierei.

Ținînd seama de (15) în (8.12), avem mai întîi

$$[\varphi + z\overline{\varphi}' + \overline{\psi}]_{\mathscr{C}} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j[\ln(z - z_j) - \varkappa \ln(\bar{z} - \bar{z}_j)]_{\mathscr{C}}. \tag{18}$$

Prin urmare, dacă curba $\mathscr{C}$ conține în interior o componentă $\mathscr{L}_j$ a frontierei (și numai pe ea), prima relație (8.12) dă

$$R = 2\pi(\varkappa + 1)\gamma_j, \tag{19}$$

iar dacă domeniul $\mathscr{A}$ mărginit de $\mathscr{C}$ este simplu conex și în întregime conținut în $\mathscr{D}$, atunci avem

$$R = 0. \tag{20}$$

Scriind (19) pentru $\mathscr{L}_j$ și ținînd seama de (17), găsim deci

$$\gamma_j = -X^{(j)}/2\pi(\varkappa + 1), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{21}$$

astfel că *forma definitivă* a funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili într-un domeniu mărginit și multiplu conex (pentru $F = 0$) este

$$\varphi(z) = -[1/2\pi(\varkappa + 1)] \sum_{j=1}^{m} X^{(j)} \ln(z - z_j) + \varphi_0(z),$$
$$\psi(z) = [\varkappa/2\pi(\varkappa + 1)] \sum_{j=1}^{m} \overline{X^{(j)}} \ln(z - z_j) + \psi_0(z), \tag{22}$$

unde $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ sînt funcții olomorfe în $\mathscr{D}$. ($\Phi(z)$, $\Psi(z)$ sînt întotdeauna olomorfe.)

Aceste formule permit *separarea* componentelor multiforme și reducerea ulterioară a problemei la determinarea unor funcții uniforme, deci olomorfe în $\mathscr{D}$. (Vezi mai departe § 11 și § 14, pag. 439; vezi și § 5.11, pag. 217–218.)

Pentru a face uz de (15) în a doua formulă (8.12), vom considera primitiva $\chi(z)$ a funcției $\psi(z)$, care are forma (vezi (11) și raționamentul din (7), (8)):

$$\chi(z) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \ln (z - z_j) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j'' \ln (z - z_j) + \chi_0(z), \tag{23}$$

unde $\chi_0(z)$ este olomorfă, iar γ_j'' sînt constante complexe. Introducînd (11) și (23) în (8.12), și ținînd seama că $\varphi'(z)$ este olomorfă (vezi (6), cu $A_j' = 0$), obținem

$$\mathscr{M}_3 = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} [\gamma_j'' \ln (z - z_j)]_{\mathscr{C}} . \tag{24}$$

Prin urmare, dacă $\mathscr{C}$ conține în interior o curbă $\mathscr{L}_j$, (24) devine

$$\mathscr{M}_3 = -2\pi \operatorname{Im} \gamma_j'' ; \tag{25}$$

dacă domeniul $\mathscr{A}$ mărginit de $\mathscr{C}$ este simplu conex și conținut în $\mathscr{D}$, atunci

$$\mathscr{M}_3 = 0. \tag{26}$$

Scriind (25) pe $\mathscr{L}_j$ și ținînd seama de (17), căpătăm

$$\operatorname{Im} \gamma_j'' = M_3^{(j)}/2\pi. \tag{27}$$

În definitiv, rezultantele complexe $X^{(j)}$ intervin în expresiile funcțiilor $\varphi(z)$ și $\psi(z)$, iar momentele $M_3^{(j)}$ — în expresia funcției $\chi(z)$.

c) Domenii nemărginite și multiplu conexe

Să presupunem în fine că domeniul $\mathscr{D}$ este *nemărginit* — limitîndu-ne la cazul unui domeniu $\mathscr{D}^-$ din figura A.3.2, cu frontiera alcătuită din curbele $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_m$.

Formulele (22) sînt valabile în orice porțiune mărginită a planului. Rămîn de cercetat funcțiile $\varphi(z)$, $\psi(z)$ în *exteriorul* oricărui cerc $\mathscr{L}_R$ de rază R. Alegînd R suficient de mare pentru ca toate curbele $\mathscr{L}_j$ să fie conținute în interiorul lui $\mathscr{L}_R$, conchidem că pentru orice punct exterior lui $\mathscr{L}_R$ avem $|z| > |z_j|$, și deci

$$\ln (z - z_j) = \ln z + \ln (1 - z_j / z),$$

unde funcția

$$\ln (1 - z_j/z) = - z_j/z - \frac{1}{2} (z_j/z)^2 - \frac{1}{3} (z_j/z)^3 - \cdots$$

este olomorfă în exteriorul cercului $\mathscr{L}_R$, inclusiv în $\mathfrak{z}_\infty$. Notînd

$$X_1 = \sum_{j=1}^{m} X_1^{(j)}, \quad X_2 = \sum_{j=1}^{m} X_2^{(j)}, \quad \mathsf{X} = X_1 + \mathrm{i}\, X_2, \tag{28}$$

obținem din (22) formulele

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{z}) &= -[\mathsf{X}/2\pi(\varkappa + 1)] \ln \mathfrak{z} + \varphi_{0:0}(\mathfrak{z}), \\ \psi(\mathfrak{z}) &= [\varkappa\overline{\mathsf{X}}/2\pi(\varkappa + 1)] \ln \mathfrak{z} + \psi_{0:0}(\mathfrak{z}), \end{aligned} \tag{29}$$

unde funcțiile $\varphi_{0:0}$ și $\psi_{0:0}$ sînt olomorfe în exteriorul lui $\mathscr{L}_R$:

$$\varphi_{0:0}(\mathfrak{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathfrak{z}^n, \quad \psi_{0:0}(\mathfrak{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \mathfrak{z}^n. \tag{30}$$

OBSERVAȚIA 2. Dezvoltări de forma (30) sînt valabile în orice punct exterior cercului $\mathscr{L}_R$ — dar nu trebuie să credem că există *o singură* astfel de dezvoltare în serie valabilă pentru exteriorul lui $\mathscr{L}$. Coroana circulară este singurul domeniu pentru care cunoașterea unui element Laurent epuizează cunoașterea funcției.

Să folosim acum condiția — evidentă din punct de vedere mecanic — ca tensiunile și deplasările să rămînă mărginite la infinit. Introducînd expresiile (29), (30) în formulele (1), obținem

$$\begin{aligned} S_0 &= 2\left[-\frac{\mathsf{X}}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{\mathfrak{z}} - \frac{\overline{\mathsf{X}}}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,(a_n \mathfrak{z}^{n-1} + \bar{a}_n \bar{\mathfrak{z}}^{n-1})\right], \\ S &= 2\left[\frac{\mathsf{X}}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{\bar{\mathfrak{z}}}{\mathfrak{z}^2} + \frac{\varkappa\overline{\mathsf{X}}}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{\mathfrak{z}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1)\, a_n \bar{\mathfrak{z}} \mathfrak{z}^{n-2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n b_n \mathfrak{z}^{n-1}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Notînd aci $\mathfrak{z} = R\exp(\mathrm{i}\chi)$ deducem că S_0 și $|S|$ rămîn mărginiți pentru $R \to \infty$, dacă și numai dacă $a_n = b_n = 0$ pentru $n \geqslant 2$, astfel că formulele (29), (30), se reduc la

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{z}) &= -[\mathsf{X}/2\pi(\varkappa+1)] \ln \mathfrak{z} + a_1 \mathfrak{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} \mathfrak{z}^{-n}, \\ \psi(\mathfrak{z}) &= \quad [\varkappa\overline{\mathsf{X}}/2\pi(\varkappa+1)] \ln \mathfrak{z} + b_1 \mathfrak{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} \mathfrak{z}^{-n}. \end{aligned} \tag{32}$$

Funcțiile $\Phi(\mathfrak{z})$, $\Psi(\mathfrak{z})$ sînt deci olomorfe, cu excepția punctului de la infinit, unde pot avea eventual poli de ordin zero.

Din cele de mai sus rezultă acum că avem

$$\lim_{|\mathfrak{z}|\to\infty} S_0 = \operatorname{Re} a_1, \quad \lim_{|\mathfrak{z}|\to\infty} S = 2b_1. \tag{33}$$

Notînd

$$a_1 = a_1' + \mathrm{i}a_1'', \quad b_1 = b_1' + \mathrm{i}b_1'', \tag{34}$$

obținem din (33)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{\infty} &= 2a_1' - b_1', \qquad \sigma_{22}^{\infty} = 2a_1' + b_1', \qquad \sigma_{12}^{\infty} = b_1'', \\ a_1' &= \frac{1}{4}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}), \quad b_1' = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}), \quad b_1'' = \sigma_{12}^{\infty}. \end{aligned} \tag{35}$$

După cum se vede, mărimea $\mathrm{Im}\, a_1 = a_1''$ nu intervine în aceste relații. În cazul problemei lui Neumann putem lua (vezi §9, pag. 403–404)

$$a_0 = b_0 = \mathrm{Im}\, a_1 = 0, \tag{36}$$

astfel că seriile din (32) reprezintă funcții olomorfe *inclusiv* în punctul de la infinit. În cazul problemei lui Dirichlet, putem lua

$$a_0 = 0, \quad \text{sau} \quad b_0 = 0, \tag{37}$$

și una din cele două serii are un pol de ordin zero la infinit. (Vezi § A.5, pag. 716).

Mai departe, introducînd expresiile (32) în formula (2), căpătăm:

$$\begin{aligned} 2\mu U = &- [\varkappa X/2\pi(\varkappa+1)]\ln(\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}) + (\varkappa a_1 - \bar{a}_1)\mathfrak{z} - \bar{b}_1\bar{\mathfrak{z}} + \\ &+ [\bar{X}/2\pi(\varkappa+1)](\mathfrak{z}/\bar{\mathfrak{z}}) + \sum_{n=0}^{\infty}(\varkappa a_{-n}\mathfrak{z}^{-n} - n\bar{a}_{-n}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}^{-n-1} - \bar{b}_{-n}\bar{\mathfrak{z}}^{-n}), \end{aligned} \tag{38}$$

care rămîne mărginită la infinit dacă și numai dacă

$$X = a_1 = b_1 = 0, \tag{39}$$

așadar dacă atît rezultanta sarcinii pe $\mathscr{L}$, cît și tensiunile la infinit, sînt nule. În cazul problemei lui Neumann, deplasările la infinit rezultă atunci chiar nule.

Din formulele (6.22) și (38) obținem acum valoarea rotației

$$\begin{aligned} \omega_{12} = -\mathrm{Im}\, U_{,\mathfrak{z}} = \frac{1}{2\mu}\mathrm{Im}\Bigg[&\frac{\varkappa X}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{\mathfrak{z}} - (\varkappa a_1 - \bar{a}_1) - \\ &- \frac{\bar{X}}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}} + \sum_{n=1}^{\infty}(\varkappa n a_{-n}\mathfrak{z}^{-n-1} + n\bar{a}_{-n}\bar{\mathfrak{z}}^{-n-1} - n\bar{b}_{-n}\bar{\mathfrak{z}}^{-n-1})\Bigg], \end{aligned} \tag{40}$$

de unde

$$\lim \omega_{12} = -[(\varkappa+1)/2\mu]a_1'' \qquad \text{pentru } |\mathfrak{z}| \to \infty, \tag{41}$$

astfel că a treia relație (36) echivalează cu presupunerea că rotația la infinit este nulă.

Ținînd seama de (36) și (39) în expresiile (32), obținem deci

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\mathfrak{z}^{-n}, \qquad \psi(\mathfrak{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}\mathfrak{z}^{-n}, \tag{42}$$

ceea ce arată că înseși funcțiile φ și ψ sînt *olomorfe la infinit.*

Condiția $X = 0$, esențială în raționamentele ce au condus la (42), are un caracter paradoxal. Într-adevăr, din (38) se vede că dacă $X \neq 0$ (ceea ce, pentru un corp infinit, nu este incompatibil cu starea de echilibru), deplasarea la infinit este infinită, oricît de mic ar fi $|X|$. Asupra acestui paradox vom reveni în § 7.10.

Este ușor de înțeles intuitiv de ce componente *finite* ale tensiunii la infinit corespund unor deplasări *infinite* — așadar lipsite de sens mecanic.

În practică, componente ne-nule ale tensiunii ,,la infinit'' permit totuși să se descrie o stare de tensiune existentă într-un corp de mari dimensiuni, la distanțe mari de zona al cărei studiu ne interesează (de ex., concentrări de tensiuni în jurul unor orificii într-un corp solicitat pe frontieră, la mare distanță de aceste orificii). Calculul deplasărilor ,,la infinit'' e lipsit de sens. Dimpotrivă, calculul tensiunilor (singurul care prezintă interes din punctul de vedere al criteriilor de rezistență) este întotdeauna permis.

În cazul particular al domeniului nemărginit dublu conex $\mathscr{D}_1^-$, putem lua $\mathfrak{z}_1 = 0$, și atunci formulele (22) se scriu

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{z}) &= -\,[X/2\pi(\varkappa+1)]\ln\mathfrak{z} + \varphi_0(\mathfrak{z}),\\ \psi(\mathfrak{z}) &= [\varkappa\overline{X}/2\pi(\varkappa+1)]\ln\mathfrak{z} + \psi_0(\mathfrak{z}), \end{aligned} \tag{43}$$

unde funcțiile φ_0, ψ_0 sînt olomorfe în orice porțiune mărginită a planului, exterioară curbei $\mathscr{L}_1$. Dar aceste formule au același aspect cu (32), valabile în exteriorul cercului $\mathscr{L}_R$. Prin urmare, ele sînt valabile în întreg domeniul $\mathscr{D}_1^-$, funcțiile φ_0, ψ_0 fiind olomorfe atît în interiorul, cît și în exteriorul cercului $\mathscr{L}_R$ (eventual exceptînd punctul de la infinit).

d) Sarcini concentrate

Luînd $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ în (43), obținem

$$\varphi(\mathfrak{z}) = -\,[X/2\pi(\varkappa+1)]\ln\mathfrak{z}, \qquad \psi(\mathfrak{z}) = [\varkappa\overline{X}/2\pi(\varkappa+1)]\ln\mathfrak{z}. \tag{44}$$

Aceste funcții descriu deci starea planului acționat în origine de forța concentrată X. (Vezi și (8.19).) Amintim tot astfel că funcțiile din (8.17):

$$\varphi(\mathfrak{z}) = 0, \quad \psi(\mathfrak{z}) = (\mathrm{i}M_3/2\pi)\,\mathfrak{z}^{-1} \tag{45}$$

descriu starea planului acționat în origine de momentul concentrat M_3.

Pentru o sarcină concentrată ce acționează în punctul $\mathfrak{z}^0$, formulele de mai sus rămîn valabile dacă aducem originea în $\mathfrak{z}^0$. Revenind la axele

inițiale cu ajutorul formulelor (9.15), obținem pentru forța concentrată X aplicată în z^0:

$$\varphi(z) = -[X/2\pi(\varkappa+1)]\ln(z-z^0),$$
$$\psi(z) = [\varkappa\bar{X}/2\pi(\varkappa+1)]\ln(z-z^0) + [X/2\pi(\varkappa+1)]\bar{z}^0(z-z^0)^{-1}, \qquad (46)$$

respectiv pentru momentul concentrat M_3 aplicat în z^0:

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = (\mathrm{i}M_3/2\pi)(z-z^0)^{-1}. \qquad (47)$$

Introducînd (46) și (47) în (2), căpătăm

$$2\mu U = -\frac{\varkappa X}{2\pi(\varkappa+1)}\ln[(z-z^0)(\bar{z}-\bar{z}^0)] + \frac{\bar{X}}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{z-z^0}{\bar{z}-\bar{z}^0}, \qquad (48)$$

respectiv

$$2\mu U = (\mathrm{i}M_3/2\pi)(\bar{z}-\bar{z}^0)^{-1}. \qquad (49)$$

Ca și mai sus, remarcăm caracterul paradoxal al soluției (44) (sau (46)).

Considerînd că în fiecare punct $z^0 \in \mathscr{D}$ este aplicată o forță $X\,\mathrm{d}D_0$, putem construi prin suprapunere, (așadar prin integrarea relațiilor (46)), funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili corespunzătoare acțiunii unor *forțe de volum* de componente $X_k(x_1^0, x_2^0)$ $(k = 1, 2)$. Soluțiile astfel obținute dau valori corecte pentru tensiuni — dar nu și pentru deplasări. În felul acesta, dispunem efectiv în cazul plan de acea soluție particulară a ecuațiilor lui Lamé neomogene, a cărei cunoaștere permite reducerea problemei la studiul cazului $F = 0$. (Vezi și §§ 4.10, 7.9 și 7.10.)

§ 11. PROBLEMELE LA LIMITĂ FUNDAMENTALE ALE ELASTICITĂȚII PLANE

Problemele fundamentale ale elasticității plane se reduc la determinarea funcțiilor $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ din anumite condiții la limită, care se obțin transcriind valorile pe frontieră ale deplasărilor, respectiv ale tensiunilor, prin intermediul formulelor (7.12) și (7.19) (compară cu § 5.11).

Amintim (vezi § 4.2, ***d***, și finele § 4.10) că se caută numai soluții pentru care expresiile (7.12), (7.19) sînt prelungibile pe $\mathscr{L}$ — cel mult cu discontinuități de prima speță pentru datele în tensiuni. O condiție ***suficientă*** pentru aceasta este ca funcțiile $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi(z)$ — despre care am presupus deocamdată că sînt analitice în $\mathscr{D}$ — să fie și continue în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$. Aceste soluții se vor numi *soluții regulate*.

Ne rămîne să transcriem în mod corespunzător condițiile la limită (4.6), (4.7) și (4.9). Funcțiile *date* pe frontiera $\mathscr{L}$ pot fi privite ca funcții de afixul $t = z|_{\mathscr{L}}$, sau ca funcții de abscisa curbilinie s. Vom păstra *aceleași simboluri* pentru funcțiile ce apar în datele la limită, fie că le vom scrie ca funcții de z, $\bar{z}$ pe $\mathscr{L}$, ca funcții de t, sau ca funcții de s.

a) Problema lui Dirichlet

Întrucît pe $\mathscr{L}$ se dau deplasările, așadar o funcție $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$, funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili trebuie determinate din condiția la limită ce decurge din (7.12):

$$\varkappa\varphi(t) - t\,\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu g(t). \tag{1}$$

Întrucît primul membru din (1) este valoarea la limită a unei funcții analitice și uniforme în $\mathscr{D}$ și continue în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$, rezultă că și funcțiile $g(t)$ (sau $g(s)$) trebuie să fie continui și uniforme pe $\mathscr{L}$.

Faptul că dispunem de *o singură condiție* pentru determinarea a *două funcții* nu împiedică rezolvarea problemei (vezi § A.9, pag. 757). Împrejurarea că intervin ambele variabile z, $\bar{z}$ va juca din acest punct de vedere un rol esențial.

Putem dispune aici de o singură constantă complexă; dacă originea este situată în $\mathscr{D}$, putem deci lua arbitrar de exemplu $\varphi(0)=0$, *sau* $\psi(0)=0$.

Dacă $\mathscr{D}$ e simplu conex, avem $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0$, și problema se reduce la determinarea a două funcții *olomorfe* din condiția (1). Dacă $\mathscr{D}$ este mărginit și multiplu conex, funcțiile din (1) au forma (10.22). După calcule simple, obținem

$$\varkappa\varphi_0(t) - t\,\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = 2\mu g_0(t), \tag{2}$$

unde am notat

$$2\mu g_0(t) = 2\mu g(t) + [\varkappa/2\pi(\varkappa+1)]\sum_{j=1}^{m} X^{(j)} \ln|t - z_j|^2 -$$

$$- [1/2\pi(\varkappa+1)]\sum_{j=1}^{m} \overline{X^{(j)}}\,[t/(\bar{t} - \bar{z}_j)]. \tag{3}$$

Întrucît avem $z_j \in \mathscr{D}_j^+$, funcția $g_0(t)$ este de asemenea uniformă și continuă pe fiecare din componentele frontierei. Problema se reduce deci din nou la determinarea unor funcții olomorfe φ_0, ψ_0 din condiția (2), analogă cu (1).

Membrul al doilea din (2) depinde de constantele complexe $X^{(j)}$, necunoscute, dar nu arbitrare. Soluția poate fi căutată în funcție de $X^{(j)}$ ca parametri, aceștia fiind determinați ulterior în chiar cursul rezolvării problemei. (Vezi pag. 445, Observația 3). Aceasta este deci analogă problemei lui Dirichlet generalizate (pentru ecuația lui Laplace) din § 5.11, pag. 215.

Cazul domeniului nemărginit se tratează asemănător.

b) Problema lui Neumann

Întrucît acum se dau pe $\mathscr{L}$ valorile vectorului tensiune complex, așadar o funcție $f(\mathrm{t}) = f_1(\mathrm{t}) + \mathrm{i}f_2(\mathrm{t})$ (sau — în aceleași notații — o funcție de abscisa s), funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili trebuie determinate din condiția ce decurge din (7.19)

$$-\mathrm{i}[\varphi(\mathrm{t}) + \mathrm{t}\,\overline{\varphi'(\mathrm{t})} + \overline{\psi(\mathrm{t})}]_{,s} = f(s). \tag{4}$$

(Amintim că în (4), axele $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{s}$ sînt orientate la fel ca axele x_1, x_2.)

Fie deocamdată că domeniul $\mathscr{D}$ este mărginit și simplu conex. Integrînd în (4) în raport cu abscisa curbilinie s, căpătăm evident :

$$\varphi(\mathrm{t}) + \mathrm{t}\,\overline{\varphi'(\mathrm{t})} + \overline{\psi(\mathrm{t})} = \mathrm{i}\int_0^s f(s)\,\mathrm{d}s + C_0 \qquad \text{pe } \mathscr{L}_0, \tag{5}$$

unde C_0 este o constantă complexă necunoscută, dar nu arbitrară.

Folosind notația (8.1), vom scrie pe viitor

$$h(\mathrm{t}) \equiv h(s) = \mathrm{i}\int_0^s f(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{i}R(s). \tag{6}$$

Ca și în problema lui Dirichlet, $h(s)$ rezultă a fi continuă pe $\mathscr{L}$ pentru orice funcție integrabilă $f(s)$ — chiar dacă aceasta posedă discontinuități de prima speță.

Funcțiile $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$ sînt în acest caz determinate, abstracție făcînd de termeni de forma (9.4). Prin urmare, primul membru din (5) e dat abstracție făcînd de o constantă $\gamma + \bar{\gamma}'$. Dacă determinăm pe deplin funcțiile căutate, fixînd deci valorile constantelor γ, γ', C, atunci constanta C_0 din (5) rezultă determinată. Dacă, dimpotrivă, fixăm pe C_0 (de ex. $C_0 = 0$), atunci numai una dintre constantele γ, γ' mai poate fi aleasă arbitrar.

Să presupunem acum că domeniul $\mathscr{D}$ este mărginit și multiplu conex. În acest caz, condiția (5) rămîne valabilă pe componenta $\mathscr{L}_0$ a frontierei. Pe componentele interioare $\mathscr{L}_j$ însă, membrul al doilea al condiției la limită își schimbă semnul, întrucît normala externă la $\mathscr{D}$ și tangenta $\boldsymbol{s}$ formează un sistem de axe orientat invers sistemului Ox_1x_2. Prin integrare, căpătăm deci

$$\varphi(\mathrm{t}) + \mathrm{t}\,\overline{\varphi'(\mathrm{t})} + \overline{\psi(\mathrm{t})} = h^{(j)}(\mathrm{t}) + C_j, \qquad \mathrm{t} \in \mathscr{L}_j, \tag{7}$$

unde

$$h^{(j)}(\mathrm{t}) \equiv h^{(j)}(s) = \begin{cases} \mathrm{i}\displaystyle\int_0^s f(s)\,\mathrm{d}s, & \mathrm{t} \in \mathscr{L}_0, \\ -\mathrm{i}\displaystyle\int_0^s f(s)\,\mathrm{d}s, & \mathrm{t} \in \mathscr{L}_j,\ \ j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \tag{8}$$

După cum se vede, notăm — dacă e cazul să distingem — cu indicele superior „j" datele de pe componenta $\mathscr{L}_j$, şi folosim — printr-un abuz ce nu riscă să producă nici un fel de confuzie — aceeaşi notaţie h atît pentru funcţia de punctul $t \in \mathscr{L}$, cît şi pentru funcţia de abscisa s corespunzătoare acestui punct. În (8), *toate componentele frontierei sînt parcurse în sensul trigonometric*. Dacă dorim să conservăm definiţia din (6), trebuie ca pe componentele interioare $\mathscr{L}_j$ să adoptăm sensul retrograd.

Chestiunea determinării constantelor complexe C_j — necunoscute, dar nu arbitrare — este similară celei a determinării constantelor $X^{(j)}$ în problema lui Dirichlet.

Ca şi în cazul domeniului simplu conex, una din constantele C_j poate fi aleasă arbitrar (de ex. $C_0 = 0$), astfel că numai una dintre constantele γ, γ' mai rămîne la dispoziţia noastră. În genere, este totuşi preferabil să dispunem liber de constantele γ, γ', C — constantele C_j (în fond ne-necesare) putînd fi determinate în cursul rezolvării problemei.

Funcţia definită în (8) e în general *multiformă*. Într-adevăr, din (10.16), (6) şi (8) obţinem (sensul de integrare fiind cel trigonometric)

$$[h]_{\mathscr{L}_0} = \mathrm{i} \oint_{\mathscr{L}_0} f(s)\, \mathrm{d}s = \mathrm{i}X^{(0)}, \qquad [h]_{\mathscr{L}_j} = -\mathrm{i} \oint_{\mathscr{L}_j} f(s)\, \mathrm{d}s = -\mathrm{i}X^{(j)}. \tag{9}$$

Ca şi în problema lui Dirichlet, condiţia (5) conţine funcţii necunoscute olomorfe, în timp ce în (7) apar funcţii necunoscute multiforme. Dar introducînd expresiile (10.22) în (7), obţinem

$$\varphi_0(t) + t\,\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = h_0(t) + C_j, \quad t \in \mathscr{L}_j, \tag{10}$$

unde am notat

$$h_0(t) = h(t) + [1/2\pi(\varkappa+1)] \sum_{j=1}^{m} X^{(j)} [\ln(t - \mathfrak{z}_j) - \varkappa \ln(\bar{t} - \bar{\mathfrak{z}}_j)] +$$
$$+ [1/2\pi(\varkappa+1)] \sum_{j=1}^{m} \overline{X^{(j)}} [t/(\bar{t} - \bar{\mathfrak{z}}_j)]. \tag{11}$$

(Indicele de numerotare pentru funcţiile $h(t)$ şi $h_0(t)$ a fost aci omis.)

Funcţiile din membrul al doilea din (11) sînt continue, iar $h_0(t)$ rezultă a fi uniformă : într-adevăr, după o parcurgere a conturului $\mathscr{L}_j$ în sens trigonometric (pentru $j \geqslant 1$, lăsînd domeniul $\mathscr{D}$ *în dreapta*), termenii în $X^{(j)}$ capătă creşteri egale cu

$$[X^{(j)}/2\pi(\varkappa+1)]\,[2\pi\mathrm{i} - \varkappa(-2\pi\mathrm{i})] = \mathrm{i}X^{(j)} = -[h(t)]_{\mathscr{L}_j}. \tag{12}$$

Spre deosebire de cazul problemei lui Dirichlet, din datele problemei se pot calcula acum rezultantele $X^{(j)}$. Funcţia $h(t)$ trebuie să posede desigur şi proprietăţi care să asigure echilibrul domeniului $\mathscr{D}$, aşadar decurgînd

din condiția ca sistemul forțelor exterioare să fie echivalent cu zero. Din (10.17) și (9) rezultă mai întîi condiția

$$[h(t)]_{\mathscr{L}_0} - \sum_{j=1}^{m} [h(t)]_{\mathscr{L}_j} = 0, \tag{13}$$

unde toate componentele frontierei sînt parcurse în sens direct.

Pentru momentul rezultant, deducem din (10.17) și (8.2) condiția

$$\mathscr{M}_3 = \mathscr{M}_3\Big|_{\mathscr{L}_0} - \sum_{j=1}^{m} \mathscr{M}_3\Big|_{\mathscr{L}_j} = \operatorname{Re}\oint_{\mathscr{L}} \mathrm{i}\, t(s)\, \overline{f(s)}\, \mathrm{d}s = 0. \tag{14}$$

Dar, întrucît din (8) urmează

$$\mathrm{d}h(s) = \begin{cases} \mathrm{i}\, f(s)\, \mathrm{d}s & \text{pe } \mathscr{L}_0, \\ -\mathrm{i}\, f(s)\, \mathrm{d}s & \text{pe } \mathscr{L}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{15}$$

deducem că (14) ia forma

$$\mathscr{M}_3 = -\operatorname{Re}\oint_{\mathscr{L}} t(s)\, \mathrm{d}\overline{h(s)} = 0, \tag{16}$$

unde — spre deosebire de (14) — componentele interioare ale frontierei sînt parcurse tot în sens direct.

Funcția $h(s)$ fiind cunoscută pe $\mathscr{L}$, cantitățile ce intervin în (13) și (16) se calculează ușor.

Integrînd prin părți în (16), obținem și

$$\mathscr{M}_3 = -\operatorname{Re}\left\{[t\, \overline{h(t)}]_{\mathscr{L}} - \oint_{\mathscr{L}} \overline{h(t)}\, \mathrm{d}t\right\} = 0. \tag{17}$$

Dacă $h(s)$ este uniformă pe fiecare din componentele frontierei (așadar dacă $X^{(j)} = 0$), primul termen din (17) se anulează pe fiecare $\mathscr{L}_j$, și ne rămîne

$$\mathscr{M}_3 = \operatorname{Re}\oint_{\mathscr{L}} \overline{h(t)}\, \mathrm{d}t = 0. \tag{18}$$

În particular, formula este valabilă pentru $\mathscr{D}$ simplu conex și mărginit.

c) Problema mixtă

Condiția la limită se obține scriind condițiile (1), respectiv (7), fiecare pe porțiunile corespunzătoare ale frontierei. Dificultățile în rezolvarea ei sînt considerabil mai mari.

d) *Exemplu*

Reproducem aci un exemplu elementar, util în cele ce urmează: soluția problemei lui Neumann pentru corpul solicitat pe frontieră de o presiune hidrostatică $-p$. Din (3.4.13) avem $\sigma_{ni} = -p\, n_i$. Ținînd seama de (A.3.12) și (A.4.22), căpătăm

$$f(s) = \sigma_{n1} + i\sigma_{n2} = -p\;[x_2'(s) - ix_1'(s)] = ip\,\mathfrak{t}'(s). \tag{19}$$

Păstrînd pe toate componentele frontierei sensul ce lasă în stînga interiorul domeniului, deducem deci din (6) sau (8):

$$h(s) = -p\,\mathfrak{t}(s). \tag{20}$$

Alegînd

$$\varphi(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{2}\,p\,\mathfrak{z}, \qquad \psi(\mathfrak{z}) = 0, \tag{21}$$

rezultă că (7) este satisfăcută pe oricare componentă a frontierei (cu $C_j = 0$).

e) *Concluzii*

Cele de mai sus pun în evidență unul din meritele principale ale acestei metode: condițiile la limită (1) și (7) sînt de același tip, așadar *problema lui Dirichlet și cea a lui Neumann se reduc la una și aceeași problemă la limită a teoriei funcțiilor de o variabilă complexă.*

Chestiunea condițiilor de existență a soluției acestei probleme depășește cadrul cărții de față. (Anumite cazuri particulare vor fi examinate în §§ 14 și 21.) Indicăm numai că ea se reduce în ultimă instanță la studiul unor ecuații Fredholm. Pentru rezultatele fundamentale în acest sens, vezi N. Mushelișvili [5], §§ 96–103. Vezi de asemenea mai jos indicațiile din §§ 20 și 23–25. În cele ce urmează, vom presupune întotdeauna că existența și regularitatea soluției sînt asigurate.

În ce privește *natura* soluției, să remarcăm că, *dacă* ecuațiile omogene au soluție de clasă convenabilă, atunci reprezentarea (10.1)–(10.2) este obligatorie, și componentele stării elastice sînt *funcții analitice* de x_1, x_2. Metoda lui Kolosov și Mushelișvili asigură deci numai găsirea soluțiilor *analitice* și *regulate*; iar astfel de soluții există, dacă există soluția (analitică și regulată) a problemelor (1) sau (7).

Chestiunea existenței soluțiilor conduce la a ne întreba: ce proprietăți trebuie să posede frontiera $\mathscr{L}$ și funcțiile $g(s)$ sau $f(s)$, pentru ca problema (1) sau (7) să admită soluție (subînțeles: analitică și regulată)? În absența acestor proprietăți, reprezentarea (10.1)–(10.2) nu are sens, și componentele stării elastice pot să nu fie analitice. (Desigur, dacă condițiile suficiente de existență ale soluțiilor problemelor (1) sau (7) nu sînt satisfăcute, aceasta nu înseamnă că ecuațiile elasticității plane nu au soluție, ci, cel mult, că ele nu au soluție *analitică*.)

Pentru găsirea acestor soluții pentru domenii cu curbe frontieră, sau cu date la limită insuficient de regulate, vezi bibliografia indicată de D. Șerman [8]; I. Vekua și N. Mushelișvili [1]. Menționăm aci rezultatele lui S. Belonosov [2] (cap. 2 și 4) și [3], și ale lui L. Magnaradze (citate în bibliografie la N. Mushelișvili [5]).

Importanța practică a soluțiilor ne-analitice pare totuși mai mică decît dificultățile matematice ce stau în calea obținerii lor. În practică, iregularitățile curbelor-frontieră sau ale datelor la limită pot fi adesea privite drept cazuri-limită de variație rapidă, dar totuși regulată, a datelor geometrice sau mecanice; soluțiile pot fi căpătate atunci ca soluții aproximative sau cazuri-limită din soluțiile analitice ale problemei convenabil regularizate. (Vezi de ex. § 16, exemplul ***b***).

Pentru o manieră mai abstractă de a formula aceleași probleme la limită (1) sau (7), vezi C. Mathurin [1], [2].

Pentru un procedeu variațional de abordare a lor, vezi J. Radok [3].

Problemele (1) sau (7) constituie formularea matematică a unor probleme de echilibru în corpuri de tipul celor examinate în capitolul 5: în primul rînd, cilindri suficient de lungi. Dar spre deosebire de condiția (5.11.1), cu caracter în esență *geometric* (întrucît datele mecanice intervin numai ca parametri), condițiile (1), (7) determină funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili din datele atît *geometrice*, cît și *mecanice* pe suprafața laterală a cilindrului considerat.

În problema plană, repartiția reală de forțe nu poate fi înlocuită cu una mai simplă, oarecum echivalentă ei, — pentru că forțele acționează *pe conturul* secțiunii, de dimensiuni liniare comparabile între ele ca ordin de mărime. De aci și obligația de a ține seama de repartiția reală, bidimensională, a datelor mecanice, odată cu forma reală a secțiunii. Asemenea probleme nu pot fi abordate nici măcar aproximativ cu mijloacele rezistenței materialelor.

Simplificările importante la care conduce principiul lui Saint-Venant nu își au echivalentul nemijlocit în problema plană. Într-adevăr, a modifica sarcina chiar pe o porțiune mică a frontierei $\mathscr{L}$, revine în fapt la a o modifica în lungul întregului cilindru. În aceste condiții, însăși ideea care stă la baza principiului este în defect. (Compară cu §§ 7.1 și 7.10).

Există lucrări recente care analizează anumite soluții ale problemei plane din punctul de vedere al justificării principiului lui Saint-Venant (vezi de ex. S. Belonosov [2], cap. 4), și dau exemple atît în favoarea, cît și în defavoarea posibilității de a-l aplica. Vezi încă și J. Knowles [1].

§ 12. FORMULAREA PROBLEMELOR FUNDAMENTALE ALE TEORIEI ÎNCOVOIERII PLĂCILOR SUBȚIRI

Întreg aparatul teoretic al problemei plane poate fi adaptat la studiul încovoierii plăcilor. Problema a fost cercetată (cu utilizare predominantă de mărimi reale într-o primă fază a raționamentelor) de către G. Savin [1], § 6.1, și (folosindu-se sistematic reprezentarea în complex, și pentru o gamă mai largă de condiții la limită) de A. Green și W. Zerna [1],

capitolul 7. Pentru ecuaţiile de ordin superior ale teoriei încovoierii, V. Manea [3], [7] a dat o analiză similară, care conduce — desigur — la condiţii la limită mai puţin simple.

Vom examina aci formularea problemelor fundamentale ale teoriei încovoierii, la început pentru ecuaţiile de ordin superior, apoi (pentru raţiuni de simplicitate şi paralelism cu teoria stării plane) pentru ecuaţiile clasice. Ne vom limita la cazul ecuaţiilor omogene.

a) *Reprezentarea soluţiei prin două funcţii complexe şi o funcţie reală*

Pentru a simplifica notaţiile, vom scrie

$$W = u_1' + iu_2', \quad w = \bar{w}, \quad \Xi = \theta', \tag{1}$$

unde, amintim, $\bar{w}$ era în § 3 *media* pe grosime a deplasării normale. Dimpotrivă, în tot paragraful de faţă bara dispusă deasupra unei litere va indica *mărimea complex conjugată.*

Cu ajutorul unei tehnici de repetate ori folosite, ecuaţiile (3.73) omogene se scriu sub forma complexă

$$\frac{1}{3} h^2 [\mu \Delta W + (\lambda^* + \mu)\, 2\, \Xi_{,\bar{\mathfrak{z}}}] - \mu (W + 2w_{,\bar{\mathfrak{z}}}) = 0, \tag{2}$$

$$\Delta w + \Xi = 0, \tag{3}$$

iar ecuaţiile (3.80), (3.81) devin

$$\Delta\, \Xi = 0, \tag{4}$$

$$\Delta\Delta\, w = 0. \tag{5}$$

În conformitate cu teorema lui Goursat (vezi (7.23)), deducem

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [\mathfrak{z}\, \overline{\varphi(\mathfrak{z})} + \bar{\mathfrak{z}}\, \varphi(\mathfrak{z}) + \chi(\mathfrak{z}) + \overline{\chi(\mathfrak{z})}], \tag{6}$$

unde $\varphi(\mathfrak{z})$, $\chi(\mathfrak{z})$ sînt funcţii analitice de o variabilă complexă $\mathfrak{z}$ în planul median $\mathscr{D}$ al plăcii. Ţinînd seama de (6) în (3), deducem

$$\Xi = -2(\varphi' + \overline{\varphi'}); \tag{7}$$

după calculele elementare, ecuaţia (2) devine (notînd $\chi' = \psi$):

$$\frac{4}{3} h^2 W_{,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} - W = \frac{4}{3} h^2 [(1+\nu)/(1-\nu)] \overline{\varphi''} + \varphi + \mathfrak{z}\, \overline{\varphi'} + \bar{\psi}. \tag{8}$$

Vom căuta soluţia acestei ecuaţii sub forma

$$W = W_0 - \varphi - \mathfrak{z}\, \overline{\varphi'} - \bar{\psi}, \tag{9}$$

ceea ce conduce pentru W_0 la ecuaţia

$$\frac{4}{3} h^2 W_{0,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} - W_0 = \frac{8}{3} h^2 (1-\nu)^{-1} \overline{\varphi''}. \tag{10}$$

În fine, soluţia acestei ultime ecuaţii va fi căutată sub forma

$$W_0 = V + \overline{a(\mathfrak{z})}, \tag{11}$$

ceea ce conduce imediat la concluzia că

$$a(\mathfrak{z}) = -\frac{8}{3} h^2 (1-\nu)^{-1} \varphi''(\mathfrak{z}), \tag{12}$$

iar funcţia V este soluţia ecuaţiei de tip Helmholtz

$$\frac{4}{3} h^2 V_{,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} - V = 0. \tag{13}$$

Prin urmare, ecuaţiile (2), (3) admit o soluţie de forma

$$W = V - \varphi - \mathfrak{z}\overline{\varphi'} - \bar{\psi} - \frac{8}{3} h^2 (1-\nu)^{-1} \overline{\varphi''}, \quad w = \frac{1}{2} (\mathfrak{z}\bar{\varphi} + \bar{\mathfrak{z}}\varphi + \chi + \bar{\chi}), \tag{14}$$

aşadar o reprezentare prin intermediul a două funcţii analitice de o variabilă complexă, şi al unei funcţii reale, soluţie a ecuaţiei (13). Întrucît h este mic, ecuaţia (13) arată că în general derivatele acestei din urmă funcţii *nu sînt neglijabile* în raport cu însăşi funcţia.

Să trecem acum la transcrierea momentelor şi forţelor tăietoare din (3.72) (problema omogenă) prin intermediul mărimilor W, w. În acest scop, prin analogie cu formulele (6.17) şi (5.4.5), să introducem cantităţile complexe

$$N_0 = N_{11} + N_{22}, \quad N = N_{22} - N_{11} + 2\mathrm{i} N_{12}, \quad S_3 = S_{31} + \mathrm{i} S_{32}. \tag{15}$$

Făcînd uz aci de formulele (3.72), (1) şi (A.4.13), obţinem mai întîi

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{4}{3} h^3 (\lambda^* + \mu)\, \Xi, \\ N &= \frac{2}{3} h^3 [2\mu (u'_{2,2} - u'_{1,1}) + 2\mathrm{i}\mu (u'_{1,2} + u'_{2,1})] = -\frac{8}{3} h^3 \mu \overline{W}_{,\mathfrak{z}}, \\ S_3 &= 2h\mu (W + 2w_{,\bar{\mathfrak{z}}}), \end{aligned} \tag{16}$$

și mai departe, introducînd aci expresiile (14):

$$\begin{aligned} N_0 &= -\frac{8}{3} h^3 (\lambda^* + \mu)(\varphi' + \overline{\varphi'}), \\ N &= \frac{8}{3} h^3 \mu \,[\bar{z}\, \varphi'' + \psi' + \frac{8}{3} h^2 (1-\nu)^{-1} \varphi''' - V_{,z}], \\ S_3 &= 2h\,\mu\,[V - \frac{8}{3} h^2 (1-\nu)^{-1} \overline{\varphi''}]. \end{aligned} \tag{17}$$

Amintind valoarea rigidității la încovoiere din (3.78)

$$D = \frac{2}{3} h^3 (\lambda^* + 2\mu) = \frac{2}{3} h^3 E/(1-\nu^2) = \frac{4}{3} h^3 \mu (1-\nu), \tag{18}$$

și ținînd seama de relațiile evidente

$$\begin{aligned} &\frac{8}{3} h^3 (\lambda^* + \mu) = \frac{8}{3} h^3 \mu\,[(1+\nu)/(1-\nu)] = 2D(1+\nu), \\ &\frac{8}{3} h^3 \mu = 2D(1-\nu), \quad \frac{16}{3} h^3 \mu/(1-\nu) = 4D, \end{aligned} \tag{19}$$

vom transcrie (17) sub forma definitivă (compară cu (7.8)):

$$\begin{aligned} N_0 &= -2D(1+\nu)\,[\varphi' + \overline{\varphi'}], \\ N &= 2D(1-\nu)\left[\bar{z}\,\varphi'' + \psi' + \frac{8}{3} h^2 (1-\nu)^{-1} \varphi''' - V_{,z}\right], \\ S_3 &= -4D\left[\overline{\varphi''} - \frac{3}{8}(1-\nu) h^{-2} V\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Cunoașterea valorilor la limită ale deplasării normale w și ale componentelor u_i' — așadar a lui w — permite transcrierea condițiilor de tip Dirichlet din (3.55) sub forma unor condiții la limită pentru φ, ψ și V. Cunoașterea valorilor la limită ale momentului încovoietor, momentului de torsiune, și forței tăietoare, conduce la transcrierea condițiilor de tip Neumann din (3.74) sub forma unor condiții la limită pentru aceleași funcții de mai sus.

b) Varianta clasică: reprezentarea soluției prin două funcții complexe

Ne vom limita în cele ce urmează la cazul particular al teoriei clasice, cînd aceste condiții capătă un aspect analog celor din teoria problemei plane. În acest caz, din (3.87), (1) și (6), avem mai întîi

$$W = -2\,w_{,\bar{z}} = -(\varphi + z\,\overline{\varphi'} + \bar{\psi}). \tag{21}$$

Prima formulă (20) — care e independentă de V — rămîne intactă. A doua formulă (20) este înlocuită cu (16), în care se introduce (21) — așadar ea se modifică prin dispariția termenilor în φ''' și V. În fine, a treia formulă (20) își pierde sensul, după cum se vede introducînd (21) în a treia formulă (16). Pentru a obține acum forța tăietoare complexă S_3, putem face uz de (3.91), care devine

$$S_3 = -2D\,\Delta\, w_{,\bar{\mathfrak{z}}}. \tag{22}$$

Ținînd seama și de (6), formulele (20) sînt deci înlocuite prin

$$N_0 = -2D(1+\nu)\,(\varphi' + \bar{\varphi}'),\ N = 2D(1-\nu)\,(\bar{\mathfrak{z}}\,\varphi'' + \psi'),\ S_3 = -4D\bar{\varphi}''. \tag{23}$$

Prin urmare, funcția V dispare cu totul din considerațiile noastre, și componentele stării elastice sînt exprimate prin intermediul celor două funcții de tip Kolosov-Mushelișvili $\varphi(\mathfrak{z})$ și $\psi(\mathfrak{z})$.

Pentru a transcrie condițiile la limită, trebuie să revenim la datele din (3.93) și (3.95). În acest scop, din (6) și (A.4.26) deducem imediat

$$w_{,s} = \operatorname{Re}\,[(\bar{\varphi} + \bar{\mathfrak{z}}\,\varphi' + \psi)\,\mathfrak{z}'(s)], \tag{24}$$

$$w_{,n} = \operatorname{Im}\,[(\bar{\varphi} + \bar{\mathfrak{z}}\,\varphi' + \psi)\,\mathfrak{z}'(s)]. \tag{25}$$

Mai departe, din (3.16) obținem (întrucît $u_i^0 = 0$, și ținînd seama de (1) și (6)):

$$U = u_1 + iu_2 = -2zw_{,\bar{\mathfrak{z}}} = -z(\varphi + \mathfrak{z}\bar{\varphi}' + \bar{\psi}), \tag{26}$$

astfel că deplasarea este cunoscută, în aproximația acceptată.

Pentru a scrie condițiile la limită de tip Neumann, vom observa că în cazul unei rotații de axe de un unghi ϑ avem:

$$\mathfrak{z} = [\exp\,(i\vartheta)]\,\mathfrak{z}^1; \tag{27}$$

componentele σ_{ik} ale tensiunii ($i, k = 1, 2$) se transformă (chiar dacă nu este vorba de o stare de tensiune plană: amintim că $n_{13} = n_{23} = 0$) conform formulelor ce rezultă din (9.16) și (9.20). Prin înmulțire cu z și integrare în raport cu z, se obțin formulele corespunzătoare pentru momentele N_{ik}, care conduc evident la relațiile

$$N_0^1 = N_0,\quad N^1 = [\exp\,(2i\vartheta)]\,N. \tag{28}$$

Forța tăietoare complexă este un vector pentru care deducem din (5.11.14)

$$S_3^1 = [\exp\,(-i\vartheta)]\,S_3. \tag{29}$$

Vom examina în cele ce urmează o problemă pe care o vom numi din nou „problema lui Dirichlet" (cu date de tip (3.93)) și o „problemă a lui Neumann" (cu date de tip (3.95)). Pentru alte condiții la limită, vezi mai departe pp. 428–429.

c) Problema lui Dirichlet

Din (24), (25) urmează evident, pe orice curbă $\mathscr{C}$ din $\mathscr{D} + \mathscr{L}$:

$$(\overline{\varphi} + \overline{\mathfrak{z}}\,\varphi' + \psi)\,\mathfrak{z}'(s) = w_{,s} + \mathrm{i}w_{,n} \tag{30}$$

Notînd — ca şi în (A.3.12) — cu $\hat{\vartheta}$ unghiul format de axele locale $(x_1, \boldsymbol{n})$ (în sensul de la x_1 la $\boldsymbol{n}$), putem face uz de formula (A.4.21) :

$$\mathfrak{z}'(s) = \mathrm{i}\ \exp\,(\mathrm{i}\hat{\vartheta}), \quad \exp\,(\mathrm{i}\hat{\vartheta}) = -\,\mathrm{i}\mathfrak{z}'(s). \tag{31}$$

Introducînd (31) în (30), obţinem imediat condiţia la limită

$$\varphi(\mathrm{t}) + \mathrm{t}\,\overline{\varphi'(\mathrm{t})} + \overline{\psi(\mathrm{t})} = -\,\mathrm{i}(w_{,n} + \mathrm{i}w_{,s})\,\mathrm{t}'(s), \tag{32}$$

unde membrul al doilea este cunoscut.

d) Problema lui Neumann

A doua condiţie (3.95) conţine derivata $N_{ns,s}$. Este de preferat să integrăm această condiţie în raport cu s ; din (3.95) şi (3.94) urmează atunci

$$N_{nn} = N_{nn}(s), \quad \int_0^s S_{n3}\,\mathrm{d}s + N_{ns} = \int_0^s N_{n3}(s)\,\mathrm{d}s + C \text{ pe } \mathscr{L}, \tag{33}$$

(C — o constantă reală necunoscută). Aci este evident necesar să trecem mai întîi în fiecare punct de pe $\mathscr{L}$ la axele locale $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$, ceea ce se realizează printr-o rotaţie de un unghi $\hat{\vartheta}$ cunoscut (vezi (31)). Aceasta conduce la a înlocui mărimile din (15) prin

$$\mathsf{N}_0^1 = N_{nn} + N_{ss}, \quad \mathsf{N}^1 = N_{ss} - N_{nn} + 2\mathrm{i}\,N_{ns}, \quad \mathsf{S}_3^1 = S_{n3} + \mathrm{i}S_{s3}. \tag{34}$$

Formulele (6.12) dau imediat

$$N_{nn} = \frac{1}{2}\mathsf{N}_0^1 - \frac{1}{4}(\mathsf{N}^1 + \overline{\mathsf{N}^1}), \quad N_{ss} = \frac{1}{2}\mathsf{N}_0^1 + \frac{1}{4}(\mathsf{N}^1 + \overline{\mathsf{N}^1}),$$
$$N_{ns} = -\frac{1}{4}\mathrm{i}(\mathsf{N}^1 - \overline{\mathsf{N}^1}). \tag{35}$$

Tot astfel, din a treia relaţie (34) avem în axele $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$

$$S_{n3} = \mathrm{Re}\ \mathsf{S}_3^1, \quad S_{s3} = \mathrm{Im}\ \mathsf{S}_3^1. \tag{36}$$

Introducînd în prima relaţie (36) egalitatea (29) şi făcînd uz de reprezentarea (23) şi de (31), căpătăm pe rînd

$$S_{n3} = \mathrm{Re}\,[\exp\,(-\,\mathrm{i}\hat{\vartheta})\,\mathsf{S}_3] = -\,4D\,\mathrm{Re}\,[\exp\,(-\,\mathrm{i}\hat{\vartheta})\overline{\varphi''}] =$$
$$= 2\mathrm{i}\,D[\,\varphi''\mathfrak{z}'(s) - \overline{\varphi''\,\mathfrak{z}'(s)}\,], \tag{37}$$

astfel că termenul integral din (33) devine

$$\int_0^s S_{n3}\, ds = 2iD(\varphi' - \bar{\varphi}'). \tag{38}$$

În ce privește componentele momentului, să înlocuim mai întîi primele două formule (23) în (28), ceea ce dă

$$\begin{aligned} N_0^1 = N_0 &= -2D(1+\nu)(\varphi' + \bar{\varphi}'),\\ N^1 = \exp(2i\hat{\vartheta})\, N &= 2D(1-\nu)\exp(2i\hat{\vartheta})(\bar{\mathfrak{z}}\varphi'' + \psi'). \end{aligned} \tag{39}$$

Din (35) și (38) obținem acum

$$\begin{aligned} N_{nn} = &- D(1+\nu)(\varphi' + \bar{\varphi}') - \frac{1}{2} D(1-\nu)\, [\exp(2i\,\hat{\vartheta})(\bar{\mathfrak{z}}\varphi'' + \psi') +\\ &+ \exp(-2i\,\hat{\vartheta})(\mathfrak{z}\overline{\varphi''} + \bar{\psi}')],\\ \int_0^s S_{n3}\, ds + N_{ns} = &\, 2i\, D(\varphi' - \bar{\varphi}') - \frac{1}{2} D(1-\nu)\, [i\exp(2i\,\hat{\vartheta})(\bar{\mathfrak{z}}\varphi'' + \psi') -\\ &- i\exp(-2i\,\hat{\vartheta})(\mathfrak{z}\overline{\varphi''} + \bar{\psi}')]. \end{aligned} \tag{40}$$

Aspectul membrului al doilea din formulele (40) sugerează să le simplificăm, înmulțind-o pe cea de-a doua cu i și adunînd-o la cea dintîi. Căpătăm astfel

$$\begin{aligned} N_{nn} + i\left[N_{ns} + \int_0^s S_{n3}\, ds\right] = &- D[(3+\nu)\varphi' - (1-\nu)\overline{\varphi'}] -\\ &- D(1-\nu)\exp(-2i\,\hat{\vartheta})(\mathfrak{z}\overline{\varphi''} + \overline{\psi'}). \end{aligned} \tag{41}$$

Ținînd încă seama de (31), să înmulțim această egalitate cu $\exp(i\hat{\vartheta})\, ds = -i\, d\mathfrak{z}$ și să integrăm în raport cu arcul s. Obținem atunci

$$\int_0^s \left[N_{nn} + i\left(N_{ns} + \int_0^s S_{n3}\, ds\right)\right]\exp(i\hat{\vartheta})\, ds =$$

$$= iD\left[(3+\nu)\int \varphi' d\mathfrak{z} - (1-\nu)\int \overline{\varphi'}\, d\mathfrak{z}\right] - iD(1-\nu)\int(\mathfrak{z}\overline{\varphi''} + \overline{\psi'})\, d\bar{\mathfrak{z}}, \tag{42}$$

unde pe orice drum de integrare avem evident

$$\int \overline{\varphi'}\,\mathrm{d}\mathfrak{z} + (\mathfrak{z}\overline{\varphi''} + \overline{\psi'})\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \int \mathrm{d}\,(\mathfrak{z}\overline{\varphi'} + \bar{\psi}) = \mathfrak{z}\overline{\varphi'} + \bar{\psi}. \tag{43}$$

Introducînd acum (42) şi (43) în condiţia la limită (33) scrisă şi ea sub forma complexă ce rezultă din raţionamentele de mai sus (vezi trecerea de la (40) la (42)), şi integrînd pe frontieră, căpătăm

$$-\,\mathrm{i}\int_0^s \left[N_{nn}(s) + \mathrm{i}\int_0^s N_{n3}(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t + Ct + \gamma =$$

$$= \mathrm{i}D\,[(3+\nu)\,\varphi - (1-\nu)\,(\mathrm{t}\overline{\varphi'} + \bar{\psi})]; \tag{44}$$

notînd (vezi (7.13))

$$\varkappa = (3+\nu)/(1-\nu), \tag{45}$$

deducem în definitiv condiţia la limită sub forma

$$\varkappa\varphi(\mathrm{t}) - \mathrm{t}\overline{\varphi'(\mathrm{t})} - \overline{\psi(\mathrm{t})} = -\frac{1}{D(1-\nu)}\left\{\int_0^s \left[N_{nn}(s) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \,\mathrm{i}\int_0^s N_{n3}(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t + \mathrm{i}(Ct + \gamma)\right\}, \tag{46}$$

unde $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t(s)$, şi membrul al doilea este cunoscut, abstracţie făcînd de C şi γ.

e) Concluzii

Condiţia (32) privitoare la deplasări este de acelaşi tip cu condiţia (11.5) pentru cazul datelor lui Neumann, în timp ce condiţia (46) referitoare la tensiuni este de acelaşi tip cu condiţia (11.1) pentru cazul datelor lui Dirichlet.

Orice soluţie a unei probleme plane poate fi deci nemijlocit transpusă în studiul problemei încovoierii, cu unele deosebiri de detaliu legate de apariţia constantelor necunoscute şi de gradul de arbitrar al funcţiilor lui Kolosov şi Mushelişvili. Acest fapt constituie încă unul din avantajele metodei bazate pe utilizarea potenţialilor complecşi.

Ca şi în cazul problemei plane, dificultăţile devin considerabile cînd se trece la studiul problemei mixte. Mai mult încă, în teoria încovoierii plăcilor, practica impune condiţii la limită de o mare diversitate, şi adesea mult mai complicate decît cele ce rezultă din (3.93), (3.95), sau din problema mixtă fundamentală definită prin intermediul lor.

Astfel, de pildă, dacă placa este *rezemată* pe $\mathscr{L}$, deplasarea w şi momentul N_{nn} trebuie să se anuleze la limită. (A doua condiţie arată că marginea plăcii se roteşte liber pe reazimul ei.) Dacă placa este *încastrată*, atunci deplasarea w şi derivata ei normală $w_{,n}$ se anulează

la limită. (A doua condiție arată că planul tangent la suprafața mediană își păstrează pe $\mathcal{L}$ poziția sa inițială.) Dacă pe o porțiune din $\mathcal{L}$ marginea este *liberă*, atunci atît momentul N_{nn} cît și forța tăietoare generalizată N_{n3} sînt aci nule (întrucît nu se exercită nici un fel de acțiune mecanică).

Unele din aceste condiții au caracter static, altele au caracter geometric, iar condiția de rezemare are un caracter mixt, de un tip similar celui din a patra problemă fundamentală.

În afară de aceasta, în practică este frecvent cazul plăcilor supuse la condiții diferite pe diferite porțiuni ale frontierei — de exemplu, rezemate pe o parte a acesteia și încastrate în rest, sau încastrate pe o parte și libere în rest etc.

Asupra teoriei încovoierii plăcilor există o extrem de vastă literatură. Printre articolele de analiză de consultat, vezi G. Djanelidze [1]; J. Geckeler [1], capitolul 7; J. Goodier [4], § 7; B. Korenev [2]; Iu. Rabotnov [1]; D. Șerman [8], § 3.3.

Pentru teoria clasică a problemei, precum și pentru numeroase soluții efective, vezi lucrările lui B. Galerkin [2], volumul 2, și S. Timoshenko [1]; vezi de asemenea monografiile lui R. L'Hermite [1], capitolul 8; P. Oghibalov [1]; S. Timoshenko și S. Woinowski-Krieger [1].

Metodele teoriei funcțiilor de o variabilă complexă cîștigă necontenit teren în studiul încovoierii plăcilor. O prezentare modernă a subiectului, în strînsă legătură cu metodele elasticității plane, este dată de A. Green și W. Zerna [1], capitolul 7 (unde sînt considerate și ecuațiile lui Reissner). Plăcile anizotrope sînt studiate de S. Lehnițki [1]; vezi încă și J. Brilla [1]. Concentrarea tensiunilor în vecinătatea orificiilor în plăci este examinată de G. Savin [1], capitolele 6 și 7.

Printre numeroasele articole dedicate studiului încovoierii plăcilor cu ajutorul acestor metode, menționăm cîteva: L. Deverall [1]; C. Stănescu [2]; V. Perehvatov [1]; V. Pisacane și L. Malvern [1]; A. Winslow [1]. Ultimele trei sînt semnificative pentru utilizarea cu succes a funcțiilor de o variabilă complexă și a reprezentării conforme într-o problemă ca cea a plăcii dreptunghiulare — adesea considerată drept obiect de preferință pentru metoda separării variabilelor în domeniul real.

Pentru aplicațiile teoriei funcțiilor Bessel în unele probleme speciale (vibrații; plăci pe fundație elastică) vezi B. Korenev [3].

Pentru utilizarea metodelor teoriei distribuțiilor, conducînd la rezultate numerice efective, vezi J. Leray [1] și J. C. Leray [1].

Pentru plăcile *groase*, vezi A. Lurie [4], capitolele 3 și 4 (cu aplicarea unei metode simbolice foarte eficace; la limită, de aci decurge o teorie a stării elastice plane și o teorie a încovoierii plăcilor *subțiri*; a se revedea de asemenea § 3, pag. 353). Vezi încă V. Manea [6]; M. Mișicu [3].

§ 13. ANALOGIA OPTICĂ ÎN STUDIUL PROBLEMEI PLANE (FOTOELASTICIMETRIA)

Faptul că problema plană și problema încovoierii plăcilor depind de aceeași ecuație sugerează încercarea de a folosi pentru studiul celei dintîi, rezultatele ce se pot obține prin măsurare directă a deplasării normale în cea de-a doua. Acest punct de vedere — propus de K. Wieghardt [1] — nu are însă utilitate practică.

În schimb, problema plană beneficiază de cu totul alt tip de metodă de studiu, care pune în valoare proprietățile optice ale anumitor materiale în stare de tensiune.

Înainte de a prezenta această metodă, mai menționăm *metoda moiré-urilor*, și *metoda lacurilor casante*. Prima (vezi P. Theocaris [1]) este bazată pe modificarea condițiilor de reflectare a luminii pe suprafața lucioasă (de exemplu argintată) a unui model pe care s-a trasat o rețea deasă de linii, care se deformează odată cu modelul. Cea de-a doua (M. Hetenyi [2]) se bazează pe faptul că, odată cu deformarea modelului acoperit cu un strat de lac, acest lac crapă în lungul liniilor izostatice (vezi § 9, pag. 406; § 4.3, pag. 132). Pentru anumite metode electro-analogice, vezi Th. Higgins [6]; A. Medovikov [1]; R. Mc Neal [1].

Vom considera pe scurt *fotoelasticimetria*, o metodă experimentală de determinare a stării de tensiune în modele executate din materiale transparente ce manifestă proprietatea de birefringență artificială (accidentală) sub acțiunea deformației elastice.

a) Birefringența accidentală

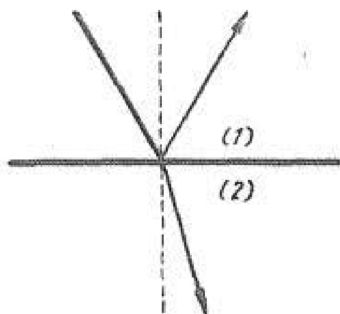
Se știe că o sursă de lumină albă emite unde luminoase transversale, de lungimi de undă diferite, și avînd orientare diferită, haotic dispusă, în spațiu.

Pentru o sursă luminoasă *monocromatică* (emițînd unde cu o lungime de undă determinată), să considerăm vectorul oscilant

$$S = a \sin \omega t, \tag{1}$$

de amplitudine a și de pulsație ω. O oscilație completă se efectuează în $2\pi/\omega$ secunde; produsul dintre această durată și viteza propagării luminii în vid c este lungimea de undă

$$\lambda = 2\,\pi\,(c/\omega). \tag{2}$$



6.13.1

Raza de lumină pentru care toți vectorii (1) sînt situați în același plan se numește *plan-polarizată*.

Lumina poate fi polarizată într-un plan, prin reflectare, sau prin refracție printr-un sistem de plăci subțiri de sticlă.

Într-adevăr, într-un asemenea proces, are loc o anumită selectare: raza reflectată „reține" în special oscilațiile perpendiculare pe planul de incidență, în timp ce cea refractată reține oscilații ce se efectuează în chiar acest plan. Repetînd de 8—10 ori același proces, se obține o rază refractată de intensitate egală cu aproximativ o jumătate din cea inițială, și caracterizată de oscilații dispuse *în* planul de incidență. Sistemul de plăci folosit pentru a realiza această selectare se numește *polarizor*. Un al doilea polarizor paralel cu cel dintîi va lăsa să treacă intactă toată lumina astfel polarizată; dimpotrivă, un polarizor așezat față de cel dintîi în așa fel încît planele de incidență să fie perpendiculare, o va „stinge".

Există materiale (de ex., cristalele de spat de Islanda) în care orice rază luminoasă se descompune în două raze, ambele plan-polarizate, cu plane de polarizare perpendiculare, şi propagîndu-se cu viteze diferite. Aceste materiale se numesc *birefringente.*

Notînd cu v_j viteza luminii în mediul (j), şi cu n_j indicele de refracţie absolut (faţă de vid), legea lui Snellius se scrie

$$\sin \gamma_1/\sin \gamma_2 = v_1/v_2. \tag{3}$$

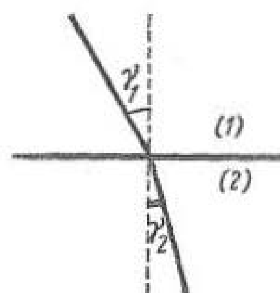


Fig. 6.13.2

Pe de altă parte avem

$$n_j = c/v_j, \tag{4}$$

şi (3) devine

$$\sin \gamma_1/\sin \gamma_2 = v_1/v_2 = n_2/n_1. \tag{5}$$

Descompunerea razei incidente în *două* raze refractate e deci datorată tocmai existenţei a *două* viteze distincte de propagare.

Direcţiile pentru care aceste viteze sînt egale poartă numele de *axe optice.* O rază ce cade perpendicular pe o faţă paralelă cu o axă optică va fi descompusă în două raze ; după traversarea cristalului, ele vor ajunge în acelaşi punct, dar cu viteze diferite ; fenomenul de birefringenţă va face deci posibilă *interferenţa* celor două raze.

Să considerăm o undă monocromatică şi *polarizată*, aşadar caracterizată de un vector (1) de direcţie $\boldsymbol{p}$ fixă. La intrarea într-un corp birefringent C, acest vector se va descompune după cele două direcţii perpendiculare de polarizare din punctul considerat :

$$S_1 = a \sin \omega t \cos \varphi, \quad S_2 = a \sin \omega t \sin \varphi, \tag{6}$$

unde φ este unghiul dintre prima direcţie de polarizare, şi direcţia $\boldsymbol{p}$.

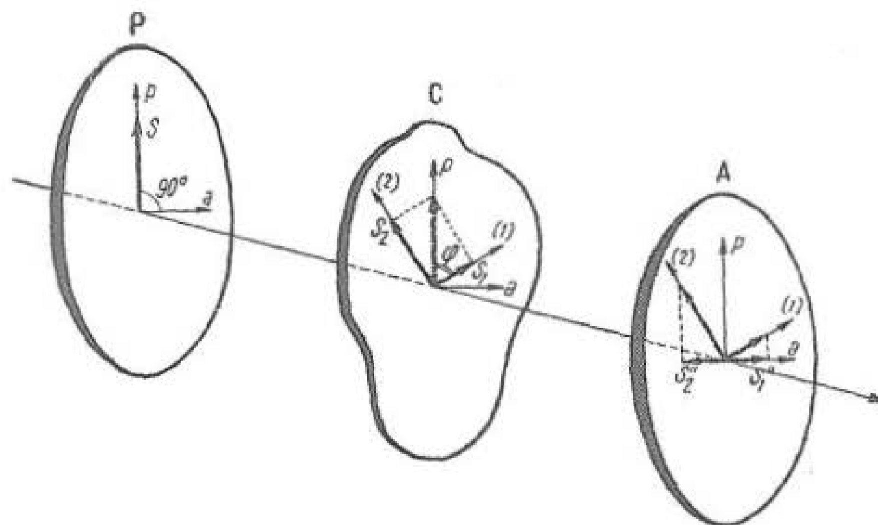


Fig. 6.13.3

Străbătînd corpul de grosime d cu vitezele $v_1 \neq v_2$, între cele două vibrații va apare o diferență de fază $\alpha = \omega\,\delta t$, unde δt este întîrzierea uneia din vibrații față de cealaltă. Din (4) rezultă

$$\delta t = d/v_1 - d/v_2 = (d/c)\,(n_1 - n_2),$$

de unde, ținînd seama și de (2), deducem

$$\alpha = \omega\,\delta t = 2\pi\,(d/\lambda)\,(n_1 - n_2). \tag{7}$$

La ieșirea din corpul birefringent, vom obține deci două vibrații

$$S_1' = a \sin \omega t \cos \varphi, \quad S_2' = a \sin (\omega t - \alpha) \sin \varphi. \tag{8}$$

Să filtrăm aceste raze luminoase printr-un al doilea polarizor A, cu axele perpendiculare față de cel dintîi. Acesta nu va lăsa să treacă decît acele componente din (8) care corespund propriei sale direcții de polarizare, definită de unghiul $\pi/2 - \varphi$; pentru aceasta, el se va numi *analizor*. Din (8) căpătăm acum

$$S_1'' = a \sin \omega t \cos \varphi \sin \varphi, \quad S_2'' = a \sin (\omega t - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi, \tag{9}$$

de unde prin suprapunere

$$S_a = a \sin 2\varphi \sin\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \cos\left(\omega t - \frac{1}{2}\,\alpha\right). \tag{10}$$

Amplitudinea $A = a \sin 2\varphi \sin (\alpha/2)$ a vibrației luminoase la ieșirea din analizor se anulează deci numai în două cazuri:

1° pentru $\varphi = k\pi/2$, k întreg;

2° pentru $\alpha = 2\,h\,\pi$, h întreg.

Prin urmare, din suprapunerea celor două raze refractate se obține *extincție* completă (întuneric) în punctele în care:

1° direcțiile polarizorilor coincid cu direcțiile de polarizare din cristal;

2° diferența de fază dintre cele două raze refractate este un multiplu de 2π.

b) Legile lui Neumann. Izocline și izocromate

Cele de mai sus își dovedesc utilitatea în studiul stării de tensiune plană generalizată a plăcilor subțiri realizate din anumite materiale amorfe (celuloid, gelatină, diferite rășini și materiale plastice). Sub acțiunea sarcinii aceste materiale manifestă fenomenul de birefringență artificială,

descoperit de D. Brewster [1] şi studiat sistematic de F. Neumann [1]. La baza utilizării sale pentru scopurile teoriei elasticităţii stau cele două legi ale lui Neumann:

I. Direcţiile de polarizare în fiecare punct coincid cu direcţiile principale ale deformaţiei în acel punct.

II. Diferenţa vitezelor de propagare a celor două raze este proporţională cu diferenţa deformaţiilor principale în punctul considerat.

Pentru un corp izotrop în stare de deformare elastică, a doua din aceste legi se scrie sub forma (vezi (4)):

$$n_1 - n_2 = C\,(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{11}$$

unde C depinde de natura corpului şi de lungimea de undă a radiaţiei.

Să considerăm acum un model al corpului (plan) ce ne interesează, executat la o scară convenabilă dintr-un material optic activ, şi supus solicitării. Aşezînd modelul între polarizor şi analizor, se vor putea uşor cerceta punctele de extincţie.

Toate punctele în care direcţiile date ale polarizorilor coincid cu direcţiile de polarizare din model sînt — în virtutea primei legi a lui Neumann — puncte în care axele principale ale tensiunii sînt înclinate după un unghi determinat. Locul geometric al acestor puncte — care apar pe analizor ca formînd o linie întunecată — se numeşte *izoclină*. Fiecare din izocline are deci proprietatea că în fiecare punct al ei, direcţiile principale ale tensiunii rămîn neschimbate, şi formează un unghi dat (caracteristic izoclinei considerate) cu o direcţie fixă. Rotind polarizorii, se trasează vizual (sau se fotografiază) izoclinele corespunzătoare unghiurilor de 0°, 5°, 10° etc. În punctele în care $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$, toate direcţiile sînt principale; prin astfel de puncte (numite *puncte izotrope*) trec deci toate izoclinele.

Pentru a stabili ecuaţia ce caracterizează reţeaua de izocline, putem relua raţionamentele din § 1.7, în particular formula (1.7.18) scrisă pentru componentele tensiunii şi cu indicii convenabil schimbaţi. De aci rezultă că o izoclină este locul geometric al punctelor în care

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 2\sigma_{12}/(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = \text{const.} \tag{12}$$

În lungul oricărei curbe caracterizate de o relaţie $f = \text{const.}$ avem $df = 0$, de unde $dx_2/dx_1 = -f_{,1}/f_{,2}$; este suficient să luăm $f = (1/2) \operatorname{arc\,tg} [2\sigma_{12}/(\sigma_{11} - \sigma_{22})]$ pentru a căpăta ecuaţia (de aspect destul de greoi) căutată.

Pe de altă parte, introducînd a doua lege a lui Neumann (11) în expresia (7), conchidem că pe model vom avea extincţie şi în punctele în care

$$\sigma_1 - \sigma_2 = h\,(\lambda/d\,C), \qquad h = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{13}$$

Dacă modelul este examinat în lumină albă, extincţia va apare numai pentru o anumită lungime de undă şi deci punctele respective vor apare colo-

rate în culoarea complementară celei în extincție. Curbele pe care se situează aceste puncte sînt denumite *izocromate*. Evident, acestea sînt locul geometric al punctelor cu aceeași tensiune tangențială maximală. Relația (13) se poate deci scrie și sub forma

$$T_{max} = h\, T_0 . \tag{14}$$

Constanta T_0 (funcție de material, de grosimea modelului, și de λ) se numește *valoarea benzii*. Valoarea T_{max} este proporțională cu T_0 și cu numărul h de benzi (izocromate), pornind de la izocromata zero. Valoarea T_0 se determină prin etalonare.

Pentru a se observa în mod *independent* izoclinele (care nu depind de intensitatea sarcinii), se folosesc modele de plexiglas, material pentru care constanta T_0 este mare. Este suficient atunci să se încarce modelul cu o sarcină proporțională celei care ne interesează, și destul de mică pentru ca să avem peste tot $\sigma_1 - \sigma_2 < 2T_0$; în acest caz, izocromatele nu vor apare.

Dimpotrivă, pentru a se face *să dispară* izoclinele, se folosește lumină polarizată circular (extremitatea vectorului luminos se rotește pe un cerc, cu frecvență extrem de mare). Din (10) urmează că în acest caz izoclinele (care depind de φ) mătură cu foarte mare viteză imaginea, și deci nu mai sînt vizibile, în timp ce izocromatele (care depind de α) rămîn nemodificate. Polarizarea circulară a luminii se realizează la trecerea prin foi de celofan de anumită grosime, aleasă în așa fel încît între cele două raze polarizate să apară o diferență de fază de $\lambda/2$ („lame sfert de undă").

Metoda expusă furnizează deci efectiv orientarea axelor principale și valoarea tensiunii tangențiale maximale în fiecare punct.

Cunoscînd axele principale, se pot trasa liniile *izostatice* (vezi § 9, pag. 406).

Pentru determinarea tensiunilor principale, se pot folosi izocromatele și *izopahele* (liniile de egală sumă a tensiunilor principale). Acestea din urmă pot fi determinate măsurînd în fiecare punct variația grosimii modelului, și făcînd uz de relația (2.3) pentru $i = 3$, $j = 1$, $k = 2$, și de faptul că $\sigma_{33} = 0$, astfel că:

$$\varepsilon_{33} = -(\nu/E)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(\nu/E)(\sigma_1 + \sigma_2). \tag{15}$$

Metoda este laborioasă. Dar se poate aminti că $S_0 = \sigma_1 + \sigma_2$ verifică ecuația lui Laplace (vezi (6.8) pentru $F = 0$). Aceasta permite determinarea ei cu ajutorul analogiei cu o membrană, întinsă pe un contur identic cu cel al modelului, cu fețele libere, și cu cotele pe frontieră date de valorile la limită ale sumei S_0 — la o scară convenabilă—(vezi de ex. H. Supper [1], capitolul 3).

Totuși, pentru determinarea tensiunilor principale ne putem dispensa de aceste măsurători suplimentare. Într-adevăr, înlocuind ecuațiile lui Lamé și Maxwell (9.28) prin ecuații cu diferențe finite, determinarea lui σ_1, σ_2 se reduce la calcularea (grafică sau numerică) a unor integrale definite. E drept că în aceste expresii intervin razele de curbură ρ_1, ρ_2 care în genere

nu pot fi prea precis calculate. Dar un procedeu datorat lui L. Filon permite transformarea ecuațiilor, în așa fel încît să nu mai intervină decît cantități ce se pot ușor determina grafic.

Chestiunilor de foto-elasticimetrie le este consacrată o literatură imensă. Indicăm mai întîi lucrările clasice ale lui E. Coker și L. Filon [1], și M. Frocht [1]. Vezi de asemenea N. Iosipescu [1]. De asemenea se pot consulta capitolele consacrate acestei metode în tratatele lui C. Biezeno și R. Grammel [1], § 3.8; P. Papkovici [4], cap. 13, partea 2; S. Timoshenko și J. Goodier [1], cap. 5; și în monografiile lui A. Durelli et al. [1], și M. Hetenyi [1] (capitolul scris de T. Dolan et al. [1]). Amănunțite treceri în revistă aparțin lui H. Jessop [1] și M. Hetenyi [4]. Menționăm încă — pentru importanța sa istorică — lucrarea lui A. Mesnager [2].

Metodele foto-elasticimetriei s-au extins asupra problemelor tridimensionale (vezi de ex. H. Aben [1]; A. Durelli și I. Daniel [1]; M. Frocht și R. Guernsey [1]; M. Frocht și L. Srinath [1]); asupra problemelor dinamice (vezi de ex. M. Frocht și P. Flynn [1]), și asupra studiului deformației plastice (vezi bibliografie și indicații în M. Hetenyi [4]; de asemenea vezi partea finală din T. Dolan et al. [1]). Menționăm încă articolele lui J. Lewis și H. Pollack [1] și H. Poritsky și R. Jerrard [1].

c) *Cazul domeniilor multiplu conexe*

Chestiunea posibilității de a transpune asupra corpului ce ne interesează, rezultatele măsurătorilor foto-elastice efectuate pe model, necesită atenție aparte (vezi M. Levy [2] și J. Michell [1]).

În acest scop, să amintim că relațiile (7.8) care dau componentele, tensiunii, precum și condiția la limită (11.7) pentru problema lui Neumann, nu depind de constantele elastice.

Să presupunem că am rezolvat problema lui Neumann pentru un domeniu dat, o sarcină dată, și valori date λ, μ, $\varkappa$ — și să căutăm să determinăm corpurile care, avînd aceeași formă și fiind supuse aceleiași solicitări, se găsesc în aceeași stare elastică.

Din (10.22) se vede că, dacă $\mathscr{D}$ este simplu conex, termenii multiformi (dependenți de $\varkappa$) dispar, și funcțiile $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$ rezultă independente de proprietățile materialului. Prin urmare, starea de tensiune a unui corp plan mărginit și simplu conex depinde exclusiv de forma și de forțele superficiale și nu de constantele sale elastice.

Fie acum că $\mathscr{D}$ este multiplu conex, și fie λ', μ', $\varkappa'$ constantele elastice corespunzătoare unui al doilea material. Dacă funcțiile găsite pentru primul corp rezolvă problema lui Neumann și pentru cel de-al doilea, ele vor avea pentru ambele corpuri aceeași formă (10.22), și vor satisface pentru ambele corpuri condițiile la limită în tensiuni. Totodată, ele trebuie să satisfacă și pentru al doilea corp condițiile (10.14), care se vor scrie sub forma

$$\varkappa\,[\overline{X^{(j)}}/2\,\pi\,(\varkappa+1)] = -\,\varkappa'\,[-\,\overline{X^{(j)}}/2\pi\,(\varkappa+1)],$$

de unde

$$(\varkappa - \varkappa')\, X^{(j)} = 0. \tag{16}$$

Ele sînt deci funcţiile căutate pentru al doilea corp, dacă

$$\varkappa = \varkappa', \quad \text{adică } \nu = \nu';$$

sau dacă

$$X^{(j)} = 0 \quad \text{pentru } j = 1,2, \ldots m.$$

Pentru a putea rezolva prin metoda foto-elastică problema lui Neumann pentru un corp multiplu conex, trebuie deci ca materialul modelului să posede acelaşi coeficient Poisson ca şi corpul dat. Această condiţie nu este necesară dacă forţele superficiale au rezultanta nulă pe fiecare din componentele $\mathscr{L}_j$ în parte. Dacă totuşi $X^{(j)} \neq 0$, este necesară utilizarea a trei modele, cu valori diferite ale coeficientului lui Poisson (vezi V. Mossakovski [5]; vezi de asemenea S. Kliačko [1] — cu studiul separat al stărilor de tensiune şi deformaţie plană).

§ 14. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU COROANA CIRCULARĂ. METODA SERIILOR

Dată fiind deplina analogie dintre problema lui Neumann şi problema lui Dirichlet, ne vom limita la a prezenta soluţia celei dintîi. (Vezi N. Musheli̦şvili [5], § 59, dar cu utilizarea unei alte condiţii la limită. Pentru problema lui Dirichlet, vezi şi A. Pîrvu [1].)

Să presupunem deci că domeniul $\mathscr{D}$ este o coroană circulară cu centrul în originea axelor Ox_1x_2, şi de raze $R_1 < R_0$. Cînd va fi necesar, vom atribui indicii $j = 0$ sau 1 diferitelor mărimi scrise pe componentele lui $\mathscr{L}$. În cazul particular $R_1 = 0$ vom căpăta de aci soluţia aceleiaşi probleme pentru discul circular cu sau fără un orificiu punctual central. În cazul $R_0 \to \infty$, vom căpăta soluţia problemei lui Neumann pentru planul cu un orificiu circular.

a) Metoda seriilor

Metoda seriilor poate fi aplicată cu uşurinţă, întrucît funcţiile $\varphi_0(\mathfrak{z})$, $\psi_0(\mathfrak{z})$ sînt reprezentabile fiecare prin *cîte un singur* element Laurent. Amintim notaţiile (vezi (5.17.6)):

$$\zeta|_\gamma = \sigma = \exp(\mathrm{i}\chi), \quad \bar{\sigma} = \sigma^{-1}, \quad \mathrm{d}\sigma = \mathrm{i}\sigma\,\mathrm{d}\chi, \tag{1}$$

şi

$$\mathfrak{z} = R\exp(\mathrm{i}\chi), \quad \mathfrak{t} = \mathfrak{z}|_{\mathscr{L}}, \quad \mathfrak{t}|_{\mathscr{L}_j} = R_j\sigma, \quad s|_{\mathscr{L}_j} = R_j\chi. \tag{2}$$

Determinarea funcţiilor $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$ sub forma (10.22) din condiţia la limită (11.7) rezolvă problema. Vom păstra acelaşi simbol f pentru datele la limită privite ca funcţii de χ, de σ, de t sau de s.

Din (11.8) deducem *pentru orice funcţie* $f(s)$ *integrabilă pe* $\mathscr{L}$:

$$h(s) = \begin{cases} \mathrm{i}\int_0^s f(s)\,\mathrm{d}s & \text{pe } \mathscr{L}_0, \\ -\mathrm{i}\int_0^s f(s)\,\mathrm{d}s & \text{pe } \mathscr{L}_1, \end{cases} \tag{3}$$

unde ambele cercuri sînt parcurse în sens direct (vezi (2)). Pentru $h(s)$ păstrăm aceeaşi convenţie de notaţie ca pentru $f(s)$.

Dacă $f(s)$ este integrabilă, $h(s)$ este continuă. În punctele în care $f(s)$ este continuă, avem $h'(s) = f(s)$. Dacă $f(s)$ este continuă pe porţiuni, $h(s)$ este netedă pe porţiuni.

Notăm însă că putem întîlni funcţii $f(s)$ care nu sînt integrabile (nici chiar în sensul lui Lebesgue) — dar pentru care nu numai că soluţia există, ci poate chiar fi obţinută prin metoda seriilor. (Vezi § 16, ***b***.)

Prin ipoteză, $f(s)$ este uniformă ; $f(\chi)$ este deci periodică, de perioadă 2π. Dimpotrivă, $h(s)$ este în general neuniformă. Într-adevăr, din (3) avem

$$[h]_{\mathscr{L}_0} = \mathrm{i}X^{(0)}, \quad [h]_{\mathscr{L}_1} = -\mathrm{i}X^{(1)}.$$

Întrucît $\mathscr{D}$ este în echilibru sub acţiunea forţelor superficiale, trebuie să avem

$$X^{(0)} + X^{(1)} = 0, \tag{4}$$

(vezi (11.13)) astfel că în definitiv

$$[h]_{\mathscr{L}_0} = [h]_{\mathscr{L}_1} = -\mathrm{i}\,X^{(1)}. \tag{5}$$

Prin urmare, pentru funcţia $h(\chi)$ deducem

$$h(\chi + 2\pi) = h(\chi) - \mathrm{i}\,X^{(1)}. \tag{6}$$

Să presupunem că $f(\chi) \in \mathrm{V}$; prin urmare, f este desfăşurabilă în serie Fourier convergentă. Este uşor să ameliorăm convergenţa sa ; într-adevăr, din (5) urmează

$$[h(\chi) + (X^{(1)}/2\pi)\,\mathrm{i}\,\chi]_{\mathscr{L}_j} = 0, \qquad j = 0,1. \tag{7}$$

Coeficienţii Fourier ai acestei funcţii verifică deci inegalităţile (A.9.19). Amintind că $\sigma = \exp\,(\mathrm{i}\chi)$, putem scrie

$$h(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j \sigma^n - (X^{(1)}/2\pi)\ln\sigma \qquad \text{pe } \mathscr{L}_j, \quad j = 0,1, \tag{8}$$

unde h_n^0 şi h_n^1 sînt constante complexe cunoscute, şi anume coeficienţii Fourier ai funcţiilor $h(\sigma) + (X^{(1)}/2\pi) \ln \sigma$ pe cele două cercuri-frontieră, adică de exemplu (vezi (A. 9.25)):

$$h_n^0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma [h(\sigma) + (X^{(1)}/2\pi) \ln \sigma] \sigma^{-n-1} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(\chi) + (X^{(1)}/2\pi) i\chi] \exp(-in\chi) d\chi. \tag{9}$$

(Din cauza prezenţei termenului logaritmic, notaţia nu este cu totul consecventă.) Din (1), (2) urmează desigur

$$d/ds = R_j^{-1} d/d\chi \quad \text{pe } \mathscr{L}_j, \quad d/d\chi = i\sigma d/d\sigma. \tag{10}$$

Derivînd în raport cu s — adică în fond în raport cu χ — în ambii membri ai egalităţilor (3) şi ţinînd seama de (8), deducem

$$h'(s) = (-1)^j i f(s) = R_j^{-1} i\sigma \frac{d}{d\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j \sigma^n - R_j^{-1} (X^{(1)}/2\pi) i$$

pe $\mathscr{L}_j$, $j = 0, 1$, de unde

$$f(\sigma) = (-1)^j R_j^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} n h_n^j \sigma^n - (X^{(1)}/2\pi) \right] \quad \text{pe } \mathscr{L}_j, \quad j = 0,1. \tag{11}$$

Funcţia $h(\sigma)$ trebuie să posede proprietăţi ce rezultă din condiţia de echilibru a lui $\mathscr{D}$ ca solid rigid. Condiţia ca rezultanta forţelor exterioare să fie nulă este exprimată de (4). Momentul rezultant al acestor forţe în raport cu originea se scrie (vezi 11.14))

$$\mathscr{M}_3 = -\operatorname{Im} \oint_{\mathscr{L}} t(s) \overline{f(s)} ds. \tag{12}$$

Introducînd aci (11), ţinînd seama că $\mathscr{L}_0$ şi $\mathscr{L}_1$ sînt parcurse în sens direct şi că curbele de integrare sînt înlocuite, în virtutea relaţiilor (2), cu cercul unitate γ, obţinem cu ajutorul teoremei reziduurilor (sau din (A.9.23))

$$\mathscr{M}_3 = -\operatorname{Im} \oint_\gamma R_0 \sigma \left\{ R_0^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \overline{h_n^0} \sigma^{-n} - (\overline{X^{(1)}}/2\pi) \right] \right\} R_0 (-i\sigma^{-1} d\sigma) -$$

$$- \operatorname{Im} \oint_\gamma R_1 \sigma \left\{ (-R_1^{-1}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \overline{h_n^1} \sigma^{-n} - (\overline{X^{(1)}}/2\pi) \right] \right\} R_1 (-i\sigma^{-1} d\sigma) =$$

$$= \operatorname{Im} \oint_\gamma i(\overline{h_1^0} R_0 - \overline{h_1^1} R_1) \sigma^{-1} d\sigma = 2\pi \operatorname{Im}(R_1 \overline{h_1^1} - R_0 \overline{h_1^0}), \tag{13}$$

astfel încît condiția de anulare a momentului rezultant ia în definitiv forma

$$\operatorname{Im}\,(R_0\, h_1^0 - R_1\, h_1^1) = 0. \tag{14}$$

Să stabilim acum aspectul funcțiilor $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$. Relațiile (10.22) arată că ele conțin cîte un singur termen logaritmic fiecare, în care vom alege $\mathfrak{z}_1 = 0$. Întrucît funcțiile $\varphi_0(\mathfrak{z})$ și $\psi_0(\mathfrak{z})$ sînt olomorfe în $\mathscr{D}$, ele pot fi căutate sub forma unor serii Laurent. (Aceasta arată importanța practică a celor spuse la pag. 410.) Ținînd seama de (10.15) vom avea deci

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \gamma_1 \ln \mathfrak{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathfrak{z}^n, \qquad \psi(\mathfrak{z}) = -\varkappa \bar{\gamma}_1 \ln \mathfrak{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \mathfrak{z}^n, \tag{15}$$

unde constanta γ_1 este cunoscută și are valoarea (vezi (10.21))

$$\gamma_1 = -\,[X^{(1)}/2\pi(\varkappa + 1)]. \tag{16}$$

Funcțiile $\varphi_0(\mathfrak{z})$, $\psi_0(\mathfrak{z})$ sînt soluțiile problemei (11.10), (11.11):

$$\varphi_0(t) + t\,\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = h^{(j)}(t) + C_j - \gamma_1(\ln t - \varkappa \ln \bar{t}) - \bar{\gamma}_1(t/\bar{t}) \text{ pe } \mathscr{L}_j. \tag{17}$$

Membrul al doilea din (17) trebuie să fie uniform; în fapt, termenul său logaritmic se scrie

$$[X^{(1)}/2\pi(\varkappa + 1)]\,[(1-\varkappa)\ln|t| + (1+\varkappa)\, i\chi],$$

și partea sa multiformă este egală și de semn opus termenului în $i\chi$ din (8).

Introducînd acum (8) în (17), căpătăm *pentru al doilea membru* din (17):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j \sigma^n - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{X^{(1)}}{2\pi}\ln|t| + \frac{\overline{X^{(1)}}}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{t}{\bar{t}} + C_j \quad \text{pe } \mathscr{L}_j,\ j = 0,1. \tag{18}$$

Constantele C_0, C_1 rămîn deocamdată nedeterminate. Aceasta permite (vezi § 11, pag. 417) să luăm în (15):

$$a_0 = b_0 = \operatorname{Im}\, a_1 = 0. \tag{19}$$

Pentru a introduce expresiile (15) în condițiile la limită, vom ține seama și de (1), (2); de unde avem *pentru primul membru* din (17):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R_j^n \sigma^n + R_j\, \sigma \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\bar{a}_n R_j^{n-1}\, \sigma^{-(n-1)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_n R_j^n \sigma^{-n} \text{ pe } \mathscr{L}_j,\ j = 0,1. \tag{20}$$

Înlocuind în a doua sumă din (20) indicele n prin $-n+2$, strîngînd la un loc termenii corespunzători acelorași puteri σ^n, și ținînd seama de (18), obținem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n R_j^n - (n-2)\,\bar{a}_{-n+2} R_j^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_j^{-n}]\,\sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j\,\sigma^n -$$

$$- [(\varkappa-1)/(\varkappa+1)]\,[X^{(1)}/2\pi] \ln R_j + [\overline{X^{(1)}}/2\pi(\varkappa+1)]\,\sigma^2 + C_j, \quad j=0,1, \quad (21)$$

așadar două condiții de egalitate a două serii complexe Fourier.

Conform celor spuse în § A.9, pag. 759, de aci rezultă *egalitatea coeficienților corespunzători*, astfel că (21) conduce la un sistem de ecuații algebrice liniare. Anume, ținînd seama și de primele două relații (19), avem pe rînd pe cercul $\mathscr{L}_0$, pentru

$$n = 0: \quad 2\bar{a}_2 R_0^2 = h_0^0 - [(\varkappa-1)/(\varkappa-1)]\,[X^{(1)}/2\pi] \ln R_0 + C_0, \quad (22)$$

$$n = 1: \quad a_1 R_0 + \bar{a}_1 R_0 + \bar{b}_{-1} R_0^{-1} = h_1^0, \quad (23)$$

$$n = 2: \quad a_2 R_0^2 + \bar{b}_{-2} R_0^{-2} = h_2^0 + [\overline{X^{(1)}}/2\pi(\varkappa+1)], \quad (24)$$

$$n \geqslant 3,\ n \leqslant -1: \quad a_n R_0^n - (n-2)\,\bar{a}_{-n+2} R_0^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_0^{-n} = h_n^0. \quad (25)$$

Pe cercul $\mathscr{L}_1$ obținem evident un sistem de relații analoge, în care R_0, h_n^0, C_0 sînt înlocuiți cu R_1, h_n^1, C_1.

Relația (23) și relația analogă obținută pe $\mathscr{L}_1$ se scriu

$$2R_0^2 \operatorname{Re} a_1 + \bar{b}_{-1} = R_0 h_1^0, \qquad 2R_1^2 \operatorname{Re} a_1 + \bar{b}_{-1} = R_1 h_1^1. \quad (26)$$

Scăzînd membru cu membru aceste relații, obținem

$$\operatorname{Re} a_1 = \frac{1}{2}(R_0 h_1^0 - R_1 h_1^1)/(R_0^2 - R_1^2); \quad (27)$$

aceasta este desigur cu putință numai dacă numărătorul din (27) este real, ceea ce e automat verificat (vezi (14)). Ținînd seama de a treia relație (19), putem scrie deci

$$a_1 = \bar{a}_1 = \frac{1}{2}(R_0 h_1^0 - R_1 h_1^1)/(R_0^2 - R_1^2). \quad (28)$$

Introducînd această valoare în oricare din ecuațiile (26), determinăm coeficientul b_{-1}.

Mai departe, relația (24) și cea analogă ei de pe $\mathscr{L}_1$ dau sistemul care slujește la determinarea coeficienților a_2 și b_{-2}:

$$\begin{aligned} a_2 R_0^2 + \bar{b}_{-2} R_0^{-2} &= h_2^0 + [\overline{X^{(1)}}/2\pi(\varkappa+1)], \\ a_2 R_1^2 + \bar{b}_{-2} R_1^{-2} &= h_2^1 + [X^{(1)}/2\pi(\varkappa+1)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Ecuaţia (22) şi ecuaţia analogă de pe $\mathscr{L}_1$ permit acum să găsim constantele C_0, C_1, care nu intervin de altfel în calcule.

Scriind în fine relaţiile (25) şi analogele lor, obţinem sistemul

$$\begin{aligned} a_n R_0^n - (n-2)\,\bar{a}_{-n+2} R_0^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_0^{-n} &= h_n^0, \\ a_n R_1^n - (n-2)\,\bar{a}_{-n+2} R_1^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_1^{-n} &= h_n^1, \end{aligned} \tag{30}$$

valabil pentru $n = -1, -2, \pm 3, \ldots$ Înmulţind prima din aceste ecuaţii cu R_0^n, pe cea de a doua cu R_1^n, scăzîndu-le termen cu termen, şi notînd

$$l_n = R_0^n h_n^0 - R_1^n h_n^1, \tag{31}$$

obţinem mai întîi

$$a_n (R_0^{2n} - R_1^{2n}) - (n-2)\,\bar{a}_{-n+2} (R_0^2 - R_1^2) = l_n.$$

Înlocuind aci n prin $-n+2$ şi trecînd la cantităţile complex conjugate, căpătăm în definitiv sistemul

$$\begin{aligned} (R_0^{2n} - R_1^{2n})\, a_n - (n-2)(R_0^2 - R_1^2)\,\bar{a}_{-n+2} &= l_n, \\ n (R_0^2 - R_1^2)\, a_n + (R_0^{-2n+4} - R_1^{-2n+4})\,\bar{a}_{-n+2} &= \bar{l}_{-n+2}, \end{aligned} \tag{32}$$

de unde se găsesc coeficienţii a_n, dacă determinantul sistemului nu este nul.

Pentru acest determinant se obţine uşor expresia

$$\Delta_n = R_1^4 [n(n-2)(K-1)^2 + (K^n-1)(K^{-n+2}-1)], \quad K = R_0^2/R_1^2, \tag{33}$$

(în notaţia din (5.15.93), avem $K = k^{-2}$). Să considerăm funcţia

$$f_n(K) = f_{-n+2}(K) = n(n-2)(K-1)^2 + K^2 - K^{-n+2} - K^n + 1. \tag{34}$$

Derivînd în raport cu K, şi ţinînd seama că sistemul (32) este scris pentru toate valorile $n \neq 0,1,2$, din cele de mai sus urmează

$$f_n'(1) = f_n''(1) = f_n'''(1) = 0, \quad f_n^{\mathrm{IV}}(K) < 0 \tag{35}$$

pentru $K > 1$. Obţinem atunci pe rînd

$$\begin{gathered} f_n'''(K) < 0, \;\; f_n''(K) < 0, \;\; f_n'(K) < 0, \;\; f_n(K) < 0 \text{ pentru } K > 1, \\ \Delta_n < 0 \text{ pentru } R_0 > R_1 \text{ şi } n \geqslant 3. \end{gathered} \tag{36}$$

În consecinţă, sistemul (32) are soluţie unică pentru $n \geqslant 3$. Acelaşi rezultat rămîne valabil şi pentru $n < 0$ — dar nu este necesar să ne ocupăm de acest caz dat fiind că este mai simplu să înlocuim în (32) (şi deci şi în expresiile deduse pentru a_n) indicii $n \geqslant 3$ prin $-n+2$, ceea ce conduce la şirul de indici negativi $-1, -2, -3, \ldots -n, \ldots$

Din sistemul (32) deducem acum pentru $n \geqslant 3$

$$a_n = [(R_0^{-2n+4} - R_1^{-2n+4})\, l_n + (n-2)(R_0^2 - R_1^2)\,\bar{l}_{-n+2}] : \Delta_n. \tag{37}$$

Coeficienţii funcţiei $\varphi_0(\mathfrak{z})$ sînt astfel deplin determinaţi : a_0 este dat de (19), a_1 este dat de (28), a_2 se deduce din (29), a_n (pentru $n \geqslant 3$) este scris în (37), iar a_n (pentru $n < 0$) se obţine din (37) dacă înlocuim n prin $-n+2$.

Coeficienţii funcţiei $\psi_0(\mathfrak{z})$ sînt şi ei cunoscuţi : b_0 este dat de (19), b_{-1} rezultă din (26), iar b_{-2} — din (29). Pentru a obţine b_{-n} pentru $n \geqslant 3$, putem face uz de una (oricare) din ecuaţiile (30), în care introducem valorile a_n şi a_{-n+2} deja găsite. În fine, pentru a căpăta coeficienţii b_n pentru $n \geqslant 1$, folosim una din ecuaţiile (30), în care am înlocuit pe n prin $-n+2$.

Cu aceasta, funcţiile lui Kolosov şi Mushelişvili au fost determinate sub forma (15). Toate aceste operaţii reprezintă analogul celei care pune în corespondenţă datelor la limită $f(\sigma)$ din (A.9.33), funcţia de o variabilă complexă $f(\zeta)$ din (A.9.32), şi constituie tocmai realizarea operaţiei de rezolvare a ecuaţiilor (A.9.5) în cazul particular în care $F(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) \equiv \varphi_0(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}\,\overline{\varphi'_0(\mathfrak{z})} + \overline{\psi_0(\mathfrak{z})}$.

b) Convergenţa soluţiei

După cum se arată în § A.9, o asemenea construcţie nu garantează de fel — în cazul *unei* funcţii de *o* variabilă complexă — convergenţa seriei (A.9.32) în interiorul coroanei, aşadar *existenţa* funcţiei olomorfe considerate. Dimpotrivă însă, se poate demonstra că cele *două* funcţii $\varphi_0(\mathfrak{z})$, $\psi_0(\mathfrak{z})$ sînt efectiv determinate de datele la limită, întrucît seriile ce le definesc sînt convergente în interiorul coroanei (şi chiar pe frontieră). Totodată, acest fapt arată că — spre deosebire de cazul unei singure funcţii olomorfe (§ A.9, pag. 767) datele la limită de pe ambele componente ale lui $\mathscr{L}$ sînt necesare şi — într-o largă măsură — pot fi date arbitrar. Aceasta este uşor de înţeles, întrucît în cazul de faţă sîntem conduşi la determinarea a *două* funcţii dintr-o *singură* condiţie la limită.

Pentru a demonstra că seriile (15) sînt convergente, este suficient să demonstrăm că părţile lor regulate sînt convergente în $\mathscr{D}_0^+$, iar părţile lor principale, în $\mathscr{D}_1^-$. Dar în loc să facem uz de formulele (A.5.19) şi (A.5.24), este mai uşor să demonstrăm direct că seriile modulelor sînt convergente pentru $|\mathfrak{z}| \leqslant R_0$, respectiv pentru $|\mathfrak{z}| \geqslant R_1$. Convergenţa seriilor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n R_0^n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n R_0^n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n} R_1^{-n}|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_{-n} R_1^{-n}|$$

asigură, în virtutea teoremei a doua a lui Abel, şi posibilitatea de a prelungi prin continuitate funcţiile considerate în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$ (vezi (A.9.37)), şi garantează regularitatea soluţiei obţinute.

Ţinînd seama de definiţia cantităţilor l_n şi K, putem scrie

$$l_n = h_n^0 R_0^n - h_n^1 R_1^n = R_1^n (h_n^0 K^{n/2} - h_n^1), \tag{38}$$

astfel că (37) devine

$$a_n =$$
$$= \frac{R_1^n (h_n^0 K^{n/2} - h_n^1) R_1^{-2n+4} (K^{-n+2} - 1) + (n-2) R_1^{-n+2} (\overline{h^0}_{-n+2} K^{-n/2+1} - \overline{h^1}_{-n+2}) R_1^2 (K-1)}{R_1^4 [n(n-2)(K-1)^2 + (K^n - 1)(K^{-n+2} - 1)]},$$

de unde, ţinînd seama de (34), deducem:

$$a_n R_0^n = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^n \frac{(h_n^0 K^{n/2} - h_n^1)(K^{-n+2} - 1) + (n-2)(\overline{h^0}_{-n+2} K^{-n/2+1} - \overline{h^1}_{-n+2})(K-1)}{f_n(K)}, \tag{39}$$

precum şi relaţia analogă ce se obţine dacă înmulţim pe a_n cu R_1^n în loc de R_0^n, şi înlocuim pe n cu $-n+2$:

$$a_{-n+2} R_1^{-n+2} = \frac{(h^0_{-n+2} K^{-n/2+1} - h^1_{-n+2})(K^n - 1) - n(\overline{h_n^0} K^{n/2} - \overline{h_n^1})(K-1)}{f_n(K)}. \tag{40}$$

Aceste rapoarte depind evident de comportarea coeficienţilor Fourier h_n^0, h_n^1. Să presupunem acum că derivata a doua a funcţiei periodice $[h(\chi) + (X^{(1)}/2\pi) i \chi]$, aşadar derivata $f'(\chi)$ a funcţiei (evident periodice) $[f(\chi) + (X^{(1)}/2\pi R_0)]$ (vezi (11)) este cu variaţie mărginită (în particular: satisface condiţiile lui Dirichlet) sau este de clasă C_μ^0. În acest caz, din (A.9.20), (A.9.21) rezultă că

$$|h_n^0|, |h_n^1| \leqslant C|n|^{-2-\mu}, \quad 0 < \mu \leqslant 1, \tag{41}$$

unde $\mu = 1$ dacă $f'(\chi) \in V$). Din (39) urmează acum

$$|a_n R_0^n| \leqslant K^{n/2} \{(K^{n/2} + 1 + K^{-n/2+2} + K^{-n+2}) C'|n|^{-2-\mu} +$$
$$+ (n-2)(K + 1 + K^{-n/2+2} + K^{-n/2+1}) C''|n-2|^{-2-\mu}\} : |f_n(K)|,$$

sau încă, reţinînd la numărător numai termenii de gradul cel mai înalt în K (întrucît $K > 1$) şi înlocuind constantele C', C'' cu o constantă C''' convenabilă:

$$|a_n R_0^n| \leqslant C''' \{K^n |n|^{-2-\mu} + K^{n/2+1} |n-2|^{-1-\mu}\} : |f_n(K)|. \tag{42}$$

Numitorul $f_n(K)$ este de grad n în K; introducînd o nouă constantă C, obţinem deci pentru n suficient de mare:

$$|a_n R_0^n| \leqslant C|n|^{-2-\mu}, \tag{43}$$

de unde rezultă evident convergenţa seriei de termen general $|a_n R_0^n|$.

Din (40) obţinem în mod analog

$$|a_{-n+2} R_1^{-n+2}| \leqslant C|n-2|^{-2-\mu}, \tag{44}$$

astfel că seria de termen general $|a_{-n+2} R_1^{-n+2}|$ este de asemenea convergentă.

Prin urmare, seria $\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$ este absolut şi uniform convergentă nu numai în orice compact conţinut în $\mathscr{D}$, ci şi pe $\mathscr{L}$.

Mai departe, din a doua ecuaţie (30) urmează

$$b_{-n} R_1^{-n} = \overline{h_n^1} + (n-2)\, a_{-n+2} R_1^{-n+2} - \bar{a}_n R_1^n, \tag{45}$$

de unde, ţinînd seama şi de evaluările (41), (44) şi (43) (care rămîne desigur valabilă dacă înlocuim R_0 cu cantitatea mai mică R_1), obţinem

$$| b_{-n} R_1^{-n} | \leqslant C' | n |^{-2-\mu} + C'' | n-2 |^{-1-\mu} + C''' | n |^{-2-\mu},$$

sau încă, introducînd o nouă constantă C convenabil aleasă:

$$| b_{-n} R_1^{-n} | \leqslant C | n |^{-1-\mu}. \tag{46}$$

Înlocuind în prima ecuaţie (30) indicele $-n$ prin $n-2$, obţinem

$$b_{n-2} R_0^{n-2} = \overline{h^0_{-n+2}} - n\, a_n R_0^n - \bar{a}_{-n+2} R_0^{-n+2}, \tag{47}$$

de unde în acelaşi fel conchidem că

$$| b_{n-2} R_0^{n-2} | \leqslant C | n |^{-1-\mu}. \tag{48}$$

Prin urmare, seria $\psi_0(\mathfrak{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \mathfrak{z}^n$ este de asemenea uniform şi absolut convergentă în $\mathscr{D}$, şi chiar pe $\mathscr{L}$. Convergenţa acestei serii este mai lentă decît cea a seriei $\varphi_0(\mathfrak{z})$. (Pentru aceasta din urmă, ar fi fost suficient să formulăm condiţiile de la pag. 443 relativ la funcţia $f(\chi)$ însăşi.)

Din convergenţa seriei $\varphi_0(\mathfrak{z})$ în $\mathscr{D}$ rezultă că $\varphi_0'(\mathfrak{z})$ se poate căpăta prin derivare termen cu termen, iar domeniul de convergenţă al seriei astfel obţinute este tot $\mathscr{D}$. Mai mult încă, din (43), (44) rezultă şi

$$| n\, a_n R_0^n | \leqslant C | n |^{-1-\mu}, \qquad | (n-2)\, a_{-n+2} R_1^{-n+2} | \leqslant C | n-2 |^{-1-\mu}, \tag{49}$$

de unde urmează că seria $\varphi_0'(\mathfrak{z})$ este absolut convergentă şi pe $\mathscr{L}$.

Funcţiile lui Kolosov şi Mushelişvili sînt astfel construite.

Raţionamentul de mai sus constituie totodată demonstrarea *teoremei de existenţă* a soluţiei problemei lui Neumann pentru coroana circulară, dacă datele la limită satisfac condiţiile impuse mai sus funcţiei $f(s)$.

Întrucît seriile (15) sînt convergente, putem privi drept soluţie *aproximativă* a aceleiaşi probleme funcţiile ce se obţin dacă reţinem aci numai un număr *finit* de termeni. Cu cît acest număr este mai mare, şi cu cît datele la limită sînt mai regulate (cu un număr mai mare de derivate succesive periodice), cu atît această soluţie este mai apropiată de cea exactă. (Compară mai departe cu § 8.3, pag. 573.)

OBSERVAŢIA 1. Condiţiile impuse funcţiei $f(s)$ sînt destul de severe. Ele conduc — după un lanţ lung de evaluări — la concluzii dintre care unele rămîn încă mai tari decît cele necesare. Dar acestea sînt numai condiţii *suficiente* de existenţă, şi metoda rămîne utilizabilă chiar şi în unele împrejurări în care ele nu sînt îndeplinite (vezi § 16, ***b***).

OBSERVAȚIA 2. Soluția problemei lui Dirichlet se obține cu totul similar. (Acesta este avantajul utilizării condiției (11.7).) Întrucît însă funcția $g(s)$ este analogul funcției $h(s)$ — și nu al funcției $f(s)$ — convergența seriilor obținute va fi asigurată dacă datele la limită verifică condiții mai severe : $g''(\chi) \in V$ sau $g''(\chi) \in C^0_\mu$.

OBSERVAȚIA 3. În cazul problemei lui Dirichlet, γ_1 e necunoscută, dar o ecuație analogă cu (22) — din care C_0 lipsește acum — permite să se determine $X^{(1)}$.(Vezi pag. 416.)

c) *Exemplu. Problema lui Lamé*

Fie dat un tub cilindric circular lung, supus la presiune uniformă interioară și exterioară. Problema conduce la considerarea unei coroane circulare, supuse la sarcini normale constante pe frontieră. Avem evident

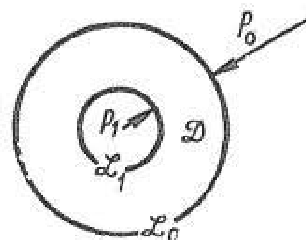


Fig. 6.14.1

$$f(\chi) = \begin{cases} -p_0 \exp(\mathrm{i}\chi) & \text{pe } \mathscr{L}_0, \\ p_1 \exp(\mathrm{i}\chi) & \text{pe } \mathscr{L}_1, \end{cases} \tag{50}$$

unde p_0, $p_1 > 0$. (Valori p_0, $p_1 < 0$ ar corespunde unei întinderi uniforme.)

Din (3) urmează acum, abstracție făcînd de o constantă,

$$h(\chi) = \begin{cases} \mathrm{i}\int_0^\chi -p_0 \exp(\mathrm{i}\chi) R_0\, d\chi = -p_0 R_0 \exp(\mathrm{i}\chi) & \text{pe } \mathscr{L}_0, \\ -\mathrm{i}\int_0^\chi p_1 \exp(\mathrm{i}\chi) R_1\, d\chi = -p_1 R_1 \exp(\mathrm{i}\chi) & \text{pe } \mathscr{L}_1. \end{cases} \tag{51}$$

Comparînd cu expresiile (8), deducem

$$X^{(0)} = X^{(1)} = 0, \quad h_1^0 = -R_0 p_0, \quad h_1^1 = -R_1 p_1, \tag{52}$$

ceilalți coeficienți fiind nuli. Condiția (14) este verificată. Obținem pe rînd :

din (16) : $$\gamma_1 = 0; \tag{53}$$

din (28) : $$a_1 = (R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0)/2(R_0^2 - R_1^2); \tag{54}$$

din (26) : $$b_{-1} = [R_0^2 R_1^2/(R_0^2 - R_1^2)](p_0 - p_1); \tag{55}$$

din (29) : $$a_2 = b_{-2} = 0. \tag{56}$$

Sistemul (30) este aci omogen, și ceilalți coeficienți a_n, b_n sînt deci nuli. În fine, din (22) urmează $C_0 = 0$, și analog și $C_1 = 0$.

Funcțiile căutate sînt deci

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2}\frac{R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0}{R_0^2 - R_1^2}\mathfrak{z}, \quad \psi(\mathfrak{z}) = \frac{R_0^2 R_1^2 (p_0 - p_1)}{R_0^2 - R_1^2}\mathfrak{z}^{-1}. \tag{57}$$

Făcînd uz de (7.28), conchidem că zonele periclitate sînt cele în care avem

$$|S| = 2\,|\bar{\mathfrak{z}}\,\varphi'' + \psi'| = 2\,[R_0^2 R_1^2/(R_0^2 - R_1^2)]\,|p_0 - p_1|\,R^{-2} > \sigma_c \tag{58}$$

(sau $> 1{,}16\ \sigma_s$; vezi finele § 6). Pentru R_0, R_1 dați, $|S|$ este cu atît mai mare cu cît diferența de presiune $p_0 - p_1$ este mai mare, și cu cît R este mai mic. Prin urmare, deformația plastică începe pe cercul *interior*.

În cazul particular $R_1 \to 0$ (disc circular cu o fisură punctuală centrală) avem aci

$$\lim |S|_{\mathscr{L}_1} = 2\,|p_0 - p_1| \quad \text{pentru } R_1 \to 0. \tag{59}$$

O repartiție de sarcini diferită de cea din (50) ar conduce la calcule mai laborioase, dar principial cu nimic deosebite de cele de aci.

§ 15. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU DISCUL CIRCULAR ȘI PENTRU PLANUL CU UN ORIFICIU CIRCULAR

a) Disc circular

Soluția se obține din cea din § 14, dacă luăm $R_1 = 0$ și ținem seama că funcțiile $\varphi(z)$, $\psi(z)$ trebuie să fie olomorfe în domeniul $\mathscr{D}_0^+$ la care se reduce $\mathscr{D}$. Această din urmă condiție obligă să avem

$$\gamma_1 = 0,\ a_{-n} = b_{-n} = 0 \quad \text{pentru } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Vom renunța la indicele „o" relativ la mărimile definite pe cercul exterior, păstrînd numai notația R_0 pentru raza acestuia.

Condiția de echilibru se scrie acum (vezi (14.4), (14.14)):

$$X^{(0)} = \operatorname{Im}\, h_1 = 0. \tag{2}$$

Ecuațiile (14.22) — (14.25) devin (înlocuind $-n$ prin n pentru $n > 0$ în (14.25)):

$$\begin{aligned} &2\,\bar{a}_2 R_0^2 = h_0 + C_0;\ (a_1 + \bar{a}_1)\, R_0 = h_1;\\ &a_n R_0^n = h_n,\ n \geqslant 2;\ (n+2)\, a_{n+2} R_0^{n+2} + b_n R_0^n = \bar{h}_{-n},\ n > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ținînd seama și de (14.19), deducem de aci

$$\begin{aligned} &a_0 = 0;\ a_1 = \frac{1}{2} h_1\ R_0^{-1};\ a_n = h_n\, R_0^{-n},\ n \geqslant 2;\\ &b_0 = 0;\ b_n = [\bar{h}_{-n} - (n+2)\, h_{n+2}]\, R_0^{-n},\ n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Din prima relație (3) obținem și constanta (inutilă de altfel) $C_0 = 2\,\bar{h}_2 - h_0$.

Introducînd acum (1) și (4) în (14.15), obținem

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{2} h_1 (z/R_0) + \sum_{n=2}^{\infty} h_n (z/R_0)^n, \\ \psi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{h}_{-n} - (n+2)\, h_{n+2}] (z/R_0)^n.\end{aligned} \tag{5}$$

(Pentru modul de a nota coeficienții, vezi și § A.9, pag. 763.) Convergența seriilor din (5) se demonstrează ușor (vezi finele § 14).

b) *Metoda lui C. Iacob* [7]

Este vorba de o metodă care permite să se rezolve aproape fără nici un calcul *problema biarmonică fundamentală*

$$\Delta\Delta \mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{A}|_{\mathscr{L}_0} = F_1, \quad \mathsf{A}_{,n}|_{\mathscr{L}_0} = F_2, \tag{6}$$

(unde $\mathscr{L}_0$ este frontiera discului circular $\mathscr{D}$ de rază R_0), pentru date la limită

$$F_j(x_1, x_2) = R_j(x_1, x_2) \operatorname{Re}\{H_j(z)\}|_{\mathscr{L}_0}, \; j = 1, 2, \tag{7}$$

R_j fiind funcții *raționale* și fără singularități pe $\mathscr{L}_0$, în timp ce H_j sînt olomorfe în $\mathscr{D}$ și continue în $\mathscr{D} + \mathscr{L}_0$.

Soluția se caută sub forma reprezentării lui Almansi

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 + (R_0^2 - R^2)\mathsf{A}_2, \quad \Delta\mathsf{A}_1 = \Delta\mathsf{A}_2 = 0, \tag{8}$$

iar funcțiile A_1, A_2 rezultă efectiv determinate prin intermediul funcțiilor H_j și al părților principale în $\mathscr{D}$ ale unor anumite funcții care nu depind decît de R_j și H_j. Pentru $H_j \equiv 1$, se obține cazul particular important al datelor la limită raționale. Dacă F_j sînt polinoame, rezultă că $\mathsf{A}(x_1, x_2)$ este de asemenea un polinom. (Vezi încă și § 5.17.)

Ținînd seama de indicațiile din §§ 4 și 7, acest rezultat poate fi direct adaptat la cerințele teoriei elasticității, privind nu determinarea funcției lui Airy, ci pe cea a funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili.

c) *Disc circular cu o fisură punctuală centrală. Concentrarea tensiunilor*

Cazul discului diferă esențial de cel al coroanei circulare cu $R_1 \to 0$, din cauza concentrării tensiunilor — fenomen deja întîlnit în studiul problemei antiplane. Pentru a-l pune în evidență, să comparăm tensiunile în origine pentru disc (care se obțin utilizînd (5)), cu tensiunile pe cercul

de rază R_1 în cazul coroanei circulare, pentru $R_1 \to 0$. Vom presupune că cercul interior $\mathscr{L}_1$ este liber — aşa cum se petrec în general lucrurile pe frontiera unei fisuri.

Pentru disc, din (7.8) şi (5) găsim în origine

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}_0(0, 0) &= 4 \operatorname{Re} \varphi'(0) = 4\, a_1 = 2 h_1\, R_0^{-1}, \\
\mathsf{S}\,(0, 0) &= 2\, \psi'(0) = 2\, b_1 = 2\, (\overline{h}_{-1} - 3\, h_3)\, R_0^{-1}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Pentru coroana circulară, obţinem mai întîi (vezi şi (14.3)):

$$
\chi^{(1)} = h_n^1 = \operatorname{Im} h_1^0 = 0, \quad l_n = h_n^0\, R_0^n, \tag{10}
$$

astfel că formulele (14.15) devin

$$
\varphi(\mathfrak{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, \mathfrak{z}^n, \quad \psi(\mathfrak{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\, \mathfrak{z}^n. \tag{11}
$$

Pe cercul $\mathscr{L}_1$ avem $\mathfrak{z} = R_1 \sigma$, $\bar{\mathfrak{z}} = R_1 \sigma^{-1}$, şi deci

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}_0 \big|_{\mathscr{L}_1} &= 4 \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, a_n\, R_1^{n-1}\, \sigma^{n-1}, \\
\mathsf{S} \big|_{\mathscr{L}_1} &= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [n(n-1)\, a_n\, R_1^{n-1}\, \sigma^{n-3} + n\, b_n\, R_1^{n-1}\, \sigma^{n-1}].
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Or, din formulele din § 14 obţinem mai întîi

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{2} h_1^0\, R_0/(R_0^2 - R_1^2), \qquad a_2 = h_2^0\, R_0^2/(R_0^4 - R_1^4), \\
&b_0 = 0,\ b_{-1} = -\, h_1^0\, R_0\, R_1^2/(R_0^2 - R_1^2),\ b_{-2} = -\, \overline{h}_2^0\, R_0^2\, R_1^4/(R_0^4 - R_1^4).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Pentru $n \geqslant 3$ găsim

$$
\begin{aligned}
a_n &= \{[(R_1/R_0)^{2n-4} - 1]\, R_0^n\, h_n^0 + (n-2)\, (R_0^2 - R_1^2)\, R_1^{2n-4}\, R_0^{-n+2}\, \overline{h}^0_{-n+2}\} : D_n, \\
a_{-n+2} &= \{[(R_0^{2n} - R_1^{2n})\, R_0^{-n+2}\, h^0_{-n+2} - n\, (R_0^2 - R_1^2)\, R_0^n\, \overline{h}_n^0]\, R_1^{2n-4}\} : D_n, \\
D_n &= n(n-2)\, R_1^{2n-4} (R_0^2 - R_1^2)^2 + (R_0^{2n} - R_1^{2n})\, [(R_1/R_0)^{2n-4} - 1],
\end{aligned}
\tag{14}
$$

şi respectiv

$$b_{n-2} = -\bar{a}_{-n+2} R_1^{-2n+4} - n a_n R_1^2, \quad b_{-n} = -\bar{a}_n R_1^{2n} + (n-2) a_{-n+2} R_1^2. \quad (15)$$

Trecînd la limită pentru $R_1 \to 0$, obţinem

$$a_0 = 0 ; \; a_1 = \frac{1}{2} h_1^0 R_0^{-1} ; \; a_n = h_n^0 R_0^{-n}, \; n \geqslant 2 ; \; a_{-n} = 0, \; n \geqslant 1 ;$$
$$b_{-n} = 0, \; n \geqslant 0 ; \; b_n = [\bar{h}_{-n}^0 - (n+2) h_{n+2}^0] R_0^{-n}, \; n \geqslant 1. \quad (16)$$

Aceste valori coincid cu valorile (4) obţinute pentru disc. Dar este evident că, pentru a calcula tensiunile, trebuie să folosim nu înseşi funcţiile-limită $\varphi(z)$, $\psi(z)$ pentru $R_1 \to 0$, ci *derivatele* lor, aşadar să ţinem seama de limitele pentru $R_1 \to 0$ ale produselor $a_n R_1^{n-1}$ şi $b_n R_1^{n-1}$, ce apar în (12). Subînţelegînd peste tot limita luată pentru $R_1 \to 0$, găsim

$$\lim a_1 = \frac{1}{2} h_1^0 R_0^{-1} ; \; \lim a_n R_1^{n-1} = 0 \text{ pentru } n \geqslant 1 ;$$
$$\lim a_{-n+2} R_1^{-n+1} = [-h_{-n+2}^0 + n \bar{h}_n^0] R_1^{n-3} R_0^{-n+2} \text{ pentru } n \geqslant 3, \quad (17)$$

de unde, separat,

$$\lim a_{-1} R_1^{-2} = [-h_{-1}^0 + 3 \bar{h}_3^0] R_0^{-1}, \; \lim a_{-n+2} R_1^{-n+1} = 0 \text{ pentru } n > 3. \quad (18)$$

Mai departe, din (13) obţinem

$$\lim b_{-1} R_1^{-2} = -h_1^0 R_0^{-1}, \quad \lim b_{-2} R_1^{-3} = 0, \quad (19)$$

iar din (15) — unde $n \geqslant 3$ — căpătăm mai întîi

$$b_{-n} R_1^{-n-1} = -\bar{a}_n R_1^{n-1} + (n-2) a_{-n+2} R_1^{-n+1},$$
$$b_{n-2} R_1^{n-3} = -\bar{a}_{-n+2} R_1^{-n+1} - n a_n R_1^{n-1},$$

ceea ce, ţinînd seama de (17) şi (18), dă în definitiv

$$\lim b_{-3} R_1^{-4} = [-h_{-1}^0 + 3 \bar{h}_3^0] R_0^{-1}, \; \lim b_1 = [\bar{h}_{-1}^0 - 3 h_3^0] R_0^{-1}, \quad (20)$$

termenii corespunzători celorlalte valori ale indicelui n avînd limita zero.

După cum se vede, deşi coeficienţii a_{-1}, b_{-1}, b_{-3} din (16) au limita zero, componentele tensiunii conţin termeni (polari) care corespund acestor coeficienţi. Obţinem acum din (12)

$$\lim S_0|_{\mathscr{L}_1} = 4 \lim \operatorname{Re}(a_1 - a_{-1} R_1^{-2} \sigma^{-2}),$$
$$\lim S|_{\mathscr{L}_1} = 2 \lim (2 a_{-1} R_1^{-2} \sigma^{-4} + b_1 - b_{-1} R_1^{-2} \sigma^{-2} - 3 b_{-3} R_1^{-4} \sigma^{-4}),$$

ceea ce permite să calculăm tensiunile-limită în origine

$$S_0(0,0) = 2 [h_1^0 + (h_{-1}^0 - 3 \bar{h}_3^0) \sigma^2 + (\bar{h}_{-1}^0 - 3 h_3^0) \sigma^{-2}] R_0^{-1},$$
$$S(0,0) = 2 [\bar{h}_{-1}^0 - 3 h_3^0 + h_1^0 \sigma^{-2} + (h_{-1}^0 - 3 \bar{h}_3^0) \sigma^{-4}] R_0^{-1}. \quad (21)$$

După cum era de aşteptat, spre deosebire de cazul torsiunii şi încovoierii — unde fenomenul concentrării tensiunilor e funcţie exclusiv de configuraţia geometrică — aci termenii suplimentari în raport cu (9) depind în mod esenţial de sarcina pe $\mathscr{L}_0$.

Limitîndu-ne la cazul discului supus la presiune uniformă de intensitate $-p_0$, din (14.52) urmează $h_1^0 = -R_0 p_0$, ceilalţi coeficienţi fiind nuli. Considerînd aceeaşi problemă şi pentru coroana circulară cu $R_1 \to 0$, obţinem din (9) şi (21):

$$\begin{cases} \text{pentru disc:} & S_0(0,0) = -2p_0, \quad S(0,0) = 0, \\ \text{pentru coroană:} & S_0(0,0) = -2p_0, \quad S(0,0) = -2p_0\sigma^{-2}, \end{cases} \tag{22}$$

sau încă

$$\begin{cases} \text{pentru disc:} & \sigma_{11} = -p_0, \quad \sigma_{22} = -p_0, \quad \sigma_{12} = 0, \\ \text{pentru coroană:} & \sigma_{11} = -p_0(1-\cos 2\chi), \\ & \sigma_{22} = -p_0(1+\cos 2\chi), \quad \sigma_{12} = p_0 \sin 2\chi. \end{cases} \tag{23}$$

Prin urmare, nu numai repartiţia locală de tensiuni este cu totul diferită, ci şi condiţiile de rezistenţă se deosebesc calitativ. Anume, întrucît în cazul discului avem $S = 0$, din (6.28) sau (6.29) rezultă că, pentru presiuni oricît de mari, corpul rămîne în starea elastică. Dimpotrivă, o fisură centrală oricît de mică obligă la considerarea condiţiei ce rezultă din (14.58) pentru $p_1 = 0$, $R_1 \to 0$. Ţinînd seama de (14.59), deducem că trebuie să avem $2p_0 < 1{,}16\ \sigma_c$, ceea ce limitează presiunea externă compatibilă cu starea de deformare elastică.

Pentru deplasări, introducînd (5) în (7.12) căpătăm în origine

$$2\mu U(0,\ 0) = \varkappa\, \varphi(0) - \overline{\psi(0)} = 0. \tag{24}$$

Pe de altă parte, introducînd (11) în (7.12), deducem

$$2\mu U|_{\mathscr{L}_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\varkappa a_n R_1^n \sigma^n - n\bar{a}_n \sigma^{-n+2} - \bar{b}_n R_1^n \sigma^{-n}], \tag{25}$$

astfel că în expresia $\lim U|_{\mathscr{L}_1}$ (pentru $R_1 \to 0$) intervin valorile $\lim a_n R_1^n$ şi $\lim b_n R_1^n$. Toate aceste limite sînt nule pentru termenii polari, astfel că deplasările nu se modifică în urma apariţiei unei fisuri punctuale centrale.

Caracterul local al fenomenului este evident: termenii suplimentari din (21) sînt termeni polari, cu atît mai importanţi, cu cît $|\mathfrak{z}|$ este mai mic. (Vezi şi § 5.15, pag. 247—248 şi 259; § 5.20, pag. 312 şi 326.)

Acest exemplu arată importanţa proprietăţii de olomorfie: simplul fapt că coeficienţii termenilor polari pot fi făcuţi oricît de mici vrem, încă nu garantează împotriva apariţiei de tensiuni locale considerabile în vecinătatea unor fisuri, fie ele chiar microscopice.

d) *Plan cu un orificiu circular*

Raționînd ca și pentru cazul discului, vom lua acum $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1^-$, iar funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili vor avea forma din (10.32). Renunțînd la indicele "1" relativ la mărimile de pe $\mathscr{L}_1$, vom păstra numai notația R_1. Prin urmare, avem mai întîi

$$a_n = b_n = 0, \qquad n = 0, 2, 3, \ldots, \tag{26}$$

iar ecuațiile (14.22)–(14.25), ținînd seama și de (10.36), devin

$$\begin{aligned} &h_0 - [(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1)]\,(X^{(1)}/2\pi)\ln R_1 + C_1 = 0, \\ &2a_1 R_1^2 + \bar{b}_{-1} = h_1 R_1, \\ &\bar{b}_{-2} = [h_2 + \overline{X^{(1)}}/2\pi(\varkappa + 1)]\,R_1^2, \\ &-(n-2)\,\bar{a}_{-n+2} R_1^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_1^{-n} = h_n, \ n \geqslant 3, \end{aligned} \tag{27}$$

și încă, înlocuind în (14.25) pe n prin $-n$ (pentru $n \geqslant 1$):

$$\begin{aligned} &a_{-1} R_1^{-1} + \bar{b}_1 R_1 = h_{-1}, \\ &a_{-n} R_1^{-n} = h_{-n}, \qquad n \geqslant 2. \end{aligned} \tag{28}$$

Întrucît $\mathscr{D}$ nu este mărginit, torsorul forțelor superficiale nu este cu necesitate nul (vezi (14.4), (14.14)). În schimb, coeficienții a_1, b_1 se pot determina numai cunoscînd valorile la infinit ale tensiunii (vezi (10.33), (10.35)). Prima relație (27) este evident superfluă. Mai departe, obținem pe rînd (constantele a_1', b_1' și b_1'' fiind date în (10.35))

$$\begin{aligned} &a_0 = 0; \quad a_1 = a_1'; \quad a_n = 0, \quad n \geqslant 2; \\ &a_{-1} = h_{-1} R_1 - (b_1' - \mathrm{i}\, b_1'') R_1^2; \quad a_{-n} = h_{-n} R_1^n, \quad n \geqslant 2; \end{aligned} \tag{29}$$

și încă

$$\begin{aligned} &b_0 = 0; \quad b_1 = b_1' + \mathrm{i}\, b_1''; \quad b_n = 0, \quad n \geqslant 2; \\ &b_{-1} = \bar{h}_1 R_1 - 2a_1' R_1^2; \quad b_{-2} = [\bar{h}_2 + X^{(1)}/2\pi(\varkappa + 1)]\,R_1^2; \\ &b_{-3} = [\bar{h}_3 + h_{-1} - (b_1' - \mathrm{i}\, b_1'') R_1]\,R_1^3; \\ &b_{-n} = [\bar{h}_n + (n-2)\,h_{-n+2}]\,R_1^n, \qquad n \geqslant 4. \end{aligned} \tag{30}$$

Introducînd aceste valori în (10.32), avem deci

$$\varphi(\mathfrak{z}) = -[X^{(1)}/2\pi(\varkappa+1)]\ln\mathfrak{z} + a_1'\mathfrak{z} - (b_1' - \mathrm{i}\,b_1'')(R_1^2/\mathfrak{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} h_{-n}(R_1/\mathfrak{z})^n,$$

$$\psi(\mathfrak{z}) = [\varkappa\overline{X^{(1)}}/2\pi(\varkappa+1)]\ln\mathfrak{z} + (b_1' + \mathrm{i}\,b_1'')\mathfrak{z} - 2a_1' R_1(R_1/\mathfrak{z}) + \tag{31}$$

$$+ [X^{(1)}/2\pi(\varkappa+1)](R_1/\mathfrak{z})^2 - (b_1' - \mathrm{i}\,b_1'')R_1(R_1/\mathfrak{z})^3 + h_1(R_1/\mathfrak{z}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}[\overline{h}_n + (n-2)\,h_{-n+2}](R_1/\mathfrak{z})^n.$$

§ 16. PROBLEMA LUI NEUMANN. METODA SERIILOR. EXEMPLE

Vom examina aci unele cazuri simple de solicitare a unor domenii mărginite de o singură frontieră circulară, cazuri ușor de studiat prin metoda seriilor.

a) Disc supus la presiune uniformă pe frontieră

Acesta este un caz particular al problemei lui Lamé. În notațiile din § 14, avem $f(\chi) = -p\exp(\mathrm{i}\chi)$ pe $\mathscr{L}_0$, de unde $h_1 = -R_0 p$, ceilalți coeficienți fiind nuli. Din (15.4) urmează — ca și în (11.21) —

$$\varphi(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{2}p\mathfrak{z}, \quad \psi(\mathfrak{z}) = 0, \tag{1}$$

astfel că formulele (7.8), (7.12) dau imediat

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p, \quad \sigma_{12} = 0, \quad u_1 + \mathrm{i}\,u_2 = -[(\varkappa-1)/4\mu]\,p\,(x_1 + \mathrm{i}\,x_2). \tag{2}$$

Pentru $p < 0$, presiunea este înlocuită cu o întindere uniformă.

b) Discul lui Hertz

Fie că în două puncte oarecare de pe frontiera unui disc acționează două forțe concentrate. Alegînd drept axă Ox_1, bisectoarea unghiului la centru definit de cele două puncte, rezultă că forțele trebuie să fie egale, opuse, și paralele cu Ox_2. Funcția $f(s)$ de considerat aci nu este integrabilă. Pentru a determina $h(s)$, vom privi forța aplicată în $\mathfrak{z}_0$ drept caz-limită al unei sarcini de moment nul față de $\mathfrak{z}_0$, repartizate pe o porțiune mică a frontierei, și în așa fel încît rezultanta acestei sarcini să rămînă constantă cînd facem ca lungimea arcului-frontieră solicitat să tindă la zero.

În acest caz, funcția $h(s) = \mathrm{i}\int_0^s f(s)\,ds$ definită în (11.6) poate fi privită ca fiind constantă pe porțiunile libere ale frontierei, și discontinuă în $\mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{z}}_0$, saltul ei fiind dat de intensitatea sarcinii concentrate. Obținem astfel

$$h(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } 0 \leqslant \chi < \chi_0, \\ P & \text{pentru } \chi_0 < \chi < 2\pi - \chi_0, \\ 0 & \text{pentru } 2\pi - \chi_0 < \chi \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{3}$$

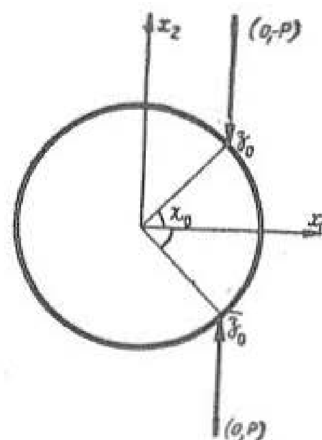


Fig. 6.16.1

OBSERVAȚIA 1. Modul de a raționa de mai sus este identic cu cel folosit pentru introducerea funcției δ a lui Dirac. (Vezi § A.2, pag. 689). Sarcina nu numai că nu posedă aci proprietățile de regularitate pretinse în § 14, pag. 437 și 444, dar nici măcar nu este reprezentabilă printr-o funcție, ci numai printr-o distribuție. Raționamentul ce urmează poate fi transcris — totuși fără simplificări esențiale — cu ajutorul funcției δ și al funcției lui Heaviside. Acestea sînt larg utilizate în problema — mai complicată — a coroanei circulare supuse acțiunii unor sarcini concentrate (vezi M. Narodețki [1]; I. Ustinov [1]; D. Vainberg [1]).

Întrucît rezultanta $X^{(0)}$ este evident nulă, deducem din (14.8)

$$h(\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \exp\,(\mathrm{i}n\chi), \tag{4}$$

unde

$$h_n = \begin{cases} (P/\pi)(\pi - \chi_0) & \text{pentru } n = 0, \\ (\mathrm{i}P/2\pi n)\,[\exp\,(\mathrm{i}n\chi_0) - \exp\,(-\mathrm{i}n\chi_0)] & \text{pentru } n \neq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Introducînd (5) în (15.8), obținem mai întîi

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \frac{\mathrm{i}P}{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\,(\mathrm{i}n\chi_0) - \exp\,(-\mathrm{i}n\chi_0)}{n}\left(\frac{\mathfrak{z}}{R_0}\right)^n - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\,[\exp\,(\mathrm{i}\chi_0) - \exp\,(-\mathrm{i}\chi_0)]\,\frac{\mathfrak{z}}{R_0}\right\},$$

$$\psi(\mathfrak{z}) = \frac{\mathrm{i}P}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\exp\,(\mathrm{i}n\chi_0) - \exp\,(-\mathrm{i}n\chi_0)}{n} - [\exp\,(\mathrm{i}(n+2)\chi_0) - \right.$$

$$\left. - \exp\,(-\mathrm{i}(n+2)\chi_0)]\right\}\left(\frac{\mathfrak{z}}{R_0}\right)^n, \tag{6}$$

unde evident avem $|z/R_0| < 1$ în $\mathscr{D}$. Întrucît pentru $|x| < 1$ avem

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x^n, \quad (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{7}$$

putem scrie pe rînd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{z\exp(i\chi_0)}{R_0}\right]^n = -\ln\left[1 - \frac{z\exp(i\chi_0)}{R_0}\right] = -\ln\frac{\bar{z}_0 - z}{\bar{z}_0}, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\exp i(n+2)\chi_0]\left(\frac{z}{R_0}\right)^n = \exp(2i\chi_0)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z\exp(i\chi_0)}{R_0}\right)^n =$$

$$= \exp(2i\chi_0)\left\{\left[1 - \frac{z\exp(i\chi_0)}{R_0}\right]^{-1} - 1\right\} = \frac{z_0}{\bar{z}_0 - z} - \exp(2i\chi_0), \tag{9}$$

astfel că (6) devine

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{iP}{2\pi}\left[\ln\frac{z_0 - z}{\bar{z}_0 - z} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2R_0}\frac{z}{R_0}\right] + \frac{P\chi_0}{\pi}, \\ \psi(z) &= \frac{iP}{2\pi}\left[\ln\frac{z_0 - z}{\bar{z}_0 - z} + \frac{\bar{z}_0}{z_0 - z} - \frac{z_0}{\bar{z}_0 - z}\right] + \frac{P\chi_0}{\pi} - \frac{P\sin 2\chi_0}{\pi}. \end{aligned} \tag{10}$$

Componentele tensiunii și deplasării se calculează ușor — după care se poate constata că soluția satisface efectiv condițiile la limită considerate.

Cazul mai multor forțe concentrate va fi expus în § 22, exemplul ***b***.

c) Plan cu un orificiu circular solicitat de o presiune uniformă

Acesta este de asemenea un caz particular al problemei lui Lamé. Din (14.50) avem $f = p\exp(i\chi)$, și deci din (11.8) urmează (abstracție făcînd de o constantă)

$$h(\chi) = -i\int_0^s f(s)\,ds = -ip\,R_1\int_0^{\chi}\exp(i\chi)\,d\chi = -pR_1\exp(i\chi). \tag{11}$$

Comparînd (11) cu (14.8), deducem

$$X^{(1)} = 0, \quad h_1 = -p\,R_1, \quad h_n = 0 \text{ pentru } n \neq 1. \tag{12}$$

Presupunînd tensiunile nule la infinit, obținem acum din (15.29)—(15.31):

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = -p\,R_1^2 z^{-1}. \tag{13}$$

După cum se vede, soluția este de natură cu totul diferită de cea din (1).

d) Forță concentrată aplicată în origine

Să considerăm problema planului cu un orificiu circular de frontieră $|\mathfrak{z}| = R_1$, solicitat de o sarcină $f(s) = f =$ const. (A nu se confunda cu presiunea normală constantă!) Din (11.8) avem deci

$$h(\chi) = -\mathrm{i}\int_0^s f\,\mathrm{d}s = -\mathrm{i}\,f R_1 \chi, \tag{14}$$

iar din (10.16) urmează

$$X^{(1)} = \oint_{\mathscr{L}_1} f\,\mathrm{d}s = 2\pi f R_1, \tag{15}$$

și deci

$$f(\chi) = X^{(1)}/2\pi R_1, \quad h(\chi) = -(X^{(1)}/2\pi)\mathrm{i}\chi. \tag{16}$$

Prin comparație cu (14.8) deducem că toți coeficienții h_n sînt nuli. Dacă tensiunile sînt nule la infinit, deducem din (15.31)

$$\varphi(\mathfrak{z}) = -\frac{X^{(1)}}{2\pi(\varkappa+1)}\ln\mathfrak{z}, \quad \psi(\mathfrak{z}) = \frac{\varkappa\overline{X^{(1)}}}{2\pi(\varkappa+1)}\ln\mathfrak{z} + \frac{X^{(1)}}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{R_1^2}{\mathfrak{z}^2}. \tag{17}$$

Ținînd seama de (8.12), obținem pe orice curbă închisă care conține în interior cercul $|\mathfrak{z}| = R_1$, independent de raza acestuia:

$$\mathsf{R} = -X^{(1)}, \quad \mathscr{M}_3 = 0, \tag{18}$$

așadar un sistem de tensiuni ce echilibrează o forță $X^{(1)}$ aplicată în origine. Pentru $R_1 \to 0$, căpătăm deci de aci soluția problemei planului elastic solicitat de o forță concentrată $X^{(1)}$ aplicată în origine.

Soluția (17) pentru $R_1 \to 0$ coincide cu (10.44), în afară de vecinătatea imediată a frontierei $|\mathfrak{z}| = R_1$, unde al doilea termen din $\psi(\mathfrak{z})$ dat de (17) nu este neglijabil. Întrucît acesta corespunde însă unei sarcini auto-echilibrate, urmează că ambele soluții corespund acțiunii aceleiași forțe concentrate $X^{(1)}$. Cele două soluții sînt distincte, și totuși în egală măsură îndreptățite: amîndouă își pierd sensul pentru $|\mathfrak{z}| \to 0$, și coincid pentru $R_1/|\mathfrak{z}|$ neglijabil.

e) Moment concentrat aplicat în origine

Să considerăm frontiera circulară $|\mathfrak{z}| = R_1$ solicitată de o sarcină tangențială de intensitate constantă, așadar avînd forma $f = \mathrm{i}c\mathfrak{z}$ (c — constantă reală). Din (11.8) avem deci — abstracție făcînd de o constantă neglijabilă —

$$h(\chi) = -\mathrm{i}\int_0^\chi f R_1\,\mathrm{d}\chi = cR_1^2\int_0^\chi \exp(\mathrm{i}\chi)\mathrm{d}\chi = -\mathrm{i}cR_1^2\exp(\mathrm{i}\chi), \tag{19}$$

astfel că, comparînd cu (14.8), deducem

$$X^{(1)} = 0, \quad h_1 = -\mathrm{i}cR_1^2, \quad h_n = 0 \text{ pentru } n \neq 1. \tag{20}$$

Presupunînd că tensiunile la infinit sînt nule, din (15.31) căpătăm :

$$\varphi(\mathfrak{z}) = 0, \quad \psi(\mathfrak{z}) = \mathrm{i}cR_1^3\mathfrak{z}^{-1}, \quad \chi(\mathfrak{z}) = \mathrm{i}cR_1^3 \ln \mathfrak{z}. \tag{21}$$

Ţinînd seama de (8.12), obţinem pe orice curbă închisă care conţine în interior cercul $|\mathfrak{z}| = R_1$, independent de raza acestuia :

$$\mathsf{R} = 0, \ \mathcal{M}_3 = -2\pi c R_1^3, \tag{22}$$

astfel că (21) corespunde unui sistem de tensiuni ce echilibrează un cuplu de moment $2\pi c R_1^3$ aplicat în origine. Notînd cu $M_3^{(1)}$ *momentul acestui din urmă cuplu*, egal cu $-\mathcal{M}_3$, obţinem $c = M_3^{(1)}/2\pi R_1^3$, astfel că (21) se reduce la (10.45) :

$$\varphi(\mathfrak{z}) = 0, \quad \psi(\mathfrak{z}) = (\mathrm{i}M_3^{(1)}/2\pi)\mathfrak{z}^{-1}. \tag{23}$$

OBSERVAŢIA 2. În aceste două exemple, soluţia problemei pentru sarcini concentrate rezultă deplin determinată (compară cu § 8, pct. c), datorită faptului că a fost ales *un anumit* mod de trecere la limită. Dar se poate alege cu totul altă structură a sarcinilor decît cea din (14), respectiv (19), păstrînd totuşi intacte relaţia (15) şi prima relaţie (20); se va ajunge atunci la cu totul alte funcţii $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})$. Ţinînd seama de (15.31) în (7.19), se vede că termenii ce corespund coeficienţilor h_n tind spre zero odată cu $R_1/|\mathfrak{z}|$: toate aceste soluţii posibile sînt deci distincte, dar deosebirea între ele scade odată cu creşterea distanţei la punctul singular.

Determinarea efectului unei sarcini concentrate se poate preciza şi dacă dispunem de informaţii asupra comportării corpului la oarecare distanţă de punctul singular (de ex., dacă cunoaştem vectorul tensiune pe un cerc cu centrul în acest punct). Aceasta revine la a se adopta o schemă mai exactă a fenomenului, decît cea redusă la simpla informaţie privitoare la punctul singular.

Pentru chestiunea sarcinilor concentrate, vezi şi L. Milne-Thomson [2], § 4.11; N. Mushelişvili [5], §§ 43 şi 57.

f) Plan cu un orificiu circular liber. Concentrarea tensiunilor

În cazul de faţă avem $h(\chi) = 0$, $X^{(1)} = h_n = 0$, şi starea elastică depinde de repartiţia tensiunilor la infinit. Formulele (15.31) se reduc la

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{z}) &= a_1'\mathfrak{z} - (b_1' - \mathrm{i}b_1'')\, R_1^2\, \mathfrak{z}^{-1}, \\ \psi(\mathfrak{z}) &= (b_1' + \mathrm{i}b_1'')\,\mathfrak{z} - 2a_1'\, R_1^2\, \mathfrak{z}^{-1} - (b_1' - \mathrm{i}b_1'')\, R_1^4\, \mathfrak{z}^{-3}. \end{aligned} \tag{24}$$

Pentru o întindere la infinit după direcţia Ox_1 ($\sigma_{11}^{\infty} = P_1$, $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0$), obţinem (compară şi cu (22.39))

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{1}{2} z + R_1^2 z^{-1} \right), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2} P_1 (z + R_1^2 z^{-1} - R_1^4 z^{-3}). \tag{25}$$

În cazul unei întinderi la infinit după direcţia Ox_2, se găseşte

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} P_2 \left(\frac{1}{2} z - R_1^2 z^{-1} \right), \quad \psi(z) = \frac{1}{2} P_2 (z - R_1^2 z^{-1} - R_1^4 z^{-3}). \tag{26}$$

În fine, în cazul unei tensiuni de alunecare T la infinit, avem

$$\varphi(z) = \mathrm{i} T R_1^2 z^{-1}, \quad \psi(z) = \mathrm{i} T (z + R_1^4 z^{-3}). \tag{27}$$

În particular, pentru $P_1 = P_2 = P$, obţinem prin suprapunere din (25) şi (26) soluţia pentru întindere uniformă la infinit

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} P z, \quad \psi(z) = -P R_1^2 z^{-1}, \tag{28}$$

iar dacă $P_1 = -P_2 = P$, atunci căpătăm

$$\varphi(z) = P R_1^2 z^{-1}, \quad \psi(z) = -P (z - R_1^4 z^{-3}). \tag{29}$$

Formulele (27) şi (29) trebuie să descrie aceeaşi stare (alunecare pură la infinit) în axe rotite unele faţă de celelalte de 45° (vezi § 3.4, pag. 91). Aceasta se verifică cu ajutorul formulelor (9.10) şi (9.24), care devin

$$z = [\exp(\mathrm{i}\pi/4)] z^1, \quad \varphi(z) = [\exp \mathrm{i}\pi/4] \varphi_1(z^1), \quad \psi(z) = [\exp(-\mathrm{i}\pi/4)] \psi_1(z^1). \tag{30}$$

Din (27) obţinem mai întîi

$$\varphi_1(z^1) = \mathrm{i} T R_1^2/z^1 = \mathrm{i} T \frac{R_1^2}{[\exp(-\mathrm{i}\pi/4)] z},$$
$$\psi_1(z^1) = \mathrm{i} T \left\{ [\exp(-\mathrm{i}\pi/4)] z + \frac{R_1^4}{[\exp(-3\mathrm{i}\pi/4)] z^3} \right\}, \tag{31}$$

de unde soluţia, care coincide cu (29) pentru $P = -T$:

$$[\exp(\mathrm{i}\pi/4)] \varphi_1(z^1) = -T R_1^2 z^{-1}, \quad [\exp(-\mathrm{i}\pi/4)] \psi_1(z^1) = T (z - R_1^4 z^{-3}). \tag{32}$$

Formulele (24)—(32) rezolvă problema concentrării de tensiuni în vecinătatea unui orificiu circular liber, într-un corp de dimensiuni suficient de mari faţă de cele ale orificiului.

Limitîndu-ne pentru exemplificare la cazul planului cu un orificiu circular liber, supus la infinit la o întindere $\sigma_{11}^{\infty} = P_1 > 0$, să determinăm mărimea $|S|$, ale cărei valori maxime caracterizează punctele cele mai solicitate.

Vom atribui în general un indice (i) (stare *inițială*) soluției corespunzătoare corpului *fără* orificiu, supus aceleiași sarcini, și un indice (p) termenilor *perturbatori* datorați prezenței orificiului; soluția problemei cercetate, așadar suma termenilor (i) și (p), se va scrie fără vre-un indice suplimentar.

În cazul planului fără orificiu, din (10.32) urmează (întrucît funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili sînt acum olomorfe inclusiv în origine) că avem $\varphi^{(i)}(\mathfrak{z}) = a_1\mathfrak{z}$, $\psi^{(i)}(\mathfrak{z}) = b_1\mathfrak{z}$, unde, ținînd seama de (10.35), (10.36), trebuie să punem $a_1 = P_1/4$, $b_1 = -P_1/2$.

Funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili se scriu deci

$$\varphi^{(i)}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{4} P_1\mathfrak{z}, \quad \psi^{(i)}(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{2} P_1\mathfrak{z}, \tag{33}$$

iar criteriul de plasticitate (7.28) conduce la valoarea constantă

$$|S^{(i)}| = P_1. \tag{34}$$

Pe de altă parte, introducînd (25) în (7.28), obținem

$$|S| = P_1 \,|1 - [1 + 2(\bar{\mathfrak{z}}/\mathfrak{z}) - 3(R_1^2/\mathfrak{z}^2)]\,(R_1^2/\mathfrak{z}^2)|. \tag{35}$$

Se poate demonstra că punctele cele mai solicitate sînt situate pe $\mathscr{L}$. De altfel, din formula (35) se vede că pe măsură ce $|\mathfrak{z}|$ crește, $|S|$ tinde către valoarea sa din planul solicitat la infinit, *fără* orificiu. Termenul perturbator scade proporțional cu *pătratul* raportului $R_1/|\mathfrak{z}|$. Toate acestea subliniază caracterul *local* al fenomenului, care e din nou un fenomen de concentrare a tensiunilor.

Să determinăm maximul funcției (35) în puncte $\mathfrak{z} = R_1 \exp(i\chi)$. Obținem mai întîi

$$|S|_{\mathscr{L}_1} = P_1 \,|1 - \exp(-2i\chi) + \exp(-4i\chi)| = |P_1|\,|1 - 2\cos 2\chi|. \tag{36}$$

Maximul acestei funcții este atins pentru $\chi = \pm \pi/2$, așadar în punctele $\mathfrak{z} = \pm i R_1$. Punctele de maximă solicitare sînt deci situate la capetele acelui diametru al frontierei orificiului, care este perpendicular pe direcția sarcinii la infinit. În aceste puncte avem

$$|S|_{\mathscr{L}_1}^{\max} = 3 P_1, \tag{37}$$

ceea ce reprezintă o valoare de trei ori mai mare decît cea din (34).

Ținînd încă seama în (7.27) de expresiile (33) și (25), obținem pentru componenta normală a tensiunii pe direcția de acțiune a sarcinii la infinit

$$\sigma_{11}^{(i)} = P_1, \quad \sigma_{11} = P_1 \operatorname{Re}\left[1 - \frac{3}{2}(R_1^2/\mathfrak{z}^2) - R_1^2(\bar{\mathfrak{z}}/\mathfrak{z}^3) + \frac{3}{2}(R_1^4/\mathfrak{z}^4)\right]. \tag{38}$$

Calculînd valoarea σ_{11} în lungul axei Ox_2 (care trece prin punctele de maximă solicitare), căpătăm în diferite puncte valorile din tabel:

$\lvert\mathfrak{z}\rvert/R_1$	1,0	1,5	2,0	3,0
σ_{11}/P_1	3	1,52	1,22	1,07

Faptul că datorită prezenței orificiului atît $\lvert S \rvert$ cît și σ_{11} cresc tot de trei ori în $\mathfrak{z} = \pm \mathrm{i} R_1$ nu este aci întîmplător; pe $\mathscr{L}$, în aceste puncte avem $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$. În general însă, coeficientul de concentrare rezultă diferit, după cum se calculează tensiunea normală maximă (importantă în special la corpurile casante), sau valoarea $\lvert S \rvert$ (al cărei maxim ne interesează mai ales în cazul unui corp elasto-plastic). (Compară de ex. cu § 14, pag. 445 – 446. Vezi și mai departe § 8.6, pag. 587.)

§ 17. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU COROANA CIRCULARĂ. METODA INTEGRALELOR DE TIP CAUCHY (METODA LUI MILNE-THOMSON)

După cum am văzut în studiul problemei anti-plane, utilizarea integralelor de tip Cauchy este adesea susceptibilă de a simplifica considerabil calculele. Vom expune aci soluția dată de L. Milne-Thomson [2], § 5.5 (vezi și Corrigenda), pentru domeniul $\mathscr{D}$ mărginit de două cercuri concentrice $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1$.

a) *Domeniu cu frontieră circulară*

Să considerăm deocamdată domeniul (mărginit sau nu) ce are drept frontieră cercul $\mathscr{L}_0$. Trecerea la coordonate polare se efectuează cu ajutorul formulelor (9.16), (9.20), unde unghiul ϑ coincide cu χ, iar componentele tensiunii se notează acum cu $\widehat{RR}$, $\widehat{R\chi}$, $\widehat{\chi\chi}$ (vezi § 4.1, pag. 121).

Scăzînd termen cu termen relațiile menționate, avem mai întîi

$$2(\widehat{RR} - \mathrm{i}\,\widehat{R\chi}) = S_0 - S \exp\,(2\mathrm{i}\chi). \tag{1}$$

Trecînd la cantități complex conjugate, ținînd seama de (7.7), (7.8) și de faptul că pe orice cerc avem $\exp\,(2\mathrm{i}\chi) = \mathfrak{z}/\bar{\mathfrak{z}}$, vom scrie (1) sub forma

$$\widehat{RR} + \mathrm{i}\widehat{R\chi} = \Phi(\mathfrak{z}) + \overline{\Phi(\mathfrak{z})} - \overline{\mathfrak{z}\Phi'(\mathfrak{z})} - (\bar{\mathfrak{z}}/\mathfrak{z})\,\overline{\Psi(\mathfrak{z})}. \tag{2}$$

Să introducem notația

$$\bar{F}(\mathfrak{z}) \equiv \overline{F(\bar{\mathfrak{z}})}. \tag{3}$$

Aceasta înseamnă că, dacă $F(z) = \Sigma F_n z^n$, atunci $\overline{F}(z) = \Sigma \overline{F}_n z^n$. Din (3) urmează evident și $\overline{F(z)} = \overline{F}(\bar{z})$. Cu aceasta, (2) va lua forma

$$\widehat{RR} + i\,\widehat{R\chi} = \Phi(z) + \overline{\Phi}(\bar{z}) - z\,\overline{\Phi}'(\bar{z}) - (\bar{z}/z)\overline{\Psi}(\bar{z}). \quad (4)$$

Să *asociem* acum punctului z, punctul $Z = R_0^2/\bar{z} = (R_0^2/R)\exp(i\chi)$, simetric lui față de cercul $\mathscr{L}_0$ (compară cu § A.11, pag. 781, unde $R_0 = 1$). În mod evident, dacă $z \in \mathscr{D}_0^+$, atunci $Z \in \mathscr{D}_0^-$ și reciproc; iar dacă $z \to t \in \mathscr{L}_0$, atunci avem și $Z \to t$.

Să considerăm acum funcția ce se obține din membrul al doilea al relației (4), dacă înlocuim pe z prin Z (lăsînd însă pe $\bar{z}$ intact), și dacă egalăm această expresie cu zero. După această operație *strict formală*, căpătăm mai întîi

$$\Phi(Z) + \overline{\Phi}(\bar{z}) - z\,\overline{\Phi}'(\bar{z}) - (\bar{z}/Z)\overline{\Psi}(\bar{z}) = 0, \quad (5)$$

ceea ce se va scrie sub forma

$$\Phi(Z) = -\overline{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\,\overline{\Phi}'(\bar{z}) + (\bar{z}^2/R_0^2)\overline{\Psi}(\bar{z})$$

$$\text{pentru} \begin{cases} z \in \mathscr{D}_0^+, \ Z = R_0^2/\bar{z} \in \mathscr{D}_0^-, \\ \text{sau} \\ z \in \mathscr{D}_0^-, \ Z = R_0^2/\bar{z} \in \mathscr{D}_0^+. \end{cases} \quad (6)$$

Această relație *definește* funcția Φ (inițial dată numai în $\mathscr{D}_0^+$ *sau* în $\mathscr{D}_0^-$) în *tot* planul cu o tăietură în lungul cercului $\mathscr{L}_0$.

Să amintim acum că din (10.22) și (10.32) urmează că funcțiile $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ sînt olomorfe în domeniul (mărginit sau nu) ocupat de corpul elastic, exceptînd cel mult poli de ordin zero la infinit.

Prin urmare, dacă acest domeniu este cercul $\mathscr{D}_0^+$, relația (6) arată că $\Phi(Z)$ este olomorfă pentru $Z \in \mathscr{D}_0^-$, cu excepția punctului de la infinit, unde ea are eventual un pol de ordin zero (provenit din termenul $-\overline{\Phi}(\bar{z})$. Dimpotrivă, dacă corpul ocupă domeniul $\mathscr{D}_0^-$, atunci funcțiile $\overline{\Phi}(\bar{z})$ și $\overline{\Psi}(\bar{z})$ au forma unor dezvoltări în serii după puterile negative ale lui $\bar{z}$ (așadar, după puterile pozitive ale lui Z), și funcția $\Phi(Z)$ este olomorfă în $\mathscr{D}_0^+$, cu excepția originii, unde ea poate avea un pol de ordin cel mult 2.

Să scădem acum termen cu termen relațiile (2) și (5), ceea ce dă

$$\widehat{RR} + i\widehat{R\chi} = \Phi(z) - \Phi(Z) - \bar{z}(z^{-1} - Z^{-1})\,\overline{\Psi(z)}. \quad (7)$$

Luînd aci $z \to t \in \mathscr{L}_0$, avem totodată și $Z \to t$, și deci

$$\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}|_{\mathscr{L}_0} = \Phi_+(t) - \Phi_-(t) \quad (8)$$

(dacă, de ex., domeniul ocupat de corp este $\mathscr{D}_0^+$).

Prin urmare, funcția $\Phi(z)$ trebuie determinată din condiția ca ea să fie olomorfă pe porțiuni în tot planul (exceptînd eventual origina și

punctul de la infinit), iar la traversarea lui $\mathscr{L}_0$, valoarea saltului să fie egală în fiecare punct cu tensiunea complexă. (Se vede că porțiunile libere ale frontierei sînt porțiuni prin care funcția se prelungește prin continuitate din $\mathscr{D}_0^+$ în $\mathscr{D}_0^-$; compară cu § A.11, pag. 782.)

Or, din prima formulă (A.11.9) rezultă că funcția $\tilde{\Phi}$, olomorfă pe porțiuni în tot planul, nulă la infinit, şi care verifică relația (8), este chiar integrala de tip Cauchy (A.11.1):

$$\tilde{\Phi}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}}{t - \mathfrak{z}}\, dt. \tag{9}$$

Prin urmare, soluția problemei considerate şi care posedă singularitățile menționate, este funcția

$$\Phi(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}}{t - \mathfrak{z}}\, dt + A_0 + A_{-1}\mathfrak{z}^{-1} + A_{-2}\mathfrak{z}^{-2}, \tag{10}$$

unde $A_0 = \overline{A}_0$ (vezi (10.36)); dacă corpul elastic ocupă domeniul $\mathscr{D}_0^+$, atunci avem şi $A_{-1} = A_{-2} = 0$. Menționăm că sensul de integrare este întotdeauna cel direct; în cazul domeniului $\mathscr{D}_0^-$, trebuie schimbat sensul normalei.

După ce funcția $\Phi(\mathfrak{z})$ a fost găsită, din relația (6) obținem

$$\Psi(\mathfrak{z}) = (R_0^2/\mathfrak{z}^2)\,[\overline{\Phi}(R_0^2/\mathfrak{z}) + \Phi(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\Phi'(\mathfrak{z})]. \tag{11}$$

Desigur, funcția $\Phi(\mathfrak{z})$ are expresii analitice diferite în $\mathscr{D}_0^+$ şi $\mathscr{D}_0^-$, fapt care trebuie ținut în seamă cînd se utilizează formula (11).

De asemenea, se vede uşor că dacă înlocuim Z prin $\mathfrak{z}$, va trebui să înlocuim şi $\bar{\mathfrak{z}} = R_0^2/Z$ prin $R_0^2/\mathfrak{z}$, şi atunci formula (6) va deveni

$$\Phi(\mathfrak{z}) = -\overline{\Phi}(R_0^2/\mathfrak{z}) + (R_0^2/\mathfrak{z})\overline{\Phi}'(R_0^2/\mathfrak{z}) + (R_0^2/\mathfrak{z}^2)\,\overline{\Psi}(R_0^2/\mathfrak{z}). \tag{12}$$

b) Problema coroanei circulare

Să facem uz acum de formulele (11) şi (12) atît relativ la cercul frontieră exterior $\mathscr{L}_0$, cît şi la cel interior $\mathscr{L}_1$ al coroanei considerate $\mathscr{D}$. Din (12) obținem

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{z}) &= -\overline{\Phi}(R_0^2/\mathfrak{z}) + (R_0^2/\mathfrak{z})\overline{\Phi}'(R_0^2/\mathfrak{z}) + (R_0^2/\mathfrak{z}^2)\overline{\Psi}(R_0^2/\mathfrak{z}), \text{ pentru } R_0^2/\mathfrak{z} \in \mathscr{D},\\ \Phi(\mathfrak{z}) &= -\overline{\Phi}(R_1^2/\mathfrak{z}) + (R_1^2/\mathfrak{z})\overline{\Phi}'(R_1^2/\mathfrak{z}) + (R_1^2/\mathfrak{z}^2)\overline{\Psi}(R_1^2/\mathfrak{z}), \text{ pentru } R_1^2/\mathfrak{z} \in \mathscr{D},\end{aligned} \tag{13}$$

unde am scos în evidență faptul că argumentul funcțiilor din membrul al doilea trebuie să fie situat în domeniul în care aceste funcții sînt olo-

morfe. De aci rezultă că prima relație (13) este valabilă pentru $(R_0^2/R_1) > R > R_0$, iar cea de-a doua este valabilă pentru $R_1 > R > (R_1^2/R_0)$.

În ce privește relația (11), ea capătă formele

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= (R_0^2/z^2)\,[\bar{\Phi}(R_0^2/z) + \Phi(z) - z\Phi'(z)] \quad \text{pentru } z \in \mathscr{D}, \\ \Psi(z) &= (R_1^2/z^2)\,[\bar{\Phi}(R_1^2/z) + \Phi(z) - z\Phi'(z)] \quad \text{pentru } z \in \mathscr{D}, \end{aligned} \tag{14}$$

simultan valabile în coroana $\mathscr{D}$. De aci rezultă *identitatea lui Milne-Thomson*

$$(R_0^2 - R_1^2)\,[\Phi(z) - z\Phi'(z)] = R_1^2\bar{\Phi}(R_1^2/z) - R_0^2\bar{\Phi}(R_0^2/z) \text{ pentru } z \in \mathscr{D}. \tag{15}$$

Fie acum date valorile la limită ale tensiunii complexe $\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}$ pe $\mathscr{L}_0$ și $\mathscr{L}_1$. Condiția la limită a problemei se va scrie (vezi (8)):

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathscr{D}}(t) - \Phi_{\infty}(t) &= \widehat{RR} + i\widehat{R\chi} \qquad \text{pe } \mathscr{L}_0, \\ \Phi_{\mathscr{D}}(t) - \Phi_0(t) &= \widehat{RR} + i\widehat{R\chi} \qquad \text{pe } \mathscr{L}_1, \end{aligned} \tag{16}$$

unde am atribuit indicii 0, $\mathscr{D}$ și ∞ valorilor la limită dinspre $\mathscr{D}_1^+$ (care conține originea), dinspre $\mathscr{D}$, respectiv dinspre $\mathscr{D}_0^-$ (a cărui frontieră conține punctul de la infinit).

Să construim funcția $\Phi(z)$ definită pe porțiuni precum urmează:

$$\Phi_{\infty}(z) = A(z) \qquad \text{pentru } z \in \mathscr{D}_0^-, \tag{17}$$

$$\Phi_{\mathscr{D}}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}}{t - z}\,dt + A(z) \qquad \text{pentru } z \in \mathscr{D}, \tag{18}$$

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}}{t - z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_1} \frac{\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}}{t - z}\,dt + A(z)$$

$$\text{pentru } z \in \mathscr{D}_1^+, \tag{19}$$

unde în integranzi apar tensiunile *exterioare* aplicate pe frontieră, iar $A(z)$ este continuă în coroana de raze R_0^2/R_1 și R_1^2/R_0. Dat fiind că integralele de pe $\mathscr{L}_0$ (respectiv $\mathscr{L}_1$) sînt continue la traversarea curbei $\mathscr{L}_1$ (respectiv $\mathscr{L}_0$), urmează că funcția definită în (17)–(19) verifică condițiile (16). În ce privește funcția $A(z)$ ea trebuie determinată cu ajutorul identității (15). Întrucît pentru $z \in \mathscr{D}$ avem $R_1^2/z \in \mathscr{D}_1^+$ și $R_0^2/z \in \mathscr{D}_0^-$, urmează că în primul membru din (15) trebuie să utilizăm formula (18), iar în cel de-al doilea, formulele (19) și (17).

c) Exemplu. Problema lui Lamé

Ne mărginim la a exemplifica această tehnică pe o problemă deja cercetată (vezi § 14, pag. 445). Prin ipoteză avem

$$\widehat{RR} + \mathrm{i}\,\widehat{R\chi} = \begin{cases} -p_0 & \text{pe } \mathscr{L}_0, \\ p_1 & \text{pe } \mathscr{L}_1. \end{cases} \tag{20}$$

Ţinînd seama şi de (A.10.14), obţinem din (17)—(19) expresiile

$$\Phi_\infty(\mathfrak{z}) = A(\mathfrak{z}) \qquad \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}_0^-, \tag{21}$$

$$\Phi_{\mathscr{D}}(\bar{\mathfrak{z}}) = -p_0 + A(\mathfrak{z}) \qquad \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}\ , \tag{22}$$

$$\Phi_0(\mathfrak{z}) = -p_0 + p_1 + A(\mathfrak{z}) \qquad \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}_1^+. \tag{23}$$

Introducind aceste expresii în identitatea (15), căpătăm

$$A(\mathfrak{z}) = A_0 = \frac{1}{2}\,p_0 - \frac{1}{2}\,R_1^2(p_0 - p_1)/(R_0^2 - R_1^2), \tag{24}$$

astfel că din (22) urmează

$$\Phi(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2}\,(R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0)/(R_0^2 - R_1^2),\ \ \mathfrak{z} \in \mathscr{D}. \tag{25}$$

Pentru a găsi pe $\Psi(\mathfrak{z})$, putem face uz de oricare din relaţiile (14), de pildă de prima. Pentru aceasta, din (21) deducem mai întîi

$$\Phi_\infty(\mathfrak{z}) = A_0,\quad \mathfrak{z} \in \mathscr{D}_0^-. \tag{26}$$

Introducind acum (22) şi (24)—(26) în (14), căpătăm

$$\Psi(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{2}\,[R_0^2 R_1^2 (p_0 - p_1)/(R_0^2 - R_1^2)]\,\mathfrak{z}^{-2},\ \ \mathfrak{z} \in \mathscr{D}. \tag{27}$$

Comparînd (25) şi (27) cu (14.57), constatăm că rezultatele coincid.

d) Concluzii

Metoda integralelor de tip Cauchy îşi manifestă superioritatea atunci cînd dezvoltarea în serie Fourier a datelor la limită conţine mulţi, eventual o infinitate de termeni. Totuşi, determinarea funcţiei $A(\mathfrak{z})$ obligă întotdeauna la scrierea primilor termeni din aceste dezvoltări. Mai mult chiar : dacă sarcina prezintă singularităţi în $\mathscr{D}$, pot apare cazuri în care funcţia $A(\mathfrak{z})$ să trebuiască aleasă sub forma unei serii Laurent — şi atunci avantajele metodei integralelor de tip Cauchy sînt în fapt reduse la zero. (Un astfel de exemplu este prezentat de T. Mitchell şi W. Warren [1].)

În legătură cu această metodă, vezi încă V. Buchwald [1], [2], şi V. Buchwald şi G. Davies [1].

§ 18. TRANSFORMAREA RELAȚIILOR ELASTICITĂȚII PLANE PRIN INTERMEDIUL REPREZENTĂRII CONFORME

Studiul problemelor din §§ 14—17 prezintă în sine un interes relativ redus. Importanța sa deosebită stă însă în faptul că el permite rezolvarea acelorași probleme pentru *orice* domenii ce pot fi reprezentate conform pe o coroană circulară (sau pe un disc). Cazul domeniilor mărginite de o singură curbă este cel mai simplu ; în schimb, dificultățile devin considerabile pentru domenii de ordin de conexiune superior lui 2.

Ca și în cazul problemei anti-plane (vezi §§ 5.17 și 5.21), începem prin a transcrie în coordonate naturale relațiile necesare. Fie deci

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) \tag{1}$$

funcția ce reprezintă conform discul unitate, o coroană circulară, sau discul unitate cu un număr de orificii circulare din planul ζ, — pe domeniul considerat $\mathscr{D}$ din planul $\mathfrak{z}$. Inversa acestei funcții este

$$\zeta = \omega^{-1}(\mathfrak{z}). \tag{2}$$

Ca și în (A.7.4), vom scrie

$$\varphi_{(1)}(\mathfrak{z}) = \varphi(\zeta), \qquad \psi_{(1)}(\mathfrak{z}) = \psi(\zeta), \tag{3}$$

$$\varphi'_{(1)}(\mathfrak{z}) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \qquad \psi'_{(1)}(\mathfrak{z}) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta). \tag{4}$$

Folosind notațiile (7.7) avem deci în planul ζ relațiile

$$\Phi_{(1)}(\mathfrak{z}) = \Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \quad \Psi_{(1)}(\mathfrak{z}) = \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \tag{5}$$

diferite de cele analoge din planul $\mathfrak{z}$.

Formulele fundamentale (7.8) și (7.12) devin acum

$$\begin{gathered} S_0 = 4\,\mathrm{Re}[\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)], \quad S = 2\,\{[\overline{\omega(\zeta)}/\omega'(\zeta)]\,\Phi'(\zeta) + \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta)\}, \\ 2\mu U = \varkappa\varphi(\zeta) - [\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}]\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}. \end{gathered} \tag{6}$$

Evident, acestea sînt componente în *coordonate carteziene*, transcrise cu ajutorul funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili exprimate în coordonate naturale. Pentru a obține deplasările și tensiunile în coordonate naturale, este suficient să facem uz de formulele (A.7.7), (A.7.8) și (9.21)—(9.24).

Dacă funcția (2) poate fi scrisă explicit, din (6) obținem efectiv componentele tensiunii și deplasării în planul $\mathfrak{z}$. În caz contrar, relațiile (6) și (1) dau soluția problemei sub formă parametrică. Cu aceasta, problema este redusă la cea a determinării funcțiilor $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ din condițiile (11.1) sau (11.7), transcrise în coordonate naturale.

Desigur, datele la limită trebuie și ele convenabil transcrise în prealabil. Astfel de exemplu, vom avea

$$g_{(1)}(s) = g_{(1)}(t, \bar{t}) = g_{(1)}[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}]|_{\mathcal{J}} = g(\zeta, \bar{\zeta})|_{\mathcal{J}}, \tag{7}$$

şi o relaţie analogă pentru $h_{(1)}(s)$. Dacă $\mathscr{D}$ e reprezentabil conform pe un disc, frontiera Γ este desigur γ, iar funcţia $g(\zeta, \overline{\zeta})|_{\Gamma}$ se poate scrie $g(\sigma)$.

Întrucît în cazul problemei lui Neumann este dată numai funcţia $f_{(1)}(s)$, va trebui fie să scriem mai întîi pe $h_{(1)}(s)$ şi apoi să raţionăm ca în (7), fie să explicităm $f(\zeta, \overline{\zeta})|_{\Gamma}$ şi apoi să integrăm în raport cu ds, ţinînd seama de (A.7.14) şi de valoarea la limită din (1). (Dacă $\mathscr{D}$ este dublu conex, este uşor de găsit relaţia care înlocuieşte pe (A.7.14).)

În felul acesta, obţinem pentru problema lui Dirichlet

$$\varkappa\varphi(\zeta) - [\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}]\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2\mu\, g(\zeta, \overline{\zeta}) \text{ pe } \Gamma, \tag{8}$$

respectiv pentru problema lui Neumann

$$\varphi(\zeta) + [\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}]\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = h(\zeta, \overline{\zeta}) + \text{const. pe } \Gamma. \tag{9}$$

Ambele condiţii la limită pot fi grupate sub forma

$$H\varphi(\zeta) + [\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}]\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = H(\zeta, \overline{\zeta}) \text{ pe } \Gamma, \tag{10}$$

unde va trebui să luăm

pentru problema lui Dirichlet : $H = -\varkappa$, $H(\zeta, \overline{\zeta}) = 2\mu\, g(\zeta, \overline{\zeta})$ pe Γ, (11)
pentru problema lui Neumann : $H = 1$, $H(\zeta, \overline{\zeta}) = h(\zeta, \overline{\zeta}) + \text{const}$ pe Γ.

Să ne limităm acum la cazul unui domeniu *mărginit* şi *dublu conex* reprezentabil conform pe o coroană. Părţile olomorfe ce intră în structura funcţiilor φ, ψ vor fi căutate sub forma [7])

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\zeta^n, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\zeta^n. \tag{12}$$

Întrucît în acest caz avem şi

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n\zeta^n, \tag{13}$$

şi întrucît $\omega'(\zeta) \neq 0$ atît în coroană *cît şi pe frontiera ei* (în cadrul ipotezei admise în (A.6.5), aşadar cu siguranţă pentru frontiere $\mathscr{L}$ de clasă C^2), este evident că valorile la limită ale expresiei $\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}$ pe cercurile frontieră Γ_0, Γ_1, unde avem desigur

$$\zeta|_{\Gamma_0} = \rho_0\sigma, \quad \zeta|_{\Gamma_1} = \rho_1\sigma, \tag{14}$$

pot fi puse sub forma unor dezvoltări în serii după puterile lui $\sigma = \exp(i\theta)$.

Procedînd în acelaşi mod cu valorile la limită ale funcţiilor (12) şi dezvoltînd şi datele la limită $H_0(\zeta, \overline{\zeta})$ (modificate aşa cum rezultă din (11.3)

[7]) Subliniem că pentru coeficienţii funcţiilor $\varphi_{(1)}(\mathfrak{z})$, $\psi_{(1)}(\mathfrak{z})$ şi $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ păstrăm *aceleaşi notaţii* a_n, b_n ca în (14)-(15)—deşi pentru cei ai funcţiilor transformate în planul ζ ar fi poate mai potrivită notaţia α_n, β_n sau φ_n, ψ_n.

sau (11.11)) pe Λ în serii Fourier, sîntem conduşi la un proces de identificare a coeficienţilor, asemănător celui din § 14. Prezenţa produsului a două serii $\{[\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}]\overline{\varphi'(\zeta)}\}_\Lambda$ face însă ca coeficienţii fiecărei puteri σ^n să conţină în general *o infinitate* de coeficienţi a_n. Astfel, în locul unui şir de sisteme separate de ecuaţii cu un număr finit de necunoscute fiecare (de ex. cîte *două* în cazul coroanei circulare), obţinem un *sistem infinit* de ecuaţii algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute (vezi de exemplu I. Sokolnikoff [2], § 76).

Există cazuri în care acest sistem se descompune într-un şir de sisteme finite. Aşa se petrec lucrurile dacă raportul $\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}$ pe Λ este un polinom în σ, sau dacă $\omega(\zeta)$ este un polinom sau chiar o funcţie raţională. În toate aceste cazuri, raportul în chestiune se scrie ca un cît de polinoame $P_1(\sigma)/P_2(\sigma)$. Înmulţind ambii membri din (10) cu $P_2(\sigma)$, obţinem pentru fiecare termen în σ^n, un coeficient în care intervin numai un număr finit de coeficienţi a_n, b_n. Uneori însă ecuaţiile astfel obţinute nu permit determinarea univocă a soluţiei, şi condiţii suplimentare (de pildă, condiţia de convergenţă a seriilor Taylor sau Laurent corespunzătoare) duc în ultimă instanţă din nou la necesitatea de a considera totuşi sisteme infinite de ecuaţii. (Vezi cele două exemple din § 19, distincte din acest punct de vedere.)

Problema domeniilor simplu conexe reprezentabile conform prin funcţii polinomiale va fi examinată amănunţit — pe altă cale — în § 21.

Dacă $\omega(\zeta)$ nu este raţională, atunci fie se poate face uz de o reprezentare conformă aproximativă corespunzător aleasă (vezi finele § A.6), fie sistemul infinit de ecuaţii la care se ajunge trebuie studiat ca atare.

Desigur, nu toate constantele a_n, b_n pot şi trebuie să fie determinate. Ţinînd seama de (9.4), rezultă de pildă că în cazul problemei lui Neumann putem adăuga funcţiilor $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, o funcţie de forma $iC\omega(\zeta)+\gamma$, respectiv γ', (γ, γ' — constante complexe ; C — constantă reală).

Raţionamentele din §§ 14—17 arată că primele două probleme fundamentale se rezolvă relativ elementar pentru discul şi coroana circulară ; singurele operaţii de integrare cerute sînt cele necesare pentru calcularea coeficienţilor Fourier ai datelor la limită.

Raţionamentele din paragraful de faţă arată atunci că, *dacă* reprezentarea conformă a domeniului $\mathscr{D}$ pe discul unitate sau pe o coroană circulară este cunoscută, atunci problemele lui Dirichlet şi Neumann se rezolvă aproape tot atît de simplu. Prin urmare, dificultatea nu rezidă în rezolvarea problemei plane (sau a ecuaţiei *biarmonice*) pentru un domeniu dat — ci în găsirea reprezentării conforme a acelui domeniu pe un domeniu canonic adecvat (aşadar, în principiu, la rezolvarea ecuaţiei *armonice* pentru acelaşi domeniu).

Metoda lui Kolosov-Mushelişvili dă deci o soluţie completă pentru ceea ce ţine propriu-zis de teoria elasticităţii în aceste probleme.

Subliniem (vezi § A.7, pag. 735) că problemele la limită (10) *nu au* semnificaţia de probleme la limită ale teoriei elasticităţii pentru domeniul circular din planul ζ. Lucrurile se petrec deci cu totul altfel decît în problema plană a mecanicii fluidelor, cînd reprezentarea conformă conduce tot la o anumită scurgere hidrodinamică în jurul obstacolului transformat. Această dificultate suplimentară (legată de caracterul *bi*armonic al problemei) arată redusa

utilitate a considerării în elasticitatea plană a unui analog al liniilor de curent. Dimpotrivă, se poate însă folosi analogia dintre starea elastică plană și mișcarea unui fluid *viscos* (vezi de ex. D. Ionescu [1]; C. Stănescu [1]).

În practică, rezolvarea problemelor fundamentale pentru un domeniu dublu conex — și cu atît mai mult pentru un domeniu de ordin mai mare de conexiune — se lovește de dificultăți considerabile, legate de necesitatea construirii efective a funcției de reprezentare. Unele indicații în legătură cu astfel de probleme vor fi date în §§ 23—25.

§ 19. PROBLEMA LUI NEUMANN. EXEMPLE. (METODA REPREZENTĂRII CONFORME)

Vom considera trei exemple, dintre care două pentru domenii simplu conexe, și unul pentru un domeniu dublu conex.

a) Cardioida

Să considerăm funcția de reprezentare (vezi § A.8, exemplul **c**)

$$\mathfrak{z} = a\,(1 + \zeta)^2; \tag{1}$$

de aci deducem imediat că pe γ avem

$$\omega\,(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)} = \frac{1}{2}\,(\sigma + \sigma^2). \tag{2}$$

Dezvoltînd datele la limită în serie Fourier și căutînd soluția sub forma

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\zeta^n, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,\zeta^n, \tag{3}$$

obținem din condiția la limită (18.9) (vezi și (14.21)):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\sigma^n - \sum_{n=-\infty}^{n=1} \frac{1}{2}(n-2)\,\bar{a}_{-n+2}\,\sigma^n - \sum_{n=-\infty}^{n=2} \frac{1}{2}(n-3)\,\bar{a}_{-n+3}\,\sigma^n +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{n=0} \bar{b}_{-n}\,\sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n\,\sigma^n + C_0, \tag{4}$$

unde constanta C_0 trebuie menținută, întrucît nu am făcut încă nici o presupunere asupra coeficienților a_0, b_0, Im a_1.

Din (4) urmează prin identificare pentru

$$
\begin{aligned}
n = 0: &\quad a_0 + \bar{a}_2 + \frac{3}{2}\bar{a}_3 + b_0 &&= h_0 + C_0,\\
n = 1: &\quad a_1 + \frac{1}{2}\bar{a}_1 + \bar{a}_2 &&= h_1,\\
n = 2: &\quad a_2 + \frac{1}{2}\bar{a}_1 &&= h_2, \qquad (5)\\
n \geqslant 3: &\quad &&a_n = \bar{h}_n,\\
n \geqslant 1: &\quad (n+2)\,a_{n+2} + (n+3)\,a_{n+3} + 2\,b_n = 2\,\bar{h}_{-n}.
\end{aligned}
$$

Din a doua şi a treia relaţie de mai sus căpătăm

$$\operatorname{Re} a_1 = h_1 - \bar{h}_2, \tag{6}$$

ceea ce impune să fie satisfăcută condiţia

$$\operatorname{Im}(h_1 - \bar{h}_2) = 0. \tag{7}$$

Întrucît $\mathscr{D}$ este simplu conex, funcţia $h(s)$ este uniformă, şi momentul rezultant poate fi calculat din (11.18). Obţinem deci

$$\mathscr{M}_3 = \operatorname{Re} \oint_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{h}_n\, \sigma^{-n}.\, 2\,a\,(1+\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = -\,4\,a\,\pi \operatorname{Im}(\bar{h}_1 + \bar{h}_2),$$

astfel că (7) este tocmai condiţia de anulare a momentului $\mathscr{M}_3$.

Luînd $a_0 = b_0 = 0$, din prima relaţie (5) se determină constanta C_0 — inutilă de altfel. Luînd şi $\operatorname{Im} a_1 = 0$, coeficientul a_1 este dat de (6). A treia relaţie (5) dă pe a_2, iar din ultimele două obţinem succesiv toţi coeficienţii a_n, b_n.

Calculele rămîn tot atît de simple pentru orice domeniu simplu conex pentru care raportul $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ este un polinom sau un cît de polinoame, dacă numărul de termeni din aceste polinoame nu este prea mare.

b) Coroana eliptică (soluţia lui A. Kalandia)

Funcţia de reprezentare de utilizat este (vezi § A.8, exemplul **b**):

$$z = c\,(\zeta + k\,\zeta^{-1}). \tag{8}$$

Ca şi pentru starea antiplană (vezi § 5.18, exemplul **d**), vom examina atît cazul domeniului mărginit de două elipse confocale, cît şi pe cel al discului eliptic (cînd, spre deosebire de cazul antiplan, nu există soluţie elementară).

Fie deci elipsele-frontieră $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1$ şi fie $Л_0$, $Л_1$ cercurile de raze ρ_0 şi $\rho_1 = 1$, care definesc coroana circulară $Д$ a cărei imagine prin intermediul transformării (8) este $\mathscr{D}$. Parametrii c, h, ρ_0 sînt cunoscuţi din (A. 8.15).

Pentru simplitate, să presupunem că sarcinile de pe cele două componente ale frontierei au rezultante nule. Funcţiile $h(\sigma)$ sînt deci uniforme pe ambele cercuri-frontieră, iar $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ sînt olomorfe în $Д$ (vezi (11.10), (11.11)):

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n. \tag{9}$$

Introducînd (9) în condiţia la limită (18.9), obţinem mai întîi

$$(1 - h/\zeta^2)\,[\varphi(\zeta) + \overline{\psi(\zeta)}] + (\zeta + h/\zeta)\,\overline{\varphi'(\zeta)} =$$
$$= (1 - h/\bar{\zeta}^2)\,[h(\zeta, \bar{\zeta}) + \text{const.}] \quad \text{pe } Л. \tag{10}$$

Să facem uz acum de (9), ţinînd seama că $\zeta = \rho_j \sigma$ pe $Л_j$ $(j = 0,1)$ şi dezvoltînd în serie Fourier pe $Л$ funcţia din membrul al doilea din (10), pe care o vom nota [8]) cu

$$H(\zeta, \bar{\zeta}) = (1 - h/\bar{\zeta}^2)\,h(\zeta, \bar{\zeta}) \quad \text{pe } Л. \tag{11}$$

Cu aceasta, obţinem pe cercul exterior $Л_0$:

$$(1 - h\,\rho_0^{-2}\,\sigma^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n\,\rho_0^n + \bar{b}_{-n}\,\rho_0^{-n})\,\sigma^n +$$
$$+ (\rho_0\sigma + h\rho_0^{-1}\,\sigma^{-1}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,\bar{a}_n\,\rho_0^{n-1}\,\sigma^{-n+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^0\,\sigma^n +$$
$$+ (1 - h\,\rho_0^{-2}\,\sigma^2)\,C_0, \tag{12}$$

şi o relaţie similară pe $Л_1$ (unde în loc de ρ_0 avem $\rho_1 = 1$).

Identificînd coeficienţii, obţinem din (12) pe cercul $Л_0$:

$$a_n\,\rho_0^n - h\,a_{n-2}\,\rho_0^{n-4} - (n-2)\,\bar{a}_{-n+2}\,\rho_0^{-n+2} - h\,n\,\bar{a}_{-n}\,\rho_0^{-n-2} +$$
$$+ \bar{b}_{-n}\,\rho_0^{-n} - h\,\bar{b}_{-n+2}\,\rho_0^{-n} = H_n^0, \tag{13}$$

(unde pentru $n = 0$ şi $n = 2$ trebuie să adăugăm în membrul al doilea cantităţile C_0, respectiv $-h\,C_0\,\rho_0^{-2}$), şi încă o relaţie analogă provenind din condiţia pe cercul $Л_1$:

$$a_n - h\,a_{n-2} - (n-2)\,\bar{a}_{-n+2} - h\,n\,\bar{a}_{-n} + \bar{b}_{-n} - h\,\bar{b}_{-n+2} = H_n^1. \tag{14}$$

---

[8]) Se înţelege că această expresie nu trebuie confundată cu funcţia $H(\zeta, \bar{\zeta})$ din (18.10). Tot aşa, parametrul h al funcţiei (8) nu are nici o legătură cu funcţia $h(\zeta, \bar{\zeta})$.

Înmulțind relația (13) cu ρ_0^n și scăzînd din ea relația (14), obținem pentru

$$\begin{aligned}
n=0:&\ -h\,a_{-2}(\rho_0^{-4}-1)+2\,\bar a_2(\rho_0^2-1)=L_0+C_0-C_1,\\
n=1:&\ (a_1+\bar a_1)(\rho_0^2-1)-h\,(a_{-1}+\bar a_{-1})(\rho_0^{-2}-1)=L_1,\\
n=2:&\ a_2(\rho_0^4-1)-2h\,\bar a_{-2}(\rho_0^{-2}-1)=L_2-h\,C_0\,\rho_0^{-2}+h\,C_1,\\
n\geqslant 3:&\ a_n(\rho_0^{2n}-1)-h\,a_{n-2}(\rho_0^{2n-4}-1)-(n-2)\,\bar a_{-n+2}(\rho_0^2-1)-\\
&\ -h\,n\,\bar a_{-n}(\rho_0^{-2}-1)=L_n,
\end{aligned}\tag{15}$$

unde am notat

$$L_n=H_n^0\,\rho_0^n-H_n^1.\tag{16}$$

Înlocuind în ultima relație (15) pe n prin $-n+2$, obținem încă pentru :

$$\begin{aligned}
n\geqslant 3:\ &n\,\bar a_n(\rho_0^2-1)+h\,(n-2)\,\bar a_{n-2}(\rho_0^{-2}-1)+a_{-n+2}(\rho_0^{-2n+4}-1)-\\
&-h\,a_{-n}(\rho_0^{-2n}-1)=L_{-n+2}.
\end{aligned}\tag{17}$$

După cum se vede, coeficientul a_0 nu apare în aceste ecuații. Pentru coeficienții a_1, a_{-1} dispunem numai de a doua ecuație (15), care dă

$$(\rho_0^2-1)\ \mathrm{Re}\,a_1-h\,(\rho_0^{-2}-1)\ \mathrm{Re}\,a_{-1}=\frac{1}{2}\,L_1.\tag{18}$$

Coeficienții a_2, a_{-2} apar în prima și a treia ecuație (15) :

$$\begin{aligned}
(\rho_0^4-1)\,a_2-2\,h\,(\rho_0^{-2}-1)\,\bar a_{-2}&=L_2-h\,C_0\,\rho_0^{-2}+h\,C_1,\\
2\,(\rho_0^2-1)\,\bar a_2-h\,(\rho_0^{-4}-1)\,a_{-2}&=L_0+C_0-C_1.
\end{aligned}\tag{19}$$

În fine, pentru a_n, a_{-n} $(n\geqslant 3)$ dispunem de sistemul de ecuații

$$\begin{aligned}
&(\rho_0^{2n}-1)\,a_n-h\,n\,(\rho_0^{-2}-1)\,\bar a_{-n}-h\,(\rho_0^{2n-4}-1)\,a_{n-2}-\\
&\qquad-(n-2)\,(\rho_0^2-1)\,\bar a_{-n+2}=L_n,\\
&n\,(\rho_0^2-1)\,\bar a_n-h\,(\rho_0^{-2n}-1)\,a_{-n}+h\,(n-2)\,(\rho_0^{-2}-1)\,\bar a_{n-2}+\\
&\qquad+(\rho_0^{-2n+4}-1)\,a_{-n+2}=L_{-n+2}.
\end{aligned}\tag{20}$$

Prin urmare, coeficienții a_n, a_{-n} se determină succesiv cîte doi din sisteme de două ecuații în care intervin și coeficienții a_{n-2}, a_{-n+2}, deja cunoscuți. Acești coeficienți nu depind de valoarea a_0 — care, după cum știm, poate fi aleasă arbitrar. Dat fiind că funcției $\varphi_{(1)}(z)$ i se poate adăuga un

termen de forma $iC\zeta$, decurge de asemenea că putem alege arbitrar Im a_1, de unde Im a_{-1} trebuie să rezulte determinat. Întrucît dispunem însă numai de o singură ecuație (18) pentru Re a_1, Re a_{-1}, iar în (19) intervin și constantele necunoscute C_0, C_1, sistemul astfel construit are *o infinitate* de soluții.

Ideea lui A. Kalandia [1] constă în a determina *singura* soluție convenabilă cu ajutorul condiției ca seria $\varphi(\zeta)$ să fie convergentă, ceea ce conduce la construirea unor ecuații suplimentare.

În acest scop, să începem prin a izola în ecuațiile (20) termenii în a_n, a_{-n}. Notînd

$$\begin{aligned} A_n &= (\rho_0^{2n} - 1)\, a_n - h\, n\, (\rho_0^{-2} - 1)\, \bar{a}_{-n}, \\ A_n^* &= n\, (\rho_0^2 - 1)\, \bar{a}_n - h\, (\rho_0^{-2n} - 1)\, a_{-n}, \end{aligned} \qquad (n \geqslant 0) \tag{21}$$

obținem din (18) și (19) relațiile

$$A_0 = A_0^* = 0, \tag{22}$$

$$A_1 + A_1^* = L_1, \tag{23}$$

$$A_2 = L_2 - h\,(C_0\, \rho_0^{-2} - C_1), \quad A_2^* = L_0 + C_0 - C_1, \tag{24}$$

iar din (20), relațiile (valabile pentru $n \geqslant 3$):

$$\begin{aligned} A_n - h\, A_{n-2} &= L_n - (n-2)\, \lambda\, \bar{a}_{-n+2}, \\ A_n^* - h^{-1}\, A_{n-2}^* &= L_{-n+2} + (n-2)\, \lambda\, h^{-1}\, \bar{a}_{n-2}, \end{aligned} \tag{25}$$

unde am notat

$$\lambda = (1 - \rho_0^2)\,(1 - h^2\, \rho_0^{-2}). \tag{26}$$

Relațiile de recurență (25) conduc la două serii de formule distincte, după cum $n = 2p$ sau $n = 2p - 1$. Astfel, avem mai întîi

$$\begin{aligned} A_3 &= h\, A_1 + L_3 - \lambda\, \bar{a}_{-1}, & A_3^* &= h^{-1}\, A_1^* + L_{-1} + \lambda\, h^{-1}\, \bar{a}_1, \\ A_5 &= h\, A_3 + L_5 - 3\, \lambda\, \bar{a}_{-3}, & A_5^* &= h^{-1}\, A_3^* + L_{-3} + 3\, \lambda\, h^{-1}\, \bar{a}_3, \\ A_7 &= h\, A_5 + L_7 - 5\, \lambda\, \bar{a}_{-5}, & A_7^* &= h^{-1}\, A_5^* + L_{-5} + 5\, \lambda\, h^{-1}\, \bar{a}_5, \end{aligned}$$

de unde de exemplu

$$\begin{aligned} A_7 &= h^3\, A_1 + h^2\, L_3 + h\, L_5 + L_7 - \lambda\, (h^2\, \bar{a}_{-1} + 3\, h\, \bar{a}_{-3} + 5\, \bar{a}_{-5}), \\ A_7^* &= h^{-3}\, A_1^* + h^{-2}\, L_{-1} + h^{-1}\, L_{-3} + L_{-5} + \lambda\, h^{-1}\, (h^{-2}\, \bar{a}_1 + 3h\, \bar{a}_3 + 5\, \bar{a}_5), \end{aligned}$$

și în general pentru $n = 2p - 1$

$$\begin{aligned} A_{2p-1} &= h^{p-1}\, A_1 + \sum_{s=1}^{p-1} h^{p-s-1}\, L_{2s+1} - \lambda \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1)\, h^{p-s-1}\, \bar{a}_{-2s+1}, \\ A_{2p-1}^* &= h^{-p+1}\, A_1^* + \sum_{s=1}^{p-1} h^{-p+s+1}\, L_{-2s+1} + \lambda\, h^{-1} \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1)\, h^{-p+s+1}\, \bar{a}_{2s-1}. \end{aligned} \tag{27}$$

Tot astfel, pentru $n=2p$ obținem mai întîi (luînd valori $n \geqslant 4$) :

$$A_4 = h\,A_2 + L_4 - 2\,\lambda\,\bar{a}_{-2}, \quad A_4^* = h^{-1}\,A_2^* + L_{-2} + 2\,\lambda\,h^{-1}\,\bar{a}_2,$$

$$A_6 = h\,A_4 + L_6 - 4\,\lambda\,\bar{a}_{-4}, \quad A_6^* = h^{-1}\,A_4^* + L_{-4} + 4\,\lambda\,h^{-1}\,\bar{a}_4,$$

și așa mai departe, de unde de exemplu

$$A_8 = h^3\,A_2 + h^2\,L_4 + h\,L_6 + L_8 - \lambda\,(2\,h^2\,\bar{a}_{-2} + 4\,h\,\bar{a}_{-4} + 6\,\bar{a}_{-6}),$$

$$A_8^* = h^{-3}\,A_2^* + h^{-2}\,L_{-2} + h^{-1}\,L_{-4} + L_{-6} + \lambda\,h^{-1}\,(2\,h^{-2}\,\bar{a}_2 + 4\,h^{-1}\,\bar{a}_4 + 6\,\bar{a}_6),$$

și în general

$$A_{2p} = h^{p-1}\,A_2 + \sum_{s=2}^{p} h^{p-s}\,L_{2s} - \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2\,s\,h^{p-s-1}\,\bar{a}_{-2s},$$
$$A_{2p}^* = h^{-p+1}\,A_2^* + \sum_{s=1}^{p-1} h^{-p+s+1}\,L_{-2s} + \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2\,s\,h^{-p+s}\,a_{2s}, \tag{28}$$

sau încă, ținînd seama de relațiile (22) și (24) :

$$A_{2p} = -\,h^p\,(C_0\,\rho_0^{-2} - C_1) + \sum_{s=1}^{p} h^{p-s}\,L_{2s} - \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2\,s\,h^{p-s-1}\,\bar{a}_{-2s},$$
$$A_{2p}^* = h^{-p+1}\,(C_0 - C_1) + \sum_{s=0}^{p-1} h^{-p+s+1}\,L_{-2s} + \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2s\,h^{-p+s}\,a_{2s}. \tag{29}$$

Pentru a calcula sumele în L din (27) și (29), să remarcăm că L_n sînt construiți cu ajutorul coeficienților H_n^0, H_n^1, definiți prin relațiile ce rezultă din (11) :

$$(1 - h\,\rho_0^{-2}\,\sigma^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^0\,\sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^0\,\sigma^n,$$
$$(1 - h\,\sigma^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^1\,\sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^1\,\sigma^n, \tag{30}$$

de unde

$$h_n^0 - h\,\rho_0^{-2}\,h_{n-2}^0 = H_n^0, \quad h_n^1 - h\,h_{n-2}^1 = H_n^1; \tag{31}$$

astfel că pentru L_n obținem acum din (16) :

$$L_n = l_n - h\,l_{n-2}, \quad L_{-n+2} = l_{-n+2} - h\,l_{-n}, \tag{32}$$

unde am notat, ca și în (14.31) :

$$l_n = h_n^0\,\rho_0^n - h_n^1. \tag{33}$$

Scriind relațiile (32) sub forma

$$l_n - h\,l_{n-2} = L_n, \quad l_{-n} - h^{-1}\,l_{-n+2} = -\,h^{-1}\,L_{-n+2}, \tag{34}$$

remarcăm că ele sînt analoge cu (25) (păstrîndu-şi însă valabilitatea şi pentru $n = 0,1,2$). Prin analogie cu (27) căpătăm imediat

$$l_{2p-1} = h^{p-1} l_1 + \sum_{s=1}^{p-1} h^{p-s-1} L_{2s+1}, \quad l_{-2p+1} = h^{-p+1} l_{-1} - \sum_{s=1}^{p-1} h^{-p+s} L_{-2s+1}. \tag{35}$$

Pe de altă parte, prin analogie cu (28), unde expresiile A_2 şi A_2^* se înlocuiesc prin

$$l_2 = hl_0 + L_2, \quad l_{-2} = h^{-1}(l_0 - L_0)$$

obţinute din (34) pentru $n = 2$, căpătăm şi

$$l_{2p} = h^p l_0 + \sum_{s=1}^{p} h^{p-s} L_{2s}, \quad l_{-2p} = h^{-p} l_0 - \sum_{s=0}^{p-1} h^{-p+s} L_{-2s}. \tag{36}$$

Ţinînd seama de (35) în (27), şi de (36) în (29), obţinem pentru $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} A_{2p-1} &= h^{p-1}\left[A_1 - l_1 - \lambda \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^{-s} \bar{a}_{-2s+1}\right] + l_{2p-1}, \\ A_{2p-1}^* &= h^{-p+1}\left[A_1^* + h l_{-1} + \lambda h^{-1} \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^s \bar{a}_{2s-1}\right] - hl_{-2p+1}, \end{aligned} \tag{37}$$

şi respectiv

$$\begin{aligned} A_{2p} &= -h^p\left[C_0 \rho_0^{-2} - C_1 + l_0 + \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2s\, h^{-s-1} \bar{a}_{-2s}\right] + l_{2p}, \\ A_{2p}^* &= h^{-p+1}\left[C_0 - C_1 + l_0 + \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2s\, h^{s-1} \bar{a}_{2s}\right] - hl_{-2p}. \end{aligned} \tag{38}$$

Să alegem acum, dintre toate soluţiile posibile ale ecuaţiilor (18)—(20), pe aceea care asigură convergenţa (în $Д$ şi pe $Л$) a seriei $\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$. O condiţie necesară de convergenţă a acestei serii este (vezi (A.5.20)):

$$|a_n| \leqslant C \rho_0^{-n}, \quad |a_{-n}| \leqslant C \quad \text{pentru } n > 0, \tag{39}$$

astfel că şirul valorilor A_n^* din (21) e mărginit [9]) pentru $n \to \infty$. (Din acest punct, simetria formulelor încetează: despre şirul A_n nu se poate afirma acelaşi lucru.)

Dacă avem $0 < h < 1$ (cazul $h=1$ se exclude deci), atunci coeficienţii termenilor h^{-p+1} din (37) şi (38) trebuie să tindă la zero pentru $p \to \infty$. Obţinem deci

$$A_1^* + h l_{-1} = -\lambda \sum_{s=1}^{\infty} (2s-1) h^{s-1} \bar{a}_{2s-1},$$

$$C_0 - C_1 + l_0 = -\lambda \sum_{s=1}^{\infty} 2s\, h^{s-1} \bar{a}_{2s}.$$

---

[9]) Amintim că avem $\rho_0 > \rho_1 = 1$ şi deci $\lim_{n \to \infty} n \rho_0^{-n} = 0$.

Notînd

$$A = \sum_{s=1}^{\infty} (2s-1)\, h^{s-1}\, \bar{a}_{2s-1}, \quad \widetilde{A} = \sum_{s=1}^{\infty} 2\, s\, h^{s-1}\, \bar{a}_{2s}, \tag{40}$$

putem pune relațiile de mai sus sub forma definitivă

$$A_1^* + h\, l_{-1} = -\lambda\, A, \quad C_0 - C_1 + l_0 = -\lambda\, \widetilde{A}. \tag{41}$$

In felul acesta, din condiția de convergență a soluției am obținut încă două ecuații pentru coeficienții necunoscuți.

După cum am văzut, din sistemul (18)—(20) lipsesc două ecuații pentru C_0, C_1, și o ecuație pentru a_1, a_{-1}. Se știe că modificarea coeficientului a_0 modifică membrul al doilea al condiției la limită (18.9) cu o aceeași valoare pe ambele componente ale frontierei, așadar modifică constantele C_0 și C_1, dar nu și diferența lor. Întrucît a_0 nu intervine în sistemul considerat, putem alege arbitrar una dintre constantele C_0, C_1 (de ex. $C_0 = 0$), ceea ce revine la a atribui lui a_0 o valoare precisă (deși necunoscută, și de care nu vom avea nevoie). Cele două relații (41) dau prin urmare tocmai cele două ecuații încă necesare pentru a putea determina coeficienții a_1, a_{-1} și constanta C_1.

Ținînd seama de prima relație (34) pentru $n = 1$, obținem din (23) și din prima relație (41):

$$A_1 = L_1 + h\, l_{-1} + \lambda\, A = l_1 + \lambda\, A. \tag{42}$$

Formulele (37) devin acum

$$\begin{aligned} A_{2p-1} &= \lambda\, h^{p-1}\left[A - \sum_{s=1}^{p-1} (2\,s-1)\, h^{-s}\, \bar{a}_{-2s+1}\right] + l_{2p-1}, \\ A_{2p-1}^* &= -\lambda\, h^{-p+1}\left[A - \sum_{s=1}^{p-1} (2\,s-1)\, h^{s-1}\, \bar{a}_{2s-1}\right] - h\, l_{-2p+1}. \end{aligned} \tag{43}$$

Prima relație (41), împreună cu (42) și (43), dau sistemul de ecuații pentru coeficienții a_n de indici impari. Anume, cu ajutorul expresiilor (21) obținem acum

$$\begin{aligned} &(\rho_0^2 - 1)\, \bar{a}_1 - h\,(\rho_0^{-2} - 1)\, a_{-1} + \lambda\, A = -h\, l_{-1}, \\ &(\rho_0^2 - 1)\, a_1 - h\,(\rho_0^{-2} - 1)\, \bar{a}_{-1} - \lambda A = l_1, \\ &(\rho_0^{4p-2} - 1)\, a_{2p-1} - (2\,p-1)\, h\,(\rho_0^{-2} - 1)\, \bar{a}_{-2p+1} + \\ &+ \lambda\, h^{p-1}\left[\sum_{s=1}^{p-1} (2\,s-1)\, h^{-s}\, \bar{a}_{-2s+1} - A\right] = l_{2p-1}, \\ &(2\,p-1)\,(\rho_0^2 - 1)\, \bar{a}_{2p-1} - h\,(\rho_0^{-4p+2} - 1)\, a_{-2p+1} - \\ &- \lambda\, h^{-p+1}\left[\sum_{s=1}^{p-1} (2\,s-1)\, h^{s-1}\, \bar{a}_{2s-1} - A\right] = -h\, l_{-2p+1}, \end{aligned} \tag{44}$$

unde A are forma dată în (40).

Condiția $C_0 = 0$, a doua relație (41) și relațiile (38) dau sistemul de ecuații din care se determină coeficienții a_n de indici pari :

$$C_1 - \lambda \widetilde{A} = l_0,$$

$$(\rho_0^{4p} - 1)\, a_{2p} - 2h\, p\, (\rho_0^{-2} - 1)\, \bar{a}_{-2p} + \lambda\, h^p \left[\sum_{s=1}^{p-1} 2\, s\, h^{-s-1}\, \bar{a}_{-2s} - \widetilde{A} \right] = l_{2p},$$

$$2\, p\, (\rho_0^2 - 1)\, \bar{a}_{2p} - h\, (\rho_0^{-4p} - 1)\, a_{-2p} - \lambda h^{-p+1} \left[\sum_{s=1}^{p-1} 2s\, h^{s-1}\, \bar{a}_{2s} - \widetilde{A} \right] = -\, h\, l_{-2p}, \tag{45}$$

unde $\widetilde{A}$ are forma dată în (40).

După cum se vede, spre deosebire de sistemul inițial (18)—(20), sistemele (44) și (45) sînt veritabile sisteme infinite liniare. Se poate însă demonstra (vezi loc. cit.) că soluția acestor sisteme există, este unică, și poate fi obținută prin aproximații succesive. Pentru aceasta, este suficient să fie satisfăcută condiția

$$\operatorname{Im}\, (l_1 - h\, l_{-1}) = 0 \tag{46}$$

(vezi primele două ecuații (44)). Or, din (33) și (11.18) (de care putem face uz întrucît rezultanta sarcinii e nulă pe fiecare componentă a frontierei în parte) avem pe rînd

$$\mathcal{M}_3 = \operatorname{Re}\, c \oint_\gamma \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_n^0}\, \sigma^{-n}\, (1 - h\, \rho_0^{-2}\, \sigma^{-2})\, \rho_0 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_n^1}\, \sigma^{-n}\, (1 - h\, \sigma^{-2}) \right] d\sigma =$$

$$= 2\pi c\, \operatorname{Im}\, (h_1^0\, \rho_0 - h_1^1 - h\, \rho_0^{-1}\, h_{-1}^0 + h h_{-1}^1) = 2\, \pi\, c\, \operatorname{Im}\, (l_1 - h l_{-1}), \tag{47}$$

și deci condiția (46) este verificată în virtutea faptului că $\mathcal{M}_3 = 0$.

Coeficienții a_n $(n \neq 0)$ odată determinați, relațiile (13) (sau relațiile echivalente lor (14)) permit determinarea directă a cantităților $b_n - h\, b_{n-2}$.

Înmulțind relațiile (13) cu ρ_0^n, trecînd termenii în a_n în membrul al doilea și înlocuind n prin $-n+2$, obținem o relație de forma

$$b_n - h^{-1}\, b_{n-2} = K_{-n+2}^0, \tag{48}$$

unde K_n^0 sînt constante cunoscute. Relația analogă scrisă pe cercul Π_1 conduce la cantități $K_n^1 = K_n^0$.

Analogia dintre (48) și a doua relație (25) este evidentă. Obținem astfel din (27) și (28) formulele

$$b_{2p-1} = h^{-p+1} \left[b_1 + \sum_{s=1}^{p-1} h^s\, K_{-2s+1}^0 \right], \quad b_{2p} = h^{-p+1} \left[h^{-1}\, b_0 + \sum_{s=0}^{p-1} h^s\, K_{-2s}^0 \right]. \tag{49}$$

Dat fiind că am ales $C_0 = 0$, suma $a_0 + \bar{b}_0$ nu poate fi dată arbitrar. Întrucît $0 < h < 1$, iar coeficienții b_n sînt mărginiți pentru $n \to \infty$, limita coeficientului lui h^{-p+1} în (49) pentru $p \to \infty$ trebuie să fie nulă, de unde urmează

$$b_0 = -\sum_{s=0}^{\infty} h^{s+1}\, K_{-2s}^0, \quad b_1 = -\sum_{s=1}^{\infty} h^s\, K_{-2s+1}^0. \tag{50}$$

Convergența acestor serii poate fi demonstrată. Introducînd valorile (50) în (48), obținem pe rînd toți coeficienții b_n. În sfîrșit, relația (13) scrisă pentru $n=0$ dă și coeficientul a_0.

Raționamentul rămîne valabil — cu modificări neînsemnate — în cazul problemei lui Dirichlet, precum și în cazul problemei mixte cu date de tip Dirichlet pe una din componente frontierei, și cu date de tip Neumann pe cealaltă din ele. (Chiar acesta este cazul examinat de A. Kalandia, loc. cit.)

Aceeași problemă este studiată și de M. Șeremetiev [1]. După cum a arătat V. Lihacev [1], soluțiile lui Kalandia și Șeremetiev sînt echivalente.

Convergența soluției este cu atît mai rapidă, cu cît h este mai mic.

c) *Discul eliptic*

Aceeași metodă permite să se obțină ușor funcțiile $\varphi(\zeta)$ $\psi(\zeta)$ pentru cazul discului eliptic.

Pentru aceasta, este suficient să ținem seama că cele două funcții trebuie să fie olomorfe în $\mathscr{D}_0^+$, așadar continue la traversarea tăieturii $\mathscr{L}_1$ între focare. Întrucît punctelor de pe bordul tăieturii le corespund punctele σ și $\bar{\sigma}$ pe $\mathcal{J}_1=\gamma$, deducem că condiția la limită pe $\mathcal{J}_1$ (care a condus mai sus la (14)) trebuie înlocuită acum cu condiția necesară

$$\varphi(\sigma)=\varphi(\bar{\sigma}),\quad \psi(\sigma)=\psi(\bar{\sigma}), \tag{51}$$

de unde, ținînd seama de (9), deducem imediat

$$a_n=a_{-n},\ b_n=b_{-n}. \tag{52}$$

(Compară cu § 5.18, exemplul ***d***, problema torsiunii pentru același domeniu.)

În locul operațiilor care au condus de la (13), (14) la ecuațiile (15), (17), trebuie să începem acum prin a utiliza ecuațiile (13) și (52). Înmulțind (13) cu ρ_0^n, ținînd seama de (52), și renunțînd la indicii superiori „o", găsim deci :

$$\begin{gathered}
a_0-a_2\rho_0^{-4}+2\bar{a}_2\rho_0^2+\bar{b}_0-\bar{b}_2=H_0+C_0,\\
a_1(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\bar{a}_1(\rho_0^2-\rho_0^{-2})=H_1\rho_0,\\
-a_0+a_2\rho_0^4-2\bar{a}_2\rho_0^{-2}+\bar{b}_2-\bar{b}_0=H_2\rho_0^2-C_0,\\
a_n\rho_0^{2n}-a_{n-2}\rho_0^{2n-4}-(n-2)\bar{a}_{n-2}\rho_0^2-n\bar{a}_n\rho_0^{-2}+\\
+\bar{b}_n-\bar{b}_{n-2}=H_n\rho_0^n,\quad n\geqslant 3,
\end{gathered} \tag{53}$$

și încă, înlocuind în ultima relație pe n prin $-n+2$:

$$\begin{gathered}
a_{n-2}\rho_0^{-2n+4}-a_n\rho_0^{-2n}+n\bar{a}_n\rho_0^2+(n-2)\bar{a}_{n-2}\rho_0^{-2}+\\
+\bar{b}_{n-2}-\bar{b}_n=H_{-n+2}\rho_0^{-n+2}.
\end{gathered} \tag{54}$$

Adunînd membru cu membru prima şi a treia ecuaţia (53), şi ultima ecuaţie (53) cu ecuaţia (54), obţinem

$$\begin{gathered} a_2(\rho_0^4 - \rho_0^{-4}) + 2\,\bar{a}_2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) = H_0 + H_2\,\rho_0^2, \\ 2\,\mathrm{Re}\,a_1(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) = H_1\,\rho_0, \\ a_n(\rho_0^{2n} - \rho_0^{-2n}) + n\,\bar{a}_n(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - a_{n-2}(\rho_0^{2n-4} - \rho_0^{-2n+4}) - \\ -(n-2)\,\bar{a}_{n-2}(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) = H_n\,\rho_0^n + H_{-n+2}\,\rho_0^{-n+2} \quad \text{pentru} \quad n \geqslant 3. \end{gathered} \tag{55}$$

Prin analogie cu formulele (21), putem scrie

$$c_n = a_n(\rho_0^{2n} - \rho_0^{-2n}) + n\,\bar{a}_n(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}), \tag{56}$$

astfel că ecuaţiile (55) devin

$$c_1 = H_1\,\rho_0; \quad c_2 = H_0 + H_2\,\rho_0^2; \quad c_n - c_{n-2} = M_n, \qquad n \geqslant 3, \tag{57}$$

unde am notat

$$M_n \equiv H_n\,\rho_0^n + H_{-n+2}\,\rho_0^{-n+2} = h_n\,\rho_0^n - h_{-n}\,\rho_0^{-n} - h_{n-2}\,\rho_0^{n-2} + h_{-n+2}\,\rho_0^{-n+2}, \qquad n \geqslant 3, \tag{58}$$

ceea ce furnizează relaţii de acelaşi tip cu prima relaţie (25), dar de structură mai simplă. Obţinem prin urmare, prin comparaţie cu (27) şi (28), expresiile

$$c_{2p-1} = H_1\,\rho_0 + \sum_{s=2}^{p} M_{2s-1}, \quad c_{2p} = \sum_{s=1}^{p} M_{2s}, \tag{59}$$

de unde pentru orice n urmează

$$c_n = h_n\,\rho_0^n - h_{-n}\,\rho_0^{-n}. \tag{60}$$

Ecuaţiile (56) dau imediat valorile coeficienţilor a_n.

Dat fiind că funcţia $\varphi(\zeta)$ este determinată abstracţie făcînd de un termen de forma $iC'(\zeta+\zeta^{-1})+\gamma$, iar $\psi(\zeta)$, abstracţie făcînd de un termen γ', rezultă că mărimile a_0, b_0, $\mathrm{Im}\,a_1 = \mathrm{Im}\,a_{-1}$ pot fi date arbitrar. În fapt, se vede că a_0 nu intervine în relaţiile (55), şi nici unul din coeficienţii a_{2p} nu depinde de el; putem lua deci $a_0 = 0$. Mai departe, din relaţia (56) pentru $n = 1$ şi din prima relaţie (57) căpătăm pe $\mathrm{Re}\,a_1$; întrucît putem alege $\mathrm{Im}\,a_{-1} = 0$, avem deci

$$a_1 = \frac{1}{2}\,H_1\,\rho_0/(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}). \tag{61}$$

Pentru aceasta este desigur necesar să avem $\operatorname{Im} H_1 = 0$. Făcînd uz de (11.18) și ținînd seama că din (11) (pentru $h = 1$) rezultă $h(\sigma) = H(\sigma)(1 - \rho_0^{-2}\sigma^2)^{-1}$, deducem

$$\mathscr{M}_3 = \operatorname{Re}\oint_{\mathscr{L}_0} \overline{h(t)}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Re}\oint_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{H}_n \sigma^{-n}\right)\frac{1}{1-\rho_0^{-2}\sigma^{-2}} c(1-\rho_0^{-2}\sigma^{-2})\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \operatorname{Re} 2\pi i c \overline{H}_1 = 2\pi c \operatorname{Im} H_1, \tag{62}$$

astfel că membrul al doilea din (61) rezultă într-adevăr real.

Luînd $n = 3$ în (57), se vede ușor că c_3 (și deci și toți coeficienții a_{2p+1}) nu depinde de valoarea $\operatorname{Im} a_1$.

Prin urmare, coeficienții a_n pot fi efectiv determinați unul după altul, și funcția $\varphi(\zeta)$ poate fi scrisă explicit.

Relația (13) dă acum relațiile succesive

$$b_n - b_{n-2} = \overline{H}_n \rho_0^n - \overline{a}_n \rho_0^{2n} + \overline{a}_{n-2}\rho_0^{2n-4} + (n-2)\, a_{n-2}\rho_0^2 + n\, a_n\, \rho_0^{-2}, \tag{63}$$

sau un șir de relații similare în care în membrul al doilea raza ρ_0 e înlocuită prin $\rho_1 = 1$. Ambele șiruri de relații sînt echivalente, și nu permit să determinăm separat b_n și b_{n-2} pentru fiecare n. În fapt însă, amintind că în condiția la limită (10) scrisă pentru $h = 1$ funcția $\psi(\zeta)$ intervine sub forma

$$(1-\overline{\zeta}^{-2})\,\overline{\psi(\zeta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{b}_n \overline{\zeta}^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{b}_n \overline{\zeta}^{n-2} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\overline{b}_n - \overline{b}_{n-2})\overline{\zeta}^{n-2}, \tag{64}$$

rezultă că cunoașterea diferențelor $b_n - b_{n-2}$ determină pe $\psi(\zeta)$.

Ținînd seama de relațiile (52), deducem

$$b_1 - b_{-1} = b_{-1} - b_1 = 0, \quad b_{-n} - b_{-n-2} = b_n - b_{n+2},$$

și deci

$$\psi(\zeta) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+2})(\zeta^n - \zeta^{-n-2})\right] : [1 - \zeta^{-2}] =$$

$$= (b_0 - b_2) + (b_1 - b_3)\,\zeta\,(1 + \zeta^{-2}) + (b_2 - b_4)\,\zeta^2\,(1 + \zeta^{-2} + \zeta^{-4}) + \ldots \tag{65}$$

Este limpede că b_0 poate fi ales arbitrar, de pildă $b_0 = 0$. Prima relație (53) permite să calculăm acum C_0 — de care de altfel nu avem nevoie.

După cum se vede, (51) este o condiție nu numai necesară, ci și suficientă pentru obținerea soluției cu toate proprietățile prescrise.

Exemplele **b** și **c** prezintă clar dificultățile considerabile ce pot apare, chiar pentru funcții de reprezentare atît de simple ca (8).

§ 20. REDUCEREA PROBLEMELOR LUI DIRICHLET ŞI NEUMANN LA ECUAŢIA INTEGRO-DIFERENŢIALĂ A LUI MUSHELIŞVILI

Metoda dezvoltărilor în serie duce la ţintă cu siguranţă, dar după calcule adesea obositoare. Întrucît problema constă în determinarea anumitor funcţii olomorfe în $\mathscr{D}$ cu ajutorul valorilor lor la limită, este firesc să utilizăm în acest scop teoria integralelor de tip Cauchy. Ca şi în studiul ecuaţiei lui Laplace, aceasta conduce în ultimă instanţă la rezolvarea unor ecuaţii integrale.

Chiar dacă pentru calcularea integralelor ce apar pe parcurs vom fi siliţi să recurgem tot la dezvoltări în serie, această a doua metodă are avantajul rapidităţii, permite o lărgire a condiţiilor impuse datelor la limită, şi conduce la demonstrarea relativ simplă a teoremelor de existenţă.

Aceasta este una dintre contribuţiile esenţiale ale lui N. Musheli$\c{s}$vili [2] la studiul problemei plane.

a) Domenii reprezentabile conform pe discul unitate

Dacă $\mathscr{D}$ este mărginit şi simplu conex, funcţia $\omega(\zeta)$ este olomorfă în discul unitate $Д^+$. Dacă originile se corespund $(\omega(0) = 0)$, atunci avem

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \zeta^n. \tag{1}$$

Dacă însă $\mathscr{D}$ este nemărginit (de tipul exteriorului unei curbe închise) şi punctului $\zeta = 0$ îi corespunde punctul de la infinit, avem

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = \omega_{-1}\zeta^{-1} + \omega_0(\zeta), \quad \omega_{-1} \neq 0, \tag{2}$$

unde funcţia $\omega_0(\zeta)$ este olomorfă în $Д^+$.

Dacă $\mathscr{D}$ este mărginit şi simplu conex, se vede imediat că funcţiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ sînt olomorfe în $Д^+$.

Dacă $\mathscr{D}$ este nemărginit, vom presupune pentru început că tensiunile şi deplasările sînt mărginite la infinit (vezi pp. 412–414). În acest caz, funcţiile lui Kolosov şi Musheli$\c{s}$vili sînt de asemenea olomorfe în $\mathscr{D}$, inclusiv în punctul de la infinit. Introducînd (2) în formulele (10.42), obţinem de pildă pentru $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_{-1}\zeta/[\omega_{-1} + \zeta\omega_0(\zeta)] + a_{-2}\zeta^2/[\omega_{-1} + \zeta\omega_0(\zeta)]^2 + \dots \tag{3}$$

Alegînd originea în exteriorul lui $\mathscr{D}$ (de ex., dacă $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0^-$, alegînd originea în $\mathscr{D}_0^+$), rezultă că pentru $\zeta \in Д^+$ avem $\mathfrak{z} \neq 0$. Întrucît avem $\omega_{-1} + \zeta\omega_0(\zeta) = \zeta\mathfrak{z}$, urmează că pentru $\zeta \neq 0$ avem şi $\omega_{-1} + \zeta\omega_0(\zeta) \neq 0$; iar pentru $\zeta = 0$ căpătăm $\zeta\mathfrak{z} = \omega_{-1} \neq 0$. Prin urmare, fiecare termen din (3) este o funcţie olomorfă; în consecinţă $\varphi(\zeta)$ (şi analog şi $\psi(\zeta)$) este olomorfă în $Д^+$.

În cazul problemei lui Dirichlet, putem alege arbitrar de pildă valoarea $\psi_{(1)}(0)$ dacă $\mathscr{D}$ este mărginit, şi $\psi_{(1)}(\infty)$ dacă $\mathscr{D}$ este nemărginit. În definitiv, putem lua întotdeauna arbitrar valoarea $\psi(0)$.

În cazul problemei lui Neumann, putem alege de asemenea arbitrar şi $\varphi(0)$, precum şi $\operatorname{Im} \varphi'_{(1)}(0)$ sau $\operatorname{Im} \varphi'_{(1)}(\infty)$, aşadar valoarea $\operatorname{Im}[\varphi'(0)/\omega'(0)]$. (Amintim că avem $\omega'(\zeta) \neq 0$ în $Д^+$.)

Vom face uz deocamdată de condiţia la limită sub forma ambiguă (18.10). Dat fiind că $\zeta|_\gamma = \sigma$, această condiţie se scrie

$$H\varphi(\sigma) + [\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}]\,\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = H(\sigma). \tag{4}$$

Trecînd în (4) la cantităţi complex conjugate, obţinem încă

$$H\overline{\varphi(\sigma)} + [\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)]\,\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = \overline{H(\sigma)}. \tag{5}$$

Comparînd ecuaţiile (4), (5) cu (5.21.7), (5.21.8), este uşor de văzut atît asemănarea cît şi deosebirea dintre ele; în problema antiplană avem de-a face cu o singură funcţie $\varphi(\zeta)$, iar funcţia $H(\sigma)$ depinde acolo în esenţă numai de configuraţia geometrică a domeniului.

Soluţia nu mai poate fi deci obţinută aci sub forma—principial simplă, întrucît este vorba numai de o cuadratură—din (5.21.15). În schimb, faptul că funcţiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ trebuie să fie olomorfe în $Д^+$ sugerează următoarea metodă de studiu.

Să înmulţim relaţiile (4), (5) cu $\mathrm{d}\sigma/2\pi\mathrm{i}(\sigma-\zeta)$, unde $\zeta \in Д^+$, şi să le integrăm pe γ. Ţinînd seama în prima din ele de formula (A.10.1) pentru $\varphi(\zeta)$, şi de formula (A.11.37) pentru $\psi(\zeta)$, obţinem

$$H\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\omega(\sigma)\,\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-\zeta)}\,\mathrm{d}\sigma + \overline{\psi(0)} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{6}$$

Repetînd acelaşi raţionament pentru relaţia (5), deducem şi

$$H\,\overline{\varphi(0)} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\overline{\varphi(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)\,(\sigma-\zeta)}\,\mathrm{d}\sigma + \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{7}$$

Relaţia (7) dă explicit funcţia $\psi(\zeta)$ sub forma

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma - H\,\overline{\varphi(0)}; \tag{8}$$

aceasta este o sumă de integrale de tip Cauchy, care pot fi calculate de îndată ce funcţia $\varphi(\zeta)$— sau cel puţin $\varphi'(\sigma)$ şi $\varphi(0)$— sînt cunoscute.

Pe de altă parte, relaţia (6) poate fi scrisă sub forma

$$H\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma - \overline{\psi(0)}. \tag{9}$$

Aceasta este *ecuația integro-diferențială a lui Mushelișvili*, care slujește la determinarea funcției $\varphi(\zeta)$ — după care din (8) se obține și funcția $\psi(\zeta)$.

OBSERVAȚIA 1. Ecuația (9) nu este desigur de tip Fredholm, dar studiul ei poate fi redus la cel al unei ecuații de tip Fredholm (în complex) pentru $\varphi'(\sigma)$ — ceea ce, cu ajutorul teoremei de unicitate și al alternativei lui Fredholm, permite demonstrarea *teoremelor de existență* ale elasticității plane pentru domeniile reprezentabile conform pe cerc. (Vezi N. Mushelișvili [5], § 79. Un caz particular va fi examinat ceva mai departe, în § 21. Vezi încă și J. Rovka [1].)

b) Domenii nemărginite, supuse la tensiuni ne-nule la infinit

Acesta este cazul corpurilor plane cu orificii relativ mici față de dimensiunile lor de ansamblu; acțiunea sarcinilor reale este schematizată prin cea a unor sarcini (care nu mai sînt nule) la infinit în planul cu un orificiu de aceeași formă cu cel dat; soluția acestei din urmă probleme furnizează deci o evaluare a concentrării tensiunilor în vecinătatea orificiului.

Vom face deci uz acum nu de formulele (10.42), ci de formulele (10.32), unde constantele a_1, b_1 sînt date de relațiile (10.35), așadar :

$$\varphi_{(1)}(\mathfrak{z}) = -[X/2\pi(\varkappa+1)]\ln\mathfrak{z} + a_1\mathfrak{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\mathfrak{z}^{-n},$$

$$\psi_{(1)}(\mathfrak{z}) = [\varkappa\overline{X}/2\pi(\varkappa+1)]\ln\mathfrak{z} + b_1\mathfrak{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n}\mathfrak{z}^{-n}.$$

Introducînd aci pe $\mathfrak{z}$ din (2) și grupînd termenii olomorfi, obținem

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= [X/2\pi(\varkappa+1)]\ln\zeta + a_1\omega_{-1}\mathfrak{z}^{-1} + \varphi_0(\zeta),\\ \psi(\zeta) &= -[\varkappa\overline{X}/2\pi(\varkappa+1)]\ln\zeta + b_1\omega_{-1}\zeta^{-1} + \psi_0(\zeta),\end{aligned} \tag{10}$$

unde $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ sînt olomorfe în $Д^+$, iar X, a_1, b_1 sînt cunoscute [10]).

Introducînd acum expresiile (10) în (18.8) și ținînd seama că $\overline{\sigma}=\sigma^{-1}$, obținem în cazul problemei lui Dirichlet condiția la limită

$$\varkappa\varphi_0(\sigma) - [\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}]\overline{\varphi_0'(\sigma)} - \overline{\psi_0(\sigma)} = 2\mu g_0(\sigma), \tag{11}$$

unde

$$2\mu g_0(\sigma) = 2\mu g(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\left[\frac{\overline{X}}{2\pi(\varkappa+1)}\sigma - \overline{a}_1\overline{\omega}_{-1}\sigma^2\right] - \\ - \varkappa a_1\omega_{-1}\sigma^{-1} + \overline{b}_1\overline{\omega}_{-1}\sigma. \tag{12}$$

---

[10]) După cum am arătat în § 18, nota de la pag 465, păstrăm *notațiile*, nu *valorile* coeficienților a_n, b_n. Se vede însă ușor că coeficienții a_1, b_1 din (10) sînt chiar *egali* cu coeficienții lui $\mathfrak{z}$ din dezvoltările în serie ale funcțiilor $\varphi_{(1)}(\mathfrak{z})$, $\psi_{(1)}(\mathfrak{z})$.

În același fel deducem din (18.9) pentru problema lui Neumann

$$\varphi_0(\sigma) + [\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}]\,\overline{\varphi_0'(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = h_0(\sigma) + \text{const.}, \tag{13}$$

unde

$$h_0(\sigma) = h(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\left[\frac{\overline{X}}{2\pi(\varkappa+1)}\,\sigma - \bar{a}_1\,\bar{\omega}_{-1}\,\sigma^2\right] - \\ -\frac{X}{2\pi}\ln\sigma - a_1\,\omega_{-1}\,\sigma^{-1} - \bar{b}_1\,\bar{\omega}_{-1}\,\sigma. \tag{14}$$

Se verifică ușor (compară cu § 11) că funcțiile $g_0(\sigma)$, $h_0(\sigma)$ sînt uniforme.

Cu aceasta, problema este redusă la determinarea funcțiilor olomorfe $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ din condiții la limită de același tip cu condiția (18.10), de care am făcut uz pentru a ajunge la (8), (9).

OBSERVAȚIA 2. Se pune firesc întrebarea dacă aceeași metodă nu poate fi folosită cel puțin în cazul unui domeniu reprezentabil conform pe o coroană mărginită de cercurile Γ_0, Γ_1. Într-adevăr, formulele de la începutul § A.10 sînt valabile și pentru domenii multiplu conexe. Acum însă, separarea realizată în (8) și (9) între funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ nu mai este posibilă.

În schimb, în acest caz rămîne adesea utilizabilă metoda lui L. Milne-Thomson [2], §§ 6.7 și 6.8 (cu modificările din Corrigenda), adică metoda expusă în § 17, dar transformată prin intermediul reprezentării conforme.

Amintim încă soluția lui S. Belonosov [2], capitolele 1, 2, și 5, bazată pe îmbinarea metodei integralelor de tip Cauchy cu teoria transformatelor Fourier-Laplace.

§ 21. SOLUȚIA PROBLEMELOR FUNDAMENTALE PENTRU DOMENII REPREZENTABILE CONFORM PE DISCUL UNITATE PRIN INTERMEDIUL UNOR FUNCȚII POLINOMIALE

Ca și în cazul problemei antiplane (vezi §§ 5.17 și 5.21), problema plană poate fi rezolvată relativ simplu dacă $\omega(\zeta)$ este o funcție rațională. (Vezi N. Mushelișvili [5], cap. 5.)

Ne vom mărgini aci la cazul în care $\omega(\zeta)$ este un polinom

$$\omega(\zeta) = \omega_1\zeta + \omega_2\zeta^2 + \ldots + \omega_p\,\zeta^p, \tag{1}$$

unde am luat $\omega(0) = 0$, și unde presupunem $\omega_p \neq 0$ și $\omega_1 \neq 0$.

În locul raționamentului sugerat în § 18, pag. 466, vom folosi tehnica expusă în § A.11, care elimină de la început calculele inutile.

Pe lîngă funcția $\omega(\zeta)$, vom considera și funcția $\omega_*(\zeta) = \overline{\omega(1/\bar{\zeta})}$, definită în (A.11.27). Valorile la limită ale acestor funcții sînt legate de (A.11.33) iar pentru cele ale derivatelor lor, căpătăm din (A.11.35)

$$\overline{\omega'(\sigma)} = -\sigma^2\,\omega_*'(\sigma) = \overline{\omega'(1/\bar{\zeta})}\big|_{\zeta=\sigma}, \tag{2}$$

(unde am renunţat la indicii $+$, $-$, întrucît $\omega(\sigma) \equiv \omega^{+}(\sigma)$), astfel că din (1) deducem

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(1/\zeta)}}\bigg|_{\zeta=\sigma} = \zeta^{p} \frac{\omega_1 + \omega_2 \zeta + \ldots + \omega_p \zeta^{p-1}}{\bar{\omega}_1 \zeta^{p-1} + 2\bar{\omega}_2 \zeta^{p-2} + \ldots + p\bar{\omega}_p}\bigg|_{\zeta=\sigma}. \quad (3)$$

Întrucît prin ipoteză avem $\omega'(\zeta) \neq 0$ pentru $|\zeta| \leqslant 1$, rezultă şi $\overline{\omega'(1/\bar{\zeta})} \neq 0$ pentru $|\zeta| \geqslant 1$, astfel că funcţia a cărei valoare la limită e dată în (3) nu are poli la distanţă finită în exteriorul cercului unitate, şi nici pe γ. În punctul de la infinit, ea posedă evident un pol de ordin p, astfel că această funcţie poate fi pusă sub forma

$$\omega(\zeta) : \overline{\omega'(1/\bar{\zeta})} = \sum_{n=1}^{p} d_n \zeta^n + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} \zeta^{-n}. \quad (4)$$

Pentru a determina coeficienţii $d_0, d_1, \ldots d_p$, să înmulţim seria (4) cu numitorul din primul membru. Identificînd coeficienţii puterilor $\zeta^{2p-1}, \zeta^{2p-2}, \ldots \zeta^{p-1}$, obţinem relaţiile

$$\begin{aligned} &\bar{\omega}_1 d_p && = \omega_p, \\ &\bar{\omega}_1 d_{p-1} + 2\bar{\omega}_2 d_p && = \omega_{p-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\ &\bar{\omega}_1 d_1 + 2\bar{\omega}_2 d_2 + 3\bar{\omega}_3 d_3 + \ldots + p\,\bar{\omega}_p d_p && = \omega_1, \end{aligned} \quad (5)$$

care dau succesiv valorile constantelor $d_p, d_{p-1}, \ldots d_1$.

Repetînd raţionamentul din (2) pentru funcţia $\overline{\varphi'(\sigma)}$, căpătăm

$$[\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}]\,\overline{\varphi'(\sigma)} = [\omega(\zeta)/\overline{\omega'(1/\bar{\zeta})}]\,\overline{\varphi'(1/\bar{\zeta})}\big|_{\zeta=\sigma}, \quad (6)$$

astfel că funcţia ce apare în prima integrală din (20.9) este valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în *exteriorul* cercului unitate, cu excepţia punctului de la infinit, unde ea posedă un pol de ordin *cel mult* egal cu p.

Întrucît avem

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + \ldots + a_n \zeta^n + \ldots, \quad (7)$$

obţinem

$$\overline{\varphi'(1/\bar{\zeta})} = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 \zeta^{-1} + \ldots + (n+1)\bar{a}_{n+1} \zeta^{-n} + \ldots, \quad |\zeta| > 1; \quad (8)$$

înmulţind (4) cu (8), deducem (vezi (6)) expresia

$$[\omega(\zeta)/\overline{\omega'(1/\bar{\zeta})}]\,\overline{\varphi'(1/\bar{\zeta})} = \sum_{n=0}^{p} K_n \zeta^n + K(1/\zeta), \quad (9)$$

unde $K(1/\zeta)$ este olomorfă pentru $|\zeta| > 1$, şi nulă la infinit. (Expresia efectivă a acestei funcţii nu ne interesează.) În ce priveşte suma $\sum_{n=0}^{p} K_n \zeta^n$, aceasta

este partea principală a funcției considerate în (9), în vecinătatea polului său de ordin p de la infinit. Pentru coeficienții ei obținem ușor din (4) și (8)

$$\begin{aligned} K_p &= \bar{a}_1 d_p, \\ K_{p-1} &= \bar{a}_1 d_{p-1} + 2\bar{a}_2 d_p, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_1 &= \bar{a}_1 d_1 + 2\bar{a}_2 d_2 + \dots + (p-1)\bar{a}_{p-1} d_{p-1} + p\,\bar{a}_p d_p, \\ K_0 &= \bar{a}_1 d_0 + 2\bar{a}_2 d_1 + \dots + (p-1)\bar{a}_{p-1} d_{p-2} + p\bar{a}_p d_{p-1} + (p+1)\,\bar{a}_{p+1} d_p. \end{aligned} \tag{10}$$

Introducînd acum valoarea la limită a funcției (9) în (A.10.23), obținem

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \sum_{n=0}^{p} K_n \zeta^n, \quad \zeta \in \varDelta^+, \tag{11}$$

astfel că ecuația (20.9) se reduce la

$$H\,\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma - \sum_{n=0}^{p} K_n\zeta^n - \overline{\psi(0)}, \tag{12}$$

ceea ce dă funcția $\varphi(\zeta)$ de îndată ce constantele K_n sînt determinate.

Termenul integral din (12) are evident forma (A.11.41), astfel că

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\zeta^n, \quad \zeta \in \varDelta^+, \tag{13}$$

iar din (A.11.43), (A.11.44) urmează și

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{H}_{-n}\zeta^n, \quad \zeta \in \varDelta^+, \tag{14}$$

unde H_n sînt coeficienții dezvoltării Fourier ai funcției $H(\sigma)$ (vezi și § A.9, pag. 763). Introducînd (13) în (12), obținem deci

$$H\,\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\zeta^n - \sum_{n=0}^{p} K_n\zeta^n - \overline{\psi(0)}. \tag{15}$$

Utilizînd dezvoltarea în serie Taylor din (7) și ținînd seama de teorema de unicitate (vezi § A.5, pag. 715), obținem prin identificarea coeficienților

$$\begin{aligned} H\,a_0 &= H_0 - K_0 - \overline{\psi(0)}, \\ H\,a_n &= H_n - K_n, \qquad n = 1,2,\dots p, \\ H\,a_n &= H_n, \qquad n = p+1,\dots \end{aligned} \tag{16}$$

Relațiile (16) dau direct valorile coeficienților a_n pentru $n \geqslant p+1$. Introducînd în (16) expresiile (10) ale coeficienților $K_n (n \neq 0)$, obținem p ecuații algebrice liniare pentru coeficienții $a_1, a_2, \ldots a_p$; odată cu aceasta căpătăm și valorile constantelor $K_1, K_2, \ldots K_p$. Constanta K_0 se obține din ultima relație (10). De îndată ce este aleasă constanta $\bar{b}_0 = \overline{\psi(0)}$ (de care putem dispune întotdeauna), coeficientul a_0 poate fi calculat din prima relație (16). Funcția $\varphi(\zeta)$ este astfel determinată.

Trecînd la calculul funcției $\psi(\zeta)$ cu ajutorul formulei (20.8) și remarcînd că din (A.11.32) obținem (neglijînd indicii $+, -$)

$$[\overline{\omega(\sigma)/\omega'(\sigma)}]\,\varphi'(\sigma) = [\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}/\omega'(\zeta)]\,\varphi'(\zeta)\,|_{\zeta=\sigma}, \tag{17}$$

deducem — utilizînd și (3), (4) — că aceasta este valoarea la limită a unei funcții olomorfe pentru $|\zeta| < 1$, cu excepția originii unde ea posedă un pol de ordin cel mult p. Formulele (A.10.20) și (9) ne permit deci să scriem (compară cu (11)):

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \frac{\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}}{\omega'(\zeta)}\,\varphi'(\zeta) - \sum_{n=1}^{p}\overline{K}_n\,\zeta^{-n} = \overline{K(\bar{\zeta})},\quad \zeta\in Д^{+}, \tag{18}$$

unde $\overline{K(\bar{\zeta})}$ este o funcție cunoscută, olomorfă în $Д^{+}$, și *nu* cu necesitate nulă în origine.

Introducînd acum (14) și (18) în (20.8), și ținînd seama de prima relație (16) care dă valoarea constantei $H\varphi(0)$, obținem

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{H}_{-n}\,\zeta^{n} - \overline{K(\bar{\zeta})} + (1/H)(\overline{K}_0 + \psi(0) - \overline{H}_0). \tag{19}$$

Alegînd $\psi(0) = 0$, deducem deci din (15) și (19) soluția

$$\begin{gathered} H\,\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\,\zeta^n - \sum_{n=0}^{p} K_n\,\zeta^n, \\ \psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{H}_{-n}\zeta^n - [\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}/\omega'(\zeta)]\varphi'(\zeta) + \sum_{n=1}^{p}\overline{K}_n\,\zeta^{-n} + (1/H)(\overline{K}_0 - \overline{H}_0). \end{gathered} \tag{20}$$

Dacă este preferabil să folosim integralele din (13), (14), avem și

$$\begin{gathered} H\,\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma - \sum_{n=0}^{p} K_n\,\zeta^n, \\ \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma - \frac{\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}}{\omega'(\zeta)}\,\varphi'(\zeta) + \sum_{n=1}^{p}\overline{K}_n\,\zeta^{-n} - \overline{\varphi(0)}. \end{gathered} \tag{21}$$

În particular, pentru problema lui Neumann avem $H = 1$, $H(\sigma) = h(\sigma) + C_0$, $\varphi(0) = a_0 = H_0 - K_0 = h_0 + C_0 - K_0 = 0$, și deci (20) devine

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n \zeta^n - \sum_{n=1}^{p} K_n \zeta^n, \\ \psi(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{h}_{-n} \zeta^n - [\overline{\omega(1/\overline{\zeta})}/\omega'(\zeta)]\, \varphi'(\zeta) + \sum_{n=0}^{p} \overline{K}_n \zeta^{-n}. \end{aligned} \tag{22}$$

Rămîne acum de studiat numai sistemul din care se determină $a_1, a_2, \ldots a_p$.

Să considerăm întîi problema lui Neumann. În acest caz, datele la limită trebuie să asigure în prealabil anularea momentului rezultant al sarcinii superficiale. Din (11.18) și (1) obținem

$$\mathscr{M}_3 = \operatorname{Re} \oint_{\mathscr{L}} \overline{h(t)}\, \mathrm{d}t = \operatorname{Re} \oint_{\gamma} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h}_n \sigma^{-n} \right] (\omega_1 + 2\omega_2 \sigma + \ldots + p\omega_p \sigma^{p-1})\, \mathrm{d}\sigma,$$

de unde urmează că trebuie să avem

$$\operatorname{Im}(\omega_1 \overline{h}_1 + 2\omega_2 \overline{h}_2 + \ldots + p\omega_p \overline{h}_p) = 0. \tag{23}$$

Pentru determinarea coeficienților a_n vom introduce (10) în (16); dar în loc să separăm părțile reale și imaginare ale coeficienților a_n, vom adăuga acestor ecuații, ecuațiile ce se obțin prin trecerea la cantități complex conjugate. Obținem astfel sistemele

$$\begin{aligned} & a_1 + \overline{a}_1 d_1 + 2\,\overline{a}_2 d_2 + \ldots + (p-1)\,\overline{a}_{p-1} d_{p-1} + p\,\overline{a}_p d_p = h_1, \\ & a_2 + \overline{a}_1 d_2 + 2\,\overline{a}_2 d_3 + \ldots + (p-1)\,\overline{a}_{p-1} d_p = h_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_p + \overline{a}_1 d_p = h_p, \end{aligned} \tag{24}$$

și încă

$$\begin{aligned} & \overline{a}_1 + a_1 \overline{d}_1 + 2a_2 \overline{d}_2 + \ldots + (p-1)\, a_{p-1} \overline{d}_{p-1} + p a_p \overline{d}_p = \overline{h}_1, \\ & \overline{a}_2 + a_1 \overline{d}_2 + 2\, a_2 \overline{d}_3 + \ldots + (p-1)\, a_{p-1} \overline{d}_p = \overline{h}_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \overline{a}_p + a_1 \overline{d}_p = \overline{h}_p, \end{aligned} \tag{25}$$

așadar $2p$ ecuații pentru cele $2p$ necunoscute a_n, $\overline{a}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$. Întrucît termenii liberi conțin constantele h_n, $\overline{h}_n$ ce intervin în (23), trebuie să verificăm dacă, introducînd (24) și (25) în (23), se ajunge la o identitate. Aceasta se obține înmulțind linia n din (24) cu $n\,\overline{\omega}_n$, linia n din (25) cu $-n\,\omega_n$, și adunînd toate aceste $2p$ relații. Ținînd seama de (5), se vede acum că coeficienții tuturor necunoscutelor a_n, $\overline{a}_n$ din suma astfel construită sînt nuli. Astfel de pildă, pentru coeficientul lui a_1 obținem

$$\overline{\omega}_1 - \omega_1 \overline{d}_1 - 2\,\omega_2 \overline{d}_2 - \ldots - (p-1)\,\omega_{p-1} \overline{d}_{p-1} - p\omega_p \overline{d}_p = 0.$$

Prin urmare, una din ecuațiile (24), (25) poate fi eliminată, ca combinație liniară a celorlalte, astfel că una dintre cantitățile a_n, $\bar{a}_n$ (sau dintre mărimile Re a_n, Im a_n) rămîne nedeterminată. Întrucît în problema lui Neumann putem dispune de valoarea Im $[\varphi'(0)/\omega'(0)]$ (vezi § 20, pag. 480), vom adăuga sistemului drept cea de a $(2n)$ -a, ecuație, relația

$$\operatorname{Im} a_1 = 0. \tag{26}$$

Sistemul astfel modificat are întotdeauna soluție (unică). Pentru a ne convinge de aceasta, este suficient să arătăm că sistemul omogen corespunzător posedă numai soluția identic nulă. Or, aceasta se vede punînd pur și simplu $h(s) \equiv 0$, și ținînd seama de teorema de unicitate a teoriei elasticității.

În cazul problemei lui Dirichlet, coeficienții H_n nu sînt legați prin nici o condiție; sistemul neomogen analog cu (24), (25) are cu siguranță soluție (unică) în virtutea aceleiași teoreme de unicitate, și toate constantele a_n (inclusiv a_1) sînt deplin determinate.

Pentru a obține soluția sub forma (20), am presupus că ea *există* (așadar că datele sînt de așa natură încît problema să aibă soluție), și că ea este *regulată* (așadar că funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ pot fi prelungite pe γ). Soluția de forma (20) satisface evident condițiile la limită — dacă funcțiile φ, φ', ψ astfel construite sînt prelungibile pe γ, și dacă constantele K_n (și deci și a_n) pot fi determinate. Pentru aceasta este suficient să avem $H'(\sigma) \in C^0_\mu(\gamma)$ (vezi (21) și § A.11, pag. 776), și ca $\mathscr{L}$ să fie de clasă C^2 (vezi § A.6, pag. 729—730).

Astfel, este demonstrată o *teoremă de existență* pentru domenii care sînt imagini ale discului unitate prin intermediul unor funcții de reprezentare polinomiale, și pentru deplasări la limită $g(s) \in C^1_\mu(\mathscr{L})$, respectiv pentru forțe superficiale $f(s) \in C^0_\mu(\mathscr{L})$.

Felul în care se ajunge aci la demonstrarea *existenței* este caracteristic pentru raționamentul general, bazat pe teorema de *unicitate*: ecuația integro-diferențială a problemei este redusă la o ecuație pentru care poate fi utilizată alternativa lui Fredholm—cu aceeași semnificație ca alternativa care a dus la afirmarea existenței soluției sistemului (24)—(26). (Vezi și observația din § 20, pag. 421).

OBSERVAȚIA 1. Aceeași metodă poate fi folosită pentru $\mathscr{D}$ nemărginit, dacă funcția $\omega_0(\zeta)$ din (20.2) este un polinom. Problemele de rezolvat sînt problemele (20.11) și (20.13).

OBSERVAȚIA 2. Rezultate de același tip au fost obținute de N. Mushelișvili [5], capitolul 5, în cazul unei funcții $\omega(\zeta)$ *raționale*. Funcția (6) este atunci valoarea la limită a unei funcții meromorfe, care posedă în exteriorul cercului unitate și *alți poli*, în afara punctului de la infinit. Raționamentul rămîne același, dar locul formulelor (A.10.1), (A.10.2) și al consecințelor lor îl iau formulele (A.10.20), (A.10.23) și consecințele analoage.

Vezi de asemenea S. Mihlin [1], § 73, cu demonstrarea teoremei lui D. Șerman asupra soluției prin cuadraturi a problemei *mixte* pentru $\omega(\zeta)$ rațională.

§ 22. PROBLEMA LUI NEUMANN. (METODA ECUAȚIEI INTEGRO-DIFERENȚIALE A LUI MUSHELIȘVILI) EXEMPLE

Ne limităm la exemple destinate a ilustra rezultatele din § 21.

a) Discul circular

Funcția de reprezentare (21.1) este în acest caz

$$z = \omega(\zeta) = R_0 \zeta, \quad R_0 > 0, \tag{1}$$

unde R_0 este raza cercului. Prin urmare, (21.4) devine

$$\omega(\zeta)/\overline{\omega'(1/\bar{\zeta})} = \zeta, \tag{2}$$

iar din (21.9) urmează

$$[\omega(\zeta)/\overline{\omega'(1/\bar{\zeta})}]\ \overline{\varphi'(1/\bar{\zeta})} = \bar{a}_1\zeta + 2\,\bar{a}_2 + K(1/\zeta). \tag{3}$$

Mai departe, sistemul (21.10) se scrie

$$K_1 = \bar{a}_1, \quad K_0 = 2\,\bar{a}_2, \tag{4}$$

astfel că pentru $H = 1$, $H(\sigma) = h(\sigma) + C_0$, $\psi(0) = 0$, din (21.16) avem

$$a_0 = h_0 + C_0 - 2\bar{a}_2; \quad a_1 = h_1 - \bar{a}_1\ ; \quad a_n = h_n\,, \quad n \geqslant 2. \tag{5}$$

Alegînd $a_0 = \operatorname{Im} a_1 = 0$, (21.23) devine aci $\operatorname{Im} h_1 = 0$, și obținem

$$a_1 = \frac{1}{2}\,h_1, \quad a_2 = h_2, \tag{6}$$

și încă $C_0 = 2\bar{h}_2 - h_0$. Cu aceasta, din (21.22) avem soluția

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2}\,h_1\,\zeta + \sum_{n=2}^{\infty} h_n\,\zeta^n, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{h}_{-n}\,\zeta^n - \sum_{n=3}^{\infty} n\,h_n\,\zeta^{n-2}, \tag{7}$$

ceea ce, ținînd seama de (1), coincide evident cu (15.5).

Pentru cazurile în care e avantajos să reținem forma (21.21) a soluției, găsim (pentru $H = 1$, $H(\sigma) = h(\sigma) + C_0$, $\varphi(0) = 0$) :

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - K_0 - K_1\zeta + C_0,$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{h(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - \varphi'(\zeta)\,\zeta^{-1} + \bar{K}_1\,\zeta^{-1} + \bar{C}_0,$$

de unde mai departe

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - \frac{1}{2}h_1\zeta - h_0,$$
$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{h(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - \varphi'(\zeta)\,\zeta^{-1} + \frac{1}{2}h_1\zeta^{-1} + 2h_2 - \overline{h}_0. \tag{8}$$

Evident, avem (vezi (A.9.25))

$$h_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma. \tag{9}$$

Mai departe, întrucît $\frac{1}{2}h_1 = a_1$, din prima relaţie (8) deducem

$$\frac{1}{2}h_1 = \varphi'(0) = \left[\frac{d}{d\zeta}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma\right]\Bigg|_{\zeta=0} - \frac{1}{2}h_1,$$

de unde

$$h_1 = \left[\frac{d}{d\zeta}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma\right]\Bigg|_{\zeta=0}. \tag{10}$$

În fine, întrucît $h_2 = a_2$, avem şi

$$h_2 = \frac{1}{2}\varphi''(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\zeta^2}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma\right]\Bigg|_{\zeta=0}. \tag{11}$$

De altfel, toate acestea decurg şi din dezvoltarea în serie a integralei

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma.$$

Acest exemplu constituie o ilustrare deosebit de simplă pentru compararea metodei din § 21 cu cea din § 15.

b) Discul circular sub acţiunea unor sarcini concentrate aplicate pe frontieră

Fie că în punctele $\mathfrak{z}_k = R_0 \exp(i\chi_k)$, unde $0 \leqslant \chi_1 < \chi_2 < \ldots < \chi_p < 2\pi$, sînt aplicate forţele concentrate $f_k = f_{k1} + i f_{k2}$. (Problema cuprinde drept caz particular pe cea tratată în § 16, exemplul *b*.) Punctele $\mathfrak{z}_k$ sînt, în reprezentarea (1), imaginile punctelor $\sigma_k = \exp(i\chi_k) \in \gamma$.

Funcţia $h(\chi) = \mathrm{i}\int_0^s f(s)\,\mathrm{d}s$ din (11.6) este discontinuă. Raţionînd la fel ca în § 16, exemplul **b**, vom scrie

$$h(\chi) = \mathrm{i}\sum_{k=1}^{h} f_k \quad \text{pentru } \chi_h \leqslant \chi < \chi_{h+1}, \tag{12}$$

unde $\chi_{p+1} = \chi_1$ şi unde evident trebuie să avem $\sum_{k=1}^{p} f_k = 0$.

Abstracţie făcînd de constanta C_0, obţinem din (21.13)

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{h(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{h=1}^{p}\int_{\sigma_h}^{\sigma_{h+1}} \mathrm{i}\sum_{k=1}^{h} f_k \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{h} f_k \ln\left[(\sigma_{h+1}-\zeta)/(\sigma_h-\zeta)\right] = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p} f_k \ln(\sigma_k-\zeta). \tag{13}$$

Tot astfel obţinem şi (vezi mai sus (12))

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\overline{h(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p} \bar{f}_k \ln(\sigma_k-\zeta). \tag{14}$$

După cum se vede, în acest caz este avantajos să utilizăm formulele compacte (8), şi nu dezvoltările (7). Din (13) şi (9)—(11) avem acum

$$h_0 = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p} f_k \ln \sigma_k, \quad h_1 = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p} f_k/\sigma_k, \quad h_2 = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{p} f_k/\sigma_k^2. \tag{15}$$

Condiţia ca $h_1 = 2a_1$ să fie o cantitate reală se scrie

$$\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{p} f_k\bar{\sigma}_k = R_0^{-1}\sum_{k=1}^{p}(x_{k1}f_{k2} - x_{k2}f_{k1}) = 0, \tag{16}$$

şi coincide evident cu condiţia $\mathscr{M}_3 = 0$.

Din (8) şi (13)—(15) obţinem după calcule elementare

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p} f_k \ln(1-\zeta/\sigma_k) - \frac{\zeta}{4\pi}\sum_{k=1}^{p} f_k/\sigma_k,\\ \psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p} \bar{f}_k \ln(1-\zeta/\sigma_k) - \frac{\zeta}{2\pi}\sum_{k=1}^{p} f_k/[\sigma_k^2(\sigma_k-\zeta)].\end{aligned} \tag{17}$$

Luînd aci în particular $\chi_1 = \chi_0$, $\chi_2 = 2\pi - \chi_0$, $f_1 = -\mathrm{i}P$, $f_2 = \mathrm{i}P$, se obţin din (17) tocmai formulele (16.10), inclusiv constantele aditive neesenţiale.

c) *Planul cu un orificiu eliptic. Concentrarea tensiunilor*

Funcţia (A.8.8) realizează reprezentarea conformă a unei coroane circulare pe o coroană eliptică. Dacă raza cercului exterior tinde la infinit, căpătăm reprezentarea exteriorului unui cerc pe exteriorul unei elipse. Pentru a obţine reprezentarea discului unitate pe exteriorul unei elipse, este suficient să considerăm şi inversiunea $\zeta \Rightarrow 1/\zeta$, ceea ce conduce la funcţia

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = c(\zeta^{-1} + h\,\zeta), \tag{18}$$

de unde

$$x_1 = c(\rho^{-1} + h\rho)\cos\theta, \qquad x_2 = -\,c(\rho^{-1} - h\rho)\sin\theta. \tag{19}$$

În notaţiile din § 20, avem desigur $c = \omega_{-1}$.

Alegînd $\rho = 1$, obţinem condiţia $\rho^{-1} - h\rho > 0$, astfel că trebuie să avem $h < 1$ pentru ca funcţia (18) să realizeze reprezentarea discului $\mathcal{D}^+$ pe exteriorul elipsei de semi-axe

$$a = c(1 + h), \qquad b = c(1 - h). \tag{20}$$

Pentru a putea utiliza relaţiile (20.8), (20.9) — deduse pentru *deplasări şi tensiuni nule la infinit* — vom calcula mai întîi valorile la limită

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{1 + h\sigma^2}{\sigma(h - \sigma^2)}, \quad \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} = \frac{\sigma(h + \sigma^2)}{h\sigma^2 - 1}. \tag{21}$$

Formulele menţionate dau aci (după ce am renunţat la constanta C_0) :

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1 + h\sigma^2}{\sigma(h - \sigma^2)}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma, \\ \psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{h(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sigma(h + \sigma^2)}{h\sigma^2 - 1}\,\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma. \end{aligned} \tag{22}$$

În cele de mai sus, funcţia $\overline{\varphi'(\sigma)}$ este valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în $\mathcal{D}^-$ (vezi (A.11.35)).

Prima funcţie din (21) este valoarea la limită a funcţiei

$$\begin{aligned} \frac{1 + h\zeta^2}{\zeta(h - \zeta^2)} &= -\frac{1 + h\zeta^2}{\zeta^3(1 - h\zeta^{-2})} = \\ &= -(1 + h\zeta^2)\zeta^{-3}(1 + h\zeta^{-2} + h^2\zeta^{-4} + \ldots), \end{aligned} \tag{23}$$

aşadar (întrucît avem $h < 1$, şi deci $|h\zeta^{-2}| < 1$ pentru $\zeta \in \mathcal{D}^-$), a unei funcţii olomorfe în $\mathcal{D}^-$ şi nule la infinit. Prin urmare, în virtutea formu-

lei (A.10.2), integrala ce conține pe $\overline{\varphi'(\sigma)}$ în (22) este nulă, și astfel obținem

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} \mathrm{d}\sigma. \tag{24}$$

A doua expresie din (21) este valoarea la limită a funcției

$$\frac{\zeta(h + \zeta^2)}{h\zeta^2 - 1} = -\zeta \frac{h + \zeta^2}{1 - h\zeta^2} =$$
$$= -\zeta(h + \zeta^2)(1 + h\zeta^2 + h^2\zeta^4 + \ldots), \tag{25}$$

așadar (întrucît $h < 1$, și deci $|h\zeta^2| < 1$ pentru $\zeta \in Д^+$), a unei funcții olomorfe în $Д^+$. Integrala din expresia (22) a funcției $\psi(\zeta)$ se calculează deci cu ajutorul formulei (A.10.1), de unde

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{h(\sigma)}}{\sigma - \zeta} \mathrm{d}\sigma + \frac{\zeta(h + \zeta^2)}{1 - h\zeta^2} \varphi'(\zeta). \tag{26}$$

Dimpotrivă, să presupunem acum că *deplasările și tensiunile nu sînt nule la infinit*. Formulele precedente își pierd desigur valabilitatea, și soluția are în acest caz forma (20.10), unde funcțiile $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ se obțin din formulele (24), (26), dar unde $h(\sigma)$ trebuie înlocuită prin $h_0(\sigma)$ dată de relația (20.14), care *în problema de față* devine

$$h_0(\sigma) = h(\sigma) - \frac{1 + h\sigma^2}{h - \sigma^2}\left[\frac{\overline{X}}{2\pi(\varkappa + 1)} - \bar{a}_1\sigma c\right] -$$
$$-\frac{X}{2\pi}\ln \sigma - a_1 c \sigma^{-1} - b_1 c \sigma; \tag{27}$$

(a_1, b_1 au valorile din (10.33), iar c este constanta din (18)).

Cu titlu de exemplu, să considerăm cazul unui orificiu eliptic liber ($h(\sigma) = X = 0$), planul fiind supus la infinit la o întindere P după o direcție ce formează un unghi ϑ cu Ox_1. Notînd cu $\mathfrak{z}^1$ afixul unui punct în noile axe, rotite de un unghi ϑ față de axele Ox_1x_2, obținem din (9.16), (9.20) tensiunile la infinit

$$S_0 = S_0^1 = P, \quad S = [\exp(-2i\vartheta)]\, S^1 = -[\exp(-2i\vartheta)]P, \tag{28}$$

și deci, utilizînd (10.33):

$$a_1 = \bar{a}_1 = \frac{1}{4}P, \quad b_1 = -\frac{1}{2}[\exp(-2i\vartheta)]\, P. \tag{29}$$

Din (27) căpătăm acum (întrucît $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$):

$$h_0(\sigma) = \frac{1}{4} cP\left[\frac{\sigma(1 + h\sigma^2)}{h - \sigma^2} - \sigma^{-1}\right] + \frac{1}{2} cP \,[\exp\,(2i\vartheta)]\sigma,$$

$$\overline{h_0(\sigma)} = -\frac{1}{4} cP\left[\frac{h + \sigma^2}{\sigma(1 - h\sigma^2)} + \sigma\right] + \frac{1}{2} cP \,[\exp\,(-2i\vartheta)]\sigma^{-1}. \tag{30}$$

Cu ajutorul relației (23) obținem

$$\frac{\zeta(1 + h\zeta^2)}{h - \zeta^2} = -(1 + h\zeta^2)\zeta^{-1}\,(1 + h\zeta^{-2} + h^2\zeta^{-4} + \ldots) =$$

$$= -h\zeta - \zeta^{-1} - h^2\zeta^{-1} - \ldots, \tag{31}$$

de unde conchidem că această funcție este olomorfă în $Д^-$, cu excepția punctului de la infinit, unde ea posedă un pol de primul ordin.

Tot astfel, cu ajutorul relației (25) deducem că

$$\frac{h + \zeta^2}{\zeta(1 - h\zeta^2)} = (h + \zeta^2)\zeta^{-1}\,(1 + h\zeta^2 + h^2\zeta^4 + \ldots) =$$

$$= h\zeta^{-1} + (1 + h^2)\zeta + \ldots, \tag{32}$$

astfel că această funcție este olomorfă în $Д^+$, cu excepția originii, unde ea posedă un pol de primul ordin.

Făcînd acum uz de (A.10.23), respectiv de (A.10.20), obținem deci

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sigma(1 + h\sigma^2)}{h - \sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -h\zeta,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h + \sigma^2}{\sigma(1 - h\sigma^2)}\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{h + \zeta^2}{\zeta(1 - h\zeta^2)} - \frac{h}{\zeta} = \frac{(1 + h^2)\zeta}{1 - h\zeta^2}, \tag{33}$$

și mai departe, evident,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta)} = 0, \;\; \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\sigma\, d\sigma}{\sigma - \zeta} = \zeta. \tag{34}$$

Formulele (24) și (26) scrise pentru funcțiile $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ dau așadar

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{4} cP\,\,[2\exp\,(2i\vartheta) - h]\zeta,$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{1}{4} cP\left[\frac{1 + h^2}{1 - h\zeta^2} + 1\right]\zeta + \frac{h + \zeta^2}{1 - h\zeta^2}\,\zeta\varphi_0'(\zeta), \tag{35}$$

astfel că în definitiv, introducînd (35) şi (29) în (20.10), avem

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4} cP \left[\zeta^{-1} + (2 \exp(2i\vartheta) - h)\zeta\right],$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2} cP\Bigg[(\exp(-2i\vartheta))\zeta^{-1} + \tag{36}$$

$$+ \frac{1 + h^2 - h[\exp(2i\vartheta)] - [\exp(2i\vartheta)]\zeta^2}{1 - h\zeta^2}\zeta\Bigg].$$

Să comparăm această soluţie cu cea din problema planului *fără orificiu*, supus aceleiaşi sarcini la infinit (notată cu un indice i — stare iniţială). Pentru aceasta, remarcăm că din (10.32) rezultă (vezi şi finele § 16, pag. 458) că avem

$$\varphi_{(1)}^{(i)}(\mathfrak{z}) = a_1\mathfrak{z}, \qquad \psi_{(1)}^{(i)}(\mathfrak{z}) = b_1\mathfrak{z}, \tag{37}$$

de unde, utilizînd (18) şi (29), urmează

$$\varphi^{(i)}(\zeta) = \frac{1}{4} cP(\zeta^{-1} + h\zeta), \qquad \psi^{(i)}(\zeta) = -\frac{1}{2} cP[\exp(-2i\vartheta)](\zeta^{-1} + h\zeta). \tag{38}$$

Diferenţa dintre funcţiile (36) şi (38) descrie tocmai perturbarea stării elastice a planului, provocată de prezenţa orificiului eliptic.

În cazul-limită $h = 0$ al unui orificiu circular (studiat în (16.25) pentru $\vartheta = 0$) deducem din (36):

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4} cP \{\zeta^{-1} + 2[\exp(2i\vartheta)]\zeta\},$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2} cP\{[\exp(-2i\vartheta)]\zeta^{-1} + \zeta - [\exp(2i\vartheta)]\zeta^3\}. \tag{39}$$

Celălalt caz-limită ($h = 1$) corespunde prezenţei unei fisuri rectilinii:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4} cP\{\zeta^{-1} + [2\exp(2i\vartheta) - 1]\zeta\},$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2} cP\left[[\exp(-2i\vartheta)]\zeta^{-1} + \frac{2 - [\exp(2i\vartheta)](1 + \zeta^2)}{1 - \zeta^2}\zeta\right]. \tag{40}$$

Se poate aprecia uşor efectul prezenţei orificiului eliptic. În acest scop, să remarcăm că din (18.6) şi (9.16) obţinem în orice sistem de axe —

deci şi în coordonate naturale — valoarea $S_0 = \widehat{\rho\rho} + \widehat{\theta\theta}$. Întrucît frontiera orificiului este liberă, deducem

$$\widehat{\rho\rho}|_{\mathscr{L}_1} = \widehat{\rho\theta}|_{\mathscr{L}_1} = 0, \tag{41}$$

şi deci

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathscr{L}_1} = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(\sigma)/\omega'(\sigma)]. \tag{42}$$

Prin urmare, utilizînd (36) şi (18) deducem (a nu se confunda ϑ şi θ!)

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathscr{L}_1} = P \operatorname{Re} \{[1 - (2 \exp (2i\vartheta) - h) \exp (2i\theta)] : [1 - h \exp (2i\theta)]\}$$

$$= P [1 - h^2 + 2h \cos 2\vartheta - 2 \cos 2(\vartheta + \theta)] : [1 - 2h \cos 2\theta + h^2], \tag{43}$$

de unde în particular pentru cerc ($h = 0$):

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathscr{L}_1} = P [1 - 2 \cos 2 (\vartheta + \theta)], \tag{44}$$

şi pentru fisura rectilinie ($h = 1$):

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathscr{L}_1} = P [\cos 2\vartheta - \cos 2 (\vartheta + \theta)] : [1 - \cos 2\theta]. \tag{45}$$

Luînd $\vartheta = 0$ (sarcină dirijată după Ox_1), căpătăm din (43)

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathscr{L}_1} = P [1 + 2h - h^2 - 2 \cos 2\theta] : [1 + h^2 - 2h \cos 2\theta]. \tag{46}$$

Derivata acestei cantităţi în raport cu θ conţine în factor pe $\sin 2\theta$, şi deci se anulează — pentru orice h — pentru $\theta = 0$ şi $\theta = \pi/2$. Ţinînd seama de (20), obţinem valorile

$$\widehat{\theta\theta}\Big|_{\mathscr{L}_1}^{\theta=0} = - P, \quad \widehat{\theta\theta}\Big|_{\mathscr{L}_1}^{\theta=\pi/2} = P\left(1 + 2\,\frac{1 - h}{1 + h}\right) = P\left(1 + 2\,\frac{b}{a}\right). \tag{47}$$

În punctul-frontieră $\theta = \pi/2$ avem deci, în cazul cercului, concentrarea maximă pentru tensiunea normală: $\widehat{\theta\theta} = 3P$. Dimpotrivă, în cazul fisurii rectilinii avem $\widehat{\theta\theta}|_{\theta=\pi/2} = P$: sarcina la infinit dirijată după direcţia fisurii nu modifică tensiunile normale în vecinătatea acesteia.

În punctele de intersecţie ale elipsei cu axa Ox_1 obţinem din (43):

$$\widehat{\theta\theta}|_{\theta=0,\,\pi} = P [1 + h - 2 \cos 2\vartheta] : [1 - h] = P [a/b - (1 + a/b) \cos 2\vartheta]. \tag{48}$$

Pentru $h = 1$ ($b = 0$), tensiunile devin infinite, oricare ar fi $\vartheta \neq 0$.

Cele de mai sus constituie exemple simple de studiu a *concentrării tensiunilor* în problema plană. O cercetare detaliată a acestei probleme (incluzînd rezultate relative la încovoierea plăcilor, la corpuri anizotrope, date experimentale etc.) este dată în monografia lui G. Savin [1].

Vezi de asemenea A. Green şi W. Zerna [1], capitolul 8 (şi cap. 9—pentru cazul anizotrop); L. Milne—Thomson [2], §§ 6.3 şi 6.4; lucrările lui S. Belonosov [3]; E. Burmistrov [1]; S. Heler et al. [1]; G. Şapiro [1] — şi lucrările mai recente ale lui M. Kikukava [1] — [4] şi N. Kurdin [1]. Pentru utilizarea de ecuaţii de ordin superior în teoria plăcilor, vezi B. Pelch [1]. Pentru un punct de vedere permiţînd evitarea apariţiei de tensiuni infinite în vecinătatea fisurilor, vezi indicaţiile din § 6.25 pag. 508. Pentru cazul teoriei asimetrice, vezi G. Savin [2], § 4.

§ 23. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU DOMENII MULTIPLU CONEXE. ALGORITMUL ALTERNANT GENERALIZAT AL LUI SCHWARZ-MIHLIN

O cale posibilă de rezolvare efectivă a problemelor fundamentale pentru domenii *multiplu conexe* este dată de generalizarea la teoria elasticităţii a algoritmului alternant al lui Schwarz. Pentru detalii, vezi S. Mihlin [1], §§ 48—53. (Vezi şi indicaţiile din § 4.4, pag. 135.) În cele ce urmează, vom prezenta ideea algoritmului alternant, şi o schiţă a raţionamentului ce îl justifică.

a) Algoritmul alternant

Să considerăm ca exemplu problema lui Neumann pentru un domeniu mărginit de două curbe simple închise $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1$, conducînd la problema la limită

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = h^{(j)}(t) + C_j, \quad t \in \mathscr{L}_j \, (j = 0,1). \tag{1}$$

Presupunînd deja efectuată separarea eventualilor termeni multiformi (vezi § 11, pag. 418), rezultă că funcţiile φ, ψ sînt olomorfe în $\mathscr{D}$, iar $h^{(0)}(t)$, $h^{(1)}(t)$ sînt uniforme pe $\mathscr{L}$. Să luăm pentru început $h^{(1)}(t) = C_1 = 0$.

Să admitem acum că putem rezolva problema (1) pentru domeniul *simplu conex* $\mathscr{D}_0^+$; funcţiile lui Kolosov şi Mushelişvili obţinute pot fi privite ca o primă aproximaţie a soluţiei, şi vor fi notate cu indici la stînga: ${}_1\varphi(z)$, ${}_1\psi(z)$. Cunoaşterea lor permite să calculăm funcţia

$${}_1h(t) \equiv {}_1\varphi(t) + \overline{t_1\varphi'(t)} + \overline{{}_1\psi(t)}, \quad t \in \mathscr{L}_1. \tag{2}$$

Dacă obţinem astfel ${}_1h(t) \equiv 0$ pe $\mathscr{L}_1$, problema (1) este rezolvată. Dacă nu, se trece la rezolvarea problemei lui Neumann pentru domeniul nemărginit $\mathscr{D}_1^-$, cu datele la limită ce rezultă din (2). Aceasta duce la

determinarea unor funcții Kolosov-Mushelișvili ${}_2\varphi(z)$, ${}_2\psi(z)$, iar funcțiile ${}_1\varphi - {}_2\varphi$, ${}_1\psi - {}_2\psi$ rezolvă evident o anumită problemă Neumann pentru domeniul $\mathscr{D}$ cu componenta $\mathscr{L}_1$ a frontierei libere, așa cum cere condiția (1). Dacă în același timp condiția (1) pe $\mathscr{L}_0$ rămîne satisfăcută, aceasta este soluția exactă. În general însă, apariția funcțiilor $-{}_2\varphi$, $-{}_2\psi$ face ca (1) (tocmai condiția din care am dedus funcțiile ${}_1\varphi$, ${}_1\psi$) să nu mai fie verificată pe $\mathscr{L}_0$. Este deci firesc să rezolvăm acum o nouă problemă Neumann cu date la limită ce se obțin calculînd

$$ {}_2h(t) = {}_2\varphi(t) + t\,\overline{{}_2\varphi'(t)} + \overline{{}_2\psi(t)}, \qquad t \in \mathscr{L}_0, \tag{3} $$

ceea ce conduce la găsirea unor funcții ${}_3\varphi(z)$, ${}_3\psi(z)$. Funcțiile ${}_1\varphi - {}_2\varphi + {}_3\varphi$, ${}_1\psi - {}_2\psi + {}_3\psi$ asigură acum verificarea condiției la limită pe $\mathscr{L}_0$, dar pretind o nouă corecție pe $\mathscr{L}_1$, datorată apariției termenilor ${}_3\varphi$, ${}_3\psi$ — și procesul continuă astfel la infinit.

În determinarea termenilor de ordin par, așadar cînd se rezolvă probleme Neumann pentru domeniul $\mathscr{D}_1^-$, apar termeni constanți pe care trebuie să-i neglijăm; aceștia pot fi priviți ca fiind valorile la infinit ale funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili, întrucît, prin ipoteză, nu există termeni logaritmici sau polari la infinit.

Putem renunța acum la presupunerea inițială $h^{(1)}(t) \equiv 0$: într-adevăr, dacă componenta $\mathscr{L}_1$ nu este liberă, este suficient să scădem din primul membru din (2) funcția $h^{(1)}(t)$, și lanțul ulterior de raționamente rămîne intact.

b) *Exemplu*

Reproducem aci, cu unele detalii, un exemplu dat de S. Mihlin [1], § 53. Fie o coroană circulară excentrică de raze R_0, R_1. Problema plană corespunzătoare poate fi rezolvată prin metoda seriilor, făcînd uz de funcția de reprezentare (A.8.3); calculele sînt similare celor din § 19 (vezi și § 5.18, exemplul *e*). Ea se pretează însă și la utilizarea algoritmului alternant, întrucît soluțiile pentru domenii cu o singură frontieră circulară sînt relativ simple.

Să alegem originea în centrul cercului $\mathscr{L}_0$, și să luăm linia centrelor drept axă Ox_1; centrul cercului $\mathscr{L}_1$ va fi notat cu afixul său a_1.

Pentru problema lui Neumann pentru domeniul $\mathscr{D}_0^+$, avem de utilizat formulele (22.8), care, ținînd seama de (22.1), se scriu

$$ \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{h(t)}{t - z}\,dt - \frac{1}{2}\,h_1 R_0^{-1} z - h_0, \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\overline{h(t)}}{t - z}\,dt - R_0^2\,\varphi'(z)\,z^{-1} + \frac{1}{2}\,h_1 R_0\, z^{-1} + 2h_2 - \bar{h}_0. \end{aligned} \tag{4} $$

Coeficienții h_0, h_1, h_2 se deduc din (22.9) — (22.11) ținînd seama de (22.1) — așadar înlocuind derivarea în raport cu ζ prin derivare față de z, și înmulțind cu R_0 la o putere egală cu ordinul de derivare.

Pentru problema lui Neumann pentru domeniul $\mathscr{D}_1^-$, vom face uz de soluția problemei planului cu un orificiu eliptic, luînd $c = R_1$ și $h = 0$ în (22.18). Întrucît (22.18) realizează reprezentarea *exteriorului* unei elipse pe Π^+, va trebui să schimbăm și sensul de parcurs pe frontieră. Neglijînd constantele neesențiale și revenind la sensul de parcurs direct, căpătăm din (22.24) și (22.26) pentru un cerc $\mathscr{L}_1$ cu centrul în origine

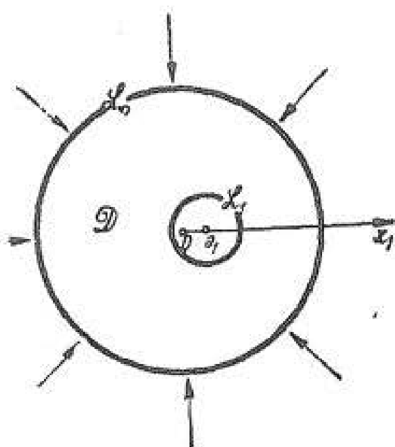


Fig. 6.23.1

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_1} \frac{h(t)}{t - z}\, dt,$$
$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_1} \frac{\overline{h(t)}}{t - z}\, dt - R_1^2\, \varphi'(z)\, z^{-1}. \tag{5}$$

În rezultatul final, va trebui evident să ținem seama și de formulele (9.15).

Pentru simplitate, vom admite că componenta $\mathscr{L}_1$ este liberă, iar $\mathscr{L}_0$ este supusă unei presiuni hidrostatice. Întrucît pentru orice domeniu supus la o astfel de presiune este valabilă soluția (11.21), prima aproximație va fi

$$_1\varphi(z) = -\frac{1}{2}\, p z, \quad _1\psi(z) = 0. \tag{6}$$

Înlocuind (6) în (2), obținem $_1h(t) = -pt$, valoare ce trebuie introdusă mai departe în (5). Întrucît z e exterior curbei $\mathscr{L}_1$, integrala ce dă $_2\varphi(z)$ este nulă (vezi (A.10.1)). Formulele (9.15) arată acum că funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili rămîn invariante la o translație. A doua formulă (5) se scrie

$$_2\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_1} \frac{p\bar{t}}{t - z}\, dt,$$

sau încă, notînd $t - a_1 = T$, $z - a_1 = Z$:

$$\frac{1}{p}\, _2\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|T| = R_1} \frac{\bar{T} + a_1}{T - Z}\, dT. \tag{7}$$

Întrucît $\bar{T} = R_1^2/T$, și $|z - a_1| > R_1$, de unde $|Z| > R_1$, avem

$$\frac{1}{p}\, _2\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|T| = R_1} \frac{R_1^2}{T(T - Z)}\, dT + a_1 \frac{1}{2\pi i}\oint_{|T| = R_1} \frac{dT}{T - Z}, \quad |Z| > R_1. \tag{8}$$

Dat fiind că funcția $1/T$ este valoarea la limită a unei funcții olomorfe în exteriorul cercului de rază R_1, și nule la infinit, prima integrală din (8) are (vezi (A.10.2)) valoarea $R_1^2(-Z^{-1})$; cea de a doua este evident nulă.

Prin urmare, termenii de corecție obținuți sînt

$$_2\varphi(z) = 0, \quad _2\psi(z) = -p\, R_1^2/(z - a_1). \tag{9}$$

Introducînd (9) în (3), şi ţinînd seama că pe cercul $\mathscr{L}_0$ avem $\bar{t} = R_0^2/t$, căpătăm ${}_2h(t) = -pR_1^2 t/(R_0^2 - a_1 t)$, valoare ce trebuie introdusă în (4). Prima din aceste formule devine

$$ {}_3\varphi(\mathfrak{z}) = -p\, R_1^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}_0} \frac{t}{R_0^2 - a_1 t} \frac{dt}{t - \mathfrak{z}} - \frac{1}{2} R_0^{-1} h_1 \mathfrak{z}. \tag{10} $$

În integrala din (10) intervine valoarea la limită a unei funcţii ce nu posedă poli în $\mathscr{D}_0^+$: întrucît $a_1 \in \mathscr{D}_0^+$, numitorul integrandului se anulează într-un punct $R_0^2/a_1 > R_0$. Valoarea integralei ei este deci dată de (A.10.1) :

$$ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}_0} \frac{t}{R_0^2 - a_1 t} \frac{dt}{t - \mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{z}}{R_0^2 - a_1 \mathfrak{z}}. \tag{11} $$

Din (22.10) şi (11), derivînd în raport cu $\mathfrak{z}$ şi luînd apoi $\mathfrak{z} = 0$, obţinem (după înmulţire cu R_0, şi ţinînd seama şi de factorul pR_1^2) valoarea $h_1 = -pR_1^2/R_0$. Cu aceasta, din (10), (11) urmează

$$ {}_3\varphi(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{2} p\,(R_1^2/R_0^2)\ [(R_0^2 + a_1\mathfrak{z})\mathfrak{z}/(R_0^2 - a_1\mathfrak{z})]. \tag{12} $$

A doua formulă (4) necesită calcularea integralei

$$ -p\, R_1^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\bar{t}}{R_0^2 - a_1 \bar{t}} \frac{dt}{t - \mathfrak{z}} = -p\, R_1^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}_0} \frac{dt}{(t - a_1)(t - \mathfrak{z})} = 0, \tag{13} $$

unde am ţinut seama că $\bar{t} = R_0^2/t$, şi de formula (A.10.2) pentru funcţia $1/(t - a_1)$, valoare la limită a unei funcţii olomorfe în $\mathscr{D}_0^-$ şi nule la infinit.

Al doilea şi al treilea termen din a doua formulă (4) se obţin cu ajutorul valorilor deja calculate ${}_3\varphi(\mathfrak{z})$ şi h_1, astfel că

$$ {}_3\psi(\mathfrak{z}) = p\, R_1^2\, a_1\ [(2R_0^2 - a_1\mathfrak{z})/(R_0^2 - a_1\mathfrak{z})^2]. \tag{14} $$

Continuarea calculului nu prezintă dificultăţi principiale.

c) *Asupra justificării algoritmului alternant*

Convergenţa acestui procedeu este în general destul de lentă. De asemenea, dificultăţile de calcul cresc simţitor dacă $\mathscr{L}$ are mai mult decît două componente.

Procedeul poate fi utilizat în asociere cu metoda reprezentării conforme ; în acest caz, problema reprezentării *unui domeniu multiplu conex* pe un domeniu canonic este deci înlocuită cu cea (mult mai simplă) a reprezentării conforme a *mai multor domenii simplu conexe* pe discul unitate. Un astfel de procedeu e folosit de L. Solomon şi D. Drăghicescu [1] pentru domeniul mărginit de două pătrate cu centrul comun şi laturile paralele. Remarcăm însă că convergenţa algoritmului este mult înrăutăţită dacă funcţiile de reprezentare nu sînt destul de exacte. (O astfel de deficienţă, neremarcată la timpul ei, se prezintă în lucrarea menţionată, datorită utilizării integralei Schwarz-Christoffel ; vezi şi § A.8, pag. 755–756).

Pentru studiul teoretic al algoritmului, calea de urmat este, în linii mari, următoarea. Condiția la limită a problemei lui Neumann se scrie

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = h^{(j)}(t) + C_j, \quad t \in \mathscr{L}_j,\ j = 0, 1, \ldots, m. \quad (15)$$

Presupunînd termenii multiformi deja separați, vom căuta $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sub forma

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{m} \varphi_j(z), \quad \psi(z) = \sum_{j=0}^{m} \psi_j(z), \quad (16)$$

unde fiecare din funcțiile $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ este olomorfă în domeniul de indice j (așadar în $\mathscr{D}_0^+$ pentru $j = 0$, și în $\mathscr{D}_j^-$ pentru $j = 1, 2, \ldots m$).

Să introducem funcțiile

$$\widetilde{h}_j(t) = \varphi_j(t) + t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}, \quad t \in \mathscr{L}_j. \quad (17)$$

Dacă funcțiile $\widetilde{h}_j(t)$ ar fi cunoscute, relația (17) ar permite să rezolvăm problema lui Neumann pentru domeniile mărginite de cîte o singură curbă $\mathscr{L}_j$, așadar să determinăm φ_j, ψ_j și deci — ținînd seama de (16) — să scriem soluția problemei inițiale.

Soluția problemei lui Neumann depinde evident de punct, de domeniul considerat, și de valorile la limită corespunzătoare. Putem deci scrie

$$\varphi_l(z) + z\overline{\varphi_l'(z)} + \overline{\psi_l(z)} = \mathfrak{M}_l\,[z; \widetilde{h}_l(t)], \quad \text{pentru } z \in \mathscr{D}_l^- \text{ sau } z \in \mathscr{D}_0^+, \quad (18)$$

unde $\mathfrak{M}_l$ este un anumit operator ce depinde numai de domeniul mărginit de $\mathscr{L}_l$, și al cărui aspect se obține dacă rezolvăm problema Neumann corespunzătoare.

Pe orice curbă $\mathscr{L}_j$ avem deci, ca mai sus,

$$\varphi_j(t) + t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)} = \widetilde{h}_j(t), \quad t \in \mathscr{L}_j. \quad (19)$$

Pe de altă parte, pentru orice indice $l \neq j$, curba $\mathscr{L}_j$ este *în interiorul* domeniului $\mathscr{D}_l^-$ (sau $\mathscr{D}_0^+$), astfel că pe această curbă este valabilă relația (18):

$$\varphi_l(t) + t\overline{\varphi_l'(t)} + \overline{\psi_l(t)} = \mathfrak{M}_l\,[t; \widetilde{h}_l(t)], \quad t \in \mathscr{L}_j,\ l \neq j. \quad (20)$$

Adunînd (19) cu toate relațiile (20), și ținînd seama de (16), căpătăm

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \widetilde{h}_j(t) + \sum_{l \neq j} \mathfrak{M}_l\,[t; \widetilde{h}_l(t)], \quad t \in \mathscr{L}_j. \quad (21)$$

Dar primul membru din (21) are valoarea (15); aceasta conduce la sistemul

$$\widetilde{h}_j(t) + \sum_{l \neq j} \mathfrak{M}_l\,[t; \widetilde{h}_l(t)] = h^{(j)}(t) + C_j, \quad t \in \mathscr{L}_j,\ j, l = 0, 1, \ldots m. \quad (22)$$

Problema este redusă astfel la determinarea funcțiilor $\widetilde{h}_j(t)$ din (22), funcțiile $h^{(j)}(t)$ fiind cunoscute.

Posibilitatea de a rezolva sistemul (22) depinde evident de natura operatorilor $\mathfrak{M}_t$. Această chestiune a fost studiată de D. Șerman (vezi S. Mihlin [1], § 52). Rezultatul obținut permite să se afirme că sistemul (22) admite alternativa lui Fredholm — și în felul acesta existența soluției decurge direct din teorema de unicitate a lui Kirchhoff.

Dacă componentele $\mathscr{L}_j$ nu sînt prea apropiate, sistemul (22) poate fi rezolvat prin aproximații succesive, ca în studiul ecuației lui Laplace în domenii multiplu conexe (loc. cit., § 50). Aceasta impune o tehnică de recurență și, în ultimă instanță, sîntem conduși tocmai la felul de a raționa din (1)—(3). Pentru domenii dublu conexe, convergența acestui algoritm a fost demonstrată de S. Sobolev [1].

§ 24. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU DOMENII MULTIPLU CONEXE. ECUAȚIA INTEGRALĂ A LUI ȘERMAN

Din cele arătate în § 18 (pag. 466), urmează că una din dificultățile esențiale în rezolvarea problemei plane stă în necesitatea de a determina funcția $\mathfrak{z} = \omega(\zeta)$. Această dificultate devine considerabilă în cazul domeniilor multiplu conexe, caz în care se adaugă și imposibilitatea de a face uz în mod direct de metode de calcul eficace, ca cea a seriilor sau (chiar pentru domenii dublu conexe) cea a integralelor de tip Cauchy.

Există rezultate importante, bazate pe utilizarea integralelor de tip Cauchy pentru domenii multiplu conexe; unele dintre ele duc la rezolvarea problemei în chiar planul $\mathfrak{z}$, *fără* a face uz de funcția de reprezentare. Problema este amănunțit examinată de N. Mushelișvili [5], §§ 96—104, unde se dau rezultatele esențiale în acest sens, datorate lui S. Mihlin, N. Mushelișvili și D. Șerman.

În cele ce urmează, vom expune ideea unei soluții mai recente date de D. Șerman [7]. Pentru bibliografia rezultatelor obținute pe această cale, vezi D. Șerman [8]. Vezi încă același autor [9].

a) *Ecuația lui Șerman*

Esențialul metodei constă în a reduce problema la limită la rezolvarea unor ecuații integrale pentru domenii mărginite fiecare de *cîte una* din componentele lui $\mathscr{L}$. Metoda rămîne valabilă și pentru problema lui Dirichlet.

Pentru simplitate, fie că $\mathscr{D}$ este mărginit de două curbe simple închise $\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1$. Condiția la limită are forma (11.7), unde vom presupune constantele C_j incluse în funcția $h(t)$. Avem prin urmare:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = h(t), \quad t \in \mathscr{L}. \tag{1}$$

Să definim *numai pe componenta exterioară* $\mathscr{L}_0$, funcţia complexă

$$\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = a(t), \quad t \in \mathscr{L}_0. \qquad (2)$$

Funcţia $h(t)$ este cunoscută. Dacă $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ ar fi cunoscute pe frontieră, $a(t)$ ar rezulta de asemenea cunoscută. Invers, dacă $h(t)$ şi $a(t)$ ar fi cunoscute, valorile pe $\mathscr{L}_0$ ale funcţiilor φ, ψ, ar rezulta cunoscute. Într-adevăr, adunînd termen cu termen (1) şi (2), obţinem :

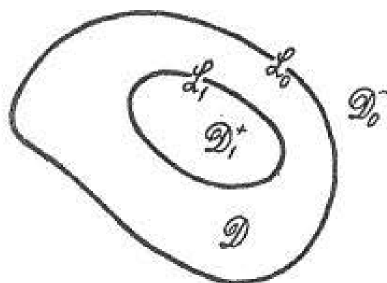


Fig. 6. 24.1

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}[h(t) + a(t)], \quad t \in \mathscr{L}_0. \qquad (3)$$

Presupunînd funcţiile din (3) derivabile în raport cu t, avem şi $\varphi'(t) = \frac{1}{2}[h'(t) + a'(t)]$. Scăzînd acum termen cu termen (1) şi (2), deducem

$$\psi(t) = -\frac{1}{2}[\overline{a(t)} + \bar{t}a'(t)] + \frac{1}{2}[\overline{h(t)} - \bar{t}\,h'(t)], \quad t \in \mathscr{L}_0. \qquad (4)$$

Înmulţind relaţia (3) cu $dt/2\pi i\,(t - z)$ şi integrînd pe $\mathscr{L}_0$, avem

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\varphi(t)}{t - z}\,dt = \frac{1}{2}[H(z) + A(z)], \qquad (5)$$

unde

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{h(t)}{t - z}\,dt, \quad A(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{a(t)}{t - z}\,dt \qquad (6)$$

sînt integrale de tip Cauchy, care definesc funcţii olomorfe pe porţiuni în $\mathscr{D}_0^+$ şi $\mathscr{D}_0^-$. Utilizînd notaţiile din (A.11.1) şi prima formulă (A.11.9), şi ţinînd seama de (3), obţinem mai întîi

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}[H_+(t) + A_+(t)] - \frac{1}{2}[H_-(t) + A_-(t)], \quad t \in \mathscr{L}_0. \qquad (7)$$

Să considerăm acum în domeniul $\mathscr{D}$ funcţia

$$\varphi(z) - \frac{1}{2}[H_+(z) + A_+(z)]. \qquad (8)$$

Prin definiție, această funcție este analitică în $\mathscr{D}$ (dar nu în $\mathscr{D}_0^+$!) : în virtutea egalității (7), ea poate fi prelungită prin continuitate în $\mathscr{D}_0^-$ cu funcția analitică $-\frac{1}{2}[H_-(\mathfrak{z}) + A_-(\mathfrak{z})]$. Prin urmare, funcția

$$\alpha(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \varphi(\mathfrak{z}) - \frac{1}{2}[H_+(\mathfrak{z}) + A_+(\mathfrak{z})], & \mathfrak{z} \in \mathscr{D}, \\ -\frac{1}{2}[H_-(\mathfrak{z}) + A_-(\mathfrak{z})], & \mathfrak{z} \in \mathscr{D}_0^-, \end{cases} \tag{9}$$

este definită peste tot în $\mathscr{D}_1^-$, și evident analitică ; întrucît în $\mathscr{D}_0^-$ ea este suma a două integrale de tip Cauchy, rezultă că ea este nulă la infinit.

Acesta este primul pas al raționamentului, care duce la considerarea unei funcții $\alpha(\mathfrak{z})$ analitice în domeniul avînd ca frontieră *numai* componenta $\mathscr{L}_1$.

Un raționament analog poate fi realizat pornind de la relația (4). Fără nici un calcul, se vede că (4) se obține din (3), dacă înlocuim

$$\begin{aligned} a(\mathrm{t}) \quad &\text{prin} \quad -[\overline{a(\mathrm{t})} + \bar{\mathrm{t}}\, a'(\mathrm{t})], \\ h(\mathrm{t}) \quad &\text{prin} \quad [\overline{h(\mathrm{t})} - \bar{\mathrm{t}}\, h'(\mathrm{t})]. \end{aligned} \tag{10}$$

În loc de (6), vor apare acum funcțiile

$$G(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\overline{h(\mathrm{t})} - \bar{\mathrm{t}}h'(\mathrm{t})}{\mathrm{t} - \mathfrak{z}}\,d\mathrm{t}, \quad B(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\overline{a(\mathrm{t})} + \bar{\mathrm{t}}a'(\mathrm{t})}{\mathrm{t} - \mathfrak{z}}\,d\mathrm{t}, \tag{11}$$

care permit — analog cu (9) — să definim o funcție

$$\beta(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \psi(\mathfrak{z}) - \frac{1}{2}[G_+(\mathfrak{z}) + B_+(\mathfrak{z})], & \mathfrak{z} \in \mathscr{D}, \\ -\frac{1}{2}[G_-(\mathfrak{z}) + B_-(\mathfrak{z})], & \mathfrak{z} \in \mathscr{D}_0^-, \end{cases} \tag{12}$$

analitică în $\mathscr{D}_1^-$, și nulă la infinit.

Cu aceasta, putem trece la utilizarea datelor de care dispunem pe $\mathscr{L}_1$. Întrucît din (9), (12) urmează că în $\mathscr{D}$ avem

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{z}) &= \alpha(\mathfrak{z}) + \frac{1}{2}[H_+(\mathfrak{z}) + A_+(\mathfrak{z})], \\ \psi(\mathfrak{z}) &= \beta(\mathfrak{z}) + \frac{1}{2}[G_+(\mathfrak{z}) + B_+(\mathfrak{z})], \\ \varphi'(\mathfrak{z}) &= \alpha'(\mathfrak{z}) + \frac{1}{2}[H'_+(\mathfrak{z}) + A'_+(\mathfrak{z})], \end{aligned} \tag{13}$$

condiția (1) scrisă într-un punct oarecare t_1 de pe $\mathscr{L}_1$ devine

$$\alpha(t_1) + t_1\overline{\alpha'(t_1)} + \overline{\beta(t_1)} =$$

$$= h^{(1)}(t_1) - \frac{1}{2}[H_+(t_1) + t_1\overline{H'_+(t_1)} + \overline{G_+(t_1)}] -$$

$$- \frac{1}{2}[A_+(t_1) + t_1\overline{A'_+(t_1)} + \overline{B_+(t_1)}], \quad t_1 \in \mathscr{L}_1, \tag{14}$$

astfel că problema determinării funcțiilor $\alpha(z)$, $\beta(z)$ este echivalentă cu o problemă Neumann pentru domeniul infinit $\mathscr{D}_1^-$. Dificultatea stă acum în faptul că în membrul al doilea din (14) apar și funcțiile necunoscute A_+ și B_+, care depind la rîndul lor (sub o formă integrală) de funcția necunoscută $a(t)$ de pe $\mathscr{L}_0$.

Să explicităm ultima paranteză din (14). Avem pe rînd

$$-\frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\frac{a(t)}{t-t_1}dt - t_1\overline{\frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\frac{a(t)}{(t-t_1)^2}dt} +$$

$$+\overline{\frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\frac{\overline{a(t)} + ta'(t)}{t-t_1}dt} = -\frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}a(t)\left[\frac{dt}{t-t_1} + \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_1}\right] +$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\overline{a(t)}\frac{t_1\,d\bar{t}}{(\bar{t}-\bar{t}_1)^2} - \frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\overline{a'(t)}\frac{t\,d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_1}.$$

Integrînd prin părți în ultima integrală de mai sus, presupunînd că $a(t)$ este uniformă (ceea ce este întotdeauna admisibil — vezi (11.7)—(11.11)), și grupînd cu penultima integrală, deducem, după calcule elementare :

$$-\frac{1}{2}[A_+(t_1) + t_1\overline{A'_+(t_1)} + \overline{B_+(t_1)}] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}a(t)\left[\frac{dt}{t-t_1} + \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_1}\right] + \frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\overline{a(t)}\,d\frac{t-t_1}{\bar{t}-\bar{t}_1}. \tag{15}$$

Dacă funcția $a(t_0)$, $t_0 \in \mathscr{L}_0$, ar fi cunoscută, atunci $\alpha(z)$, $\beta(z)$ s-ar obține rezolvînd problema (14); soluția acesteia are deci forma

$$\alpha(z) = \alpha[a(t_0), z], \quad \beta(z) = \beta[a(t_0), z], \quad t_0 \in \mathscr{L}_0. \tag{16}$$

În acest caz, funcţiile lui Kolosov şi Mushelişvili se scriu cu ajutorul formulelor (13), în care introducem (16), iar însăşi funcţia $a(t)$ din (2) se obţine sub forma

$$a(t) = \alpha(t) + \frac{1}{2}[H_+(t) + A_+(t)] - t\left[\overline{\alpha'(t)} + \frac{1}{2}\overline{H'_+(t)} + \frac{1}{2}\overline{A'_+(t)}\right] - \left[\overline{\beta(t)} + \frac{1}{2}\overline{G_+(t)} + \frac{1}{2}\overline{B_+(t)}\right],$$

sau încă, explicitînd şi înlocuind t prin t_0 pentru a lăsa lui t rolul de variabilă curentă de integrare:

$$a(t_0) = \alpha[a(t_0), t_0] - t_0\overline{\alpha'_{t_0}[a(t_0), t_0]} - \overline{\beta[a(t_0), t_0]} + \frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\frac{h(t)}{t - t_0}dt + t_0\frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\frac{\overline{h(t)}}{(\bar{t} - \bar{t}_0)^2}d\bar{t} + \frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\frac{\overline{h(t) - t\overline{h'(t)}}}{\bar{t} - \bar{t}_0}d\bar{t} + \frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\frac{a(t)}{t - t_0}dt + t_0\frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\frac{\overline{a(t)}}{(\bar{t} - \bar{t}_0)^2}d\bar{t} - \frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\frac{a(t) + t\overline{a'(t)}}{t - t_0}d\bar{t}. \quad (17)$$

Cele trei integrale ce depind de $h(t)$ sînt funcţii cunoscute. Să grupăm cele două integrale în care apare $a(t)$; să integrăm prin părţi în integrala ce conţine $\overline{a'(t)}$, ţinînd seama că $a(t)$ este uniformă, şi să adunăm cu cealaltă integrală în care apare $\overline{a(t)}$; să revenim în integralele ce depind de $h(t)$ la notaţiile din (6) şi (11); după calcule elementare, (17) devine

$$a(t_0) = \alpha[a(t_0), t_0] - t_0\overline{\alpha'_{t_0}[a(t_0), t_0]} - \overline{\beta[a(t_0), t_0]} + \frac{1}{2}[H_+(t_0) - t_0\overline{H'_+(t_0)} - \overline{G_+(t_0)}] + \frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} a(t_0)\, d\ln\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{1}{4\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0}\overline{a(t)}\, d\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0}, \quad (18)$$

aşadar o ecuaţie integrală pentru funcţia $a(t)$, unde $t, t_0 \in \mathscr{L}_0$.

b) Asupra metodei de calcul efectiv

Conducerea efectivă a calculelor prezintă dificultăţi importante. Vom schiţa aci numai linia mare a tipului de raţionament folosit de Şerman şi colaboratorii săi, în lucrările în care această metodă este folosită pentru rezolvarea de probleme concrete.

Fie de pildă cunoscută funcţia

$$\mathfrak{z} = \omega_0(\zeta) \tag{19}$$

care reprezintă conform domeniul $\mathscr{D}_0^-$ pe exteriorul $Д^-$ al cercului unitate γ din planul ζ. Dacă curba $\mathscr{L}_0$ este de clasă cel puţin C^2, atunci relaţia (19) rămîne valabilă pe frontieră :

$$t = \omega_0(\sigma), \qquad \sigma \in \gamma, \tag{20}$$

iar dt se obţine de aci prin diferenţiere (vezi § A.6, pag. 730).

Prin urmare, orice funcţie $c(t)$ dată pe $\mathscr{L}_0$ poate fi scrisă

$$c(t) \equiv c^*(\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \sigma^k, \tag{21}$$

unde coeficienţii c_k^* sînt cunoscuţi prin intermediul lui $c(t)$ şi $\omega_0(\sigma)$.

Acest raţionament rămîne valabil pentru funcţiile $h(t)$ şi $a(t)$ de mai sus. În particular, $a(t)$ devine astfel

$$a(t) \equiv a^*(\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \sigma^k, \tag{22}$$

unde a_k^* urmează a fi determinaţi, în timp ce h_k^* sînt cunoscuţi odată cu $h(t)$.

Integralele de tip Cauchy din (6) şi (11) devin integrale luate pe γ, aşadar expresii ce depind în ultimă instanţă de h_k^* şi a_k^*.

Dar pentru $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}_0^+$, putem scrie întotdeauna

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{\sigma^k}{t-\mathfrak{z}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}_0} \frac{[\omega_0^{-1}(t)]^k}{t-\mathfrak{z}}\,dt = \psi_k(\mathfrak{z}), \tag{23}$$

aşadar o funcţie în principiu cunoscută în $\mathscr{D}_0^+$. Acest raţionament permite să calculăm integralele din (6), (11) şi *în interiorul* curbei $\mathscr{L}_0$, obţinînd astfel expresii ce depind de coeficienţii cunoscuţi h_k^*, de coeficienţii necunoscuţi a_k^*, şi de funcţiile cunoscute ψ_k.

Prin urmare, soluţia problemei la limită (14) poate fi acum scrisă prin intermediul coeficienţilor a_k^*; în particular, aceasta este întotdeauna realizabil dacă cunoaştem funcţia

$$\mathfrak{z} = \omega_1(\zeta) \tag{24}$$

care reprezintă conform domeniul $\mathscr{D}_1^-$ pe exteriorul $Д^-$ al cercului unitate γ. Dependenţa din (16) este astfel explicitată, şi problema este redusă la rezolvarea efectivă a ecuaţiei (18) — ceea ce conduce în general la un sistem infinit de ecuaţii algebrice liniare pentru coeficienţii a_k^*.

Obţinerea efectivă a soluţiei depinde la rîndul său de posibilitatea de a rezolva acest lanţ de probleme. Exemplele studiate pînă azi par să arate că metoda e rapid convergentă, şi în particular utilă în studiul concentrărilor de tensiuni pentru componente ale frontierei apropiate în anumite porţiuni ale lor.

În unele din lucrările citate în articolul mai sus amintit (şi de altfel chiar în articolul iniţial al lui Şerman), metoda este aplicată cu succes şi la studiul problemelor încovoierii şi torsiunii — unde soluţia depinde de o singură funcţie analitică de determinat.

Metoda a fost generalizată la cazul tridimensional de către P. Perlin [1].

§ 25. ALTE METODE ŞI PROBLEME

Lipsa de spaţiu ne obligă să dăm numai scurte indicaţii asupra altor teme — uneori mai puţin elementare — referitoare la problema plană.

a) **Domenii semiinfinite.** Prezintă deosebit interes considerarea unor domenii mărginite de curbe *deschise*, cu capetele aruncate la infinit (domeniu de tipul semi-planului), cu sau fără orificii. Punctul de plecare în studiul lor îl constituie problema semi-planului elastic, cu utilizarea reprezentării conforme. Tehnica integralelor de tip Cauchy este uşor aplicabilă aci, formulele din cazul reprezentării conforme pe discul circular găsindu-şi imediat analogul. Pentru detalii, vezi N. Mushelişvili [5], §§ 90—95 ; vezi şi A. Green şi W. Zerna [1], §§ 8.6—8.11, M. Haimovici [1], §§ 16.2—16.5 ; L. Milne-Thomson [2], capitolul 4.

b) **Ecuaţiile integrale ale problemelor lui Dirichlet şi Neumann.** După cum am spus în § 20, pag. 481, studiul ecuaţiei lui Mushelişvili poate fi redus la cel al unor ecuaţii de tip Fredholm, cu nucleu nesimetric. Aceste ecuaţii sînt însă utilizabile numai pentru domenii reprezentabile conform pe un disc, şi ele nu pot fi scrise efectiv decît dacă funcţia de reprezentare este cunoscută.

S. Mihlin [1], §§ 42, 43, a obţinut ecuaţii integrale utilizabile şi pentru domenii multiplu conexe — legate totuşi de necesitatea cunoaşterii funcţiei lui Green a domeniului considerat.

Ulterior, N. Mushelişvili [5], § 98 a stabilit ecuaţii integrale de tip Fredholm valabile pentru domenii multiplu conexe, în care intervin direct datele la limită pe frontiera domeniului iniţial, şi care nu pretind cunoaşterea funcţiei de reprezentare pe vreun domeniu canonic. L. Magnaradze (vezi lucrările sale în bibliografia la N. Mushelişvili [5]) a demonstrat că aceste ecuaţii rămîn utilizabile şi pentru frontiere cu puncte unghiulare (care nu sînt puncte de întoarcere) ; în acest caz, integralele trebuie înţelese în sensul Radon-Stieltjes.

În fine, D. Şerman [1] — [4] (vezi S. Mihlin [1], § 56 ; N. Mushelişvili [5], § 101) a stabilit ecuaţii de o formă apropiată de cea a ecuaţiilor lui Mushelişvili, dar impunînd condiţii mai slabe funcţiilor necunoscute. Aceste ecuaţii corespund variantei plane a ecuaţiilor lui G. Lauricella [3] — [5] — dar sînt obţinute pe o cale mult mai directă, şi îşi păstrează valabilitatea şi pentru domenii multiplu conexe.

c) **Problema conjugării liniare.** În § 17 am văzut că problemele fundamentale pentru domenii cu frontiere circulare pot fi abordate cu ajutorul unui proces de prelungire analitică a funcţiei $\Phi(z)$ prin porţiunile libere ale frontierei. Acesta constituie un caz particular al problemei conjugării liniare (sau încă : problema Riemann-Hilbert) care constă în construirea unei funcţii olomorfe pe porţiuni, definite în planul cu o tăietură în lungul unei linii $\mathscr{L}$, — dacă este

cunoscută o relaţie *liniară* între valorile la limită ale funcţiei de o parte şi de alta a acestei linii. Problema este amănunţit studiată dintr-un punct de vedere general-teoretic de către F. Gahov [1] şi N. Musheli̇şvili [3] (vezi în special cap. 2); pentru aplicaţiile nemijlocite la teoria elasticităţii vezi A. Green şi W. Zerna [1], capitolul 8; L. Milne-Thomson [2], capitolele 3–6; N. Mushelişvili [5], capitolul 6.

Spre deosebire de metoda seriilor şi de metoda integralelor de tip Cauchy — care permit rezolvarea efectivă sau cel puţin studiul teoretic al problemelor lui Dirichlet şi Neumann — *studiul problemei conjugării liniare rămîne metoda de elecţie a problemei mixte* [11]). Pentru indicaţii critice şi bibliografice, vezi şi J. Goodier [4], § 5. Printre lucrările inspirate de această metodă, vezi V. Buchwald [1], [2]; G. Mandjavidze [1]; C. Stănescu [2] etc.

Dintre problemele majore ale elasticităţii plane, cea a *contactului* corpurilor elastice şi cea a *fisurilor* sînt abordabile tocmai pe această cale.

În legătură cu problema de contact, vezi L. Galin [4] (inclusiv pentru corpuri anizotrope; pentru acest ultim caz, vezi şi numeroasele lucrări ale lui J. Brilla, de exemplu [2]; G. Mandjavidze [2]); A. Green şi W. Zerna [1], §§ 8.11–8.14; L. Milne-Thomson [2], capitolul 4; N. Mushelişvili [5], capitolul 6, partea a doua.

În ce priveşte studiul problemei fisurilor (este vorba de fisuri în corpuri casante — aşadar fără trecere în stadiul plastic), punctul de pornire a fost constituit de o ipoteză a lui S. Hristianovici: condiţia ca tensiunile la capetele fisurii să rămînă finite — analogă cu condiţia cunoscută din aerodinamică asupra finitudinii vitezelor la bordul de fugă al unui profil angulos. Rezultate majore în acest sens aparţin lui G. Barenblatt [1]–[3] (cu indicaţii asupra lucrărilor lui G. Cerepanov, P. Jeltov, R. Salganik etc.). Vezi încă I. Babič şi A. Kaminski [1]; A. England şi A. Green [1]; V. Entov şi R. Salganik [1]; L. Kacianov [2]; V. Panasiuk [1] — [3]. Pentru teoria clasică, vezi A. Green şi W. Zerna [1], §§ 8.15–8.17.

d) **Metode operaţionale.** Un cu totul alt punct de vedere constă din utilizarea metodelor operaţionale, bazate pe transformatele Fourier, Laplace, Mellin etc. Acestea se dovedesc extrem de eficace în problema contactului, a fisurilor etc., şi prezintă avantajul de a putea fi extinse la cazul tridimensional. Un bogat material în această direcţie e dat de I. Sneddon [1], cap. 9 (vezi şi cap. 10, pentru problemele cu simetrie axială, înrudite cu cele plane). Vezi încă I. Sneddon [2] (pentru aparatul matematic) şi [3] (pentru unele puncte de vedere mai recente). În liniile sale mari, metoda e prezentată de I. Sneddon şi D. Berry [1], capitolul C, partea a V-a. Numeroase rezultate noi aparţin lui I. Ufliand [2], capitolele 1 şi 3–6 (bandă, lamelă, pană, încovoierea plăcilor), şi [3].

S. Belonosov [2] a propus o metodă care asociază punctul de vedere al teoriei integralelor de tip Cauchy cu cel operaţional, reducînd problema (pentru domenii simplu şi dublu conexe) la studiul unor ecuaţii integrale de tip Fredholm cu nuclee simetrice, şi care pot fi utilizate şi în prezenţa de puncte unghiulare pe frontieră. Metoda îngăduie atît demonstrarea de teoreme de existenţă, cît şi obţinerea de algoritme de calcul efectiv.

e) **Observaţie finală.** Toate aceste metode sînt departe de a fi limitate la studiul problemelor plane şi antiplane ale elastostaticii liniare a corpurilor omogene şi izotrope. Ele sînt deja larg utilizate în studiul problemelor tridimensionale (vezi mai jos indicaţiile din § 7.1, pag. 510–511); în studiul corpurilor anizotrope (S. Lehniţki [1], [2]); în teoria neliniară a elasticităţii (vezi de ex. A. Green şi J. Adkins [1]; vezi încă D. Carlson şi R. Shield [1], etc.); în teoria plasticităţii (vezi lucrările lui D. Cerepanov [1] — [3]; ş.a.m.d.). Pentru alte domenii, unde cercetarea este într-un stadiu mai puţin evoluat, a se revedea indicaţiile din § 7, pag. 391.

---

[11]) Pentru metodele numerice de studiu ale problemei mixte, vezi M. Dlugaci [1].

CAPITOLUL 7

PROBLEMA TRIDIMENSIONALĂ. STUDIUL ECUAŢIILOR LUI LAMÉ

§ 1. GENERALITĂŢI

În §§ 4.8, 4.10 şi 4.12, au fost puse în evidenţă două fapte esenţiale: caracterul eliptic al ecuaţiilor lui Lamé *statice* şi caracterul biarmonic al componentelor stării elastice. Aceste rezultate deschid două căi posibile de studiu al ecuaţiilor lui Lamé:

a) studiul lor ca ecuaţii de tip eliptic — aşadar posibilitatea de a construi o teorie a elasticităţii după modelul teoriei ecuaţiei lui Poisson sau Laplace;

b) studiul soluţiilor lor ca funcţii reprezentabile, datorită teoremei lui Almansi, prin potenţiali armonici.

Analiza problemelor plană şi antiplană se subsumează, în principiu, celui de al doilea dintre aceste puncte de vedere. Dimpotrivă, studiul problemei tridimensionale nu mai beneficiază direct de posibilităţile teoriei funcţiilor complexe, şi obligă la abordarea directă a ecuaţiilor lui Lamé, care se dovedesc în acest caz mai utile decît ecuaţiile în tensiuni.

Avertizăm că aceste raţionamente sînt valabile *numai pentru corpuri izotrope şi omogene*, în teorie liniară. Totuşi, primul din punctele de vedere de mai sus (şi într-un anumit sens şi cel de al doilea), e susceptibil de importante generalizări.

Amintim aci forma generală (4.8.7) a ecuaţiilor lui Lamé

$$\Delta \boldsymbol{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mu^{-1} \boldsymbol{F} = 0, \qquad (1)$$

şi condiţiile la limită (4.2.1) şi (4.2.2):

$$\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{g}, \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{f}. \qquad (3)$$

Întrucît intenţionăm să abordăm sistemul (1), este necesar ca şi condiţia (3) să fie explicitată prin intermediul lui $\boldsymbol{u}$. În acest scop, vom face uz de legea lui Hooke (3.3.18), unde vom da în factor 2μ, şi vom ţine seama că din (3.4.16) urmează $\lambda/2\mu = \nu/(1-2\nu)$; aceasta duce la

$$\sigma_{ij} = 2\mu\,[\varepsilon_{ij} + \nu(1-2\nu)^{-1}\theta\delta_{ij}]. \qquad (4)$$

Introducînd (4) în relaţiile lui Cauchy (2.3.3), căpătăm

$$\sigma_{ni} = 2\mu\,[\varepsilon_{ij} n_j + \nu(1-2\nu)^{-1} n_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}]. \qquad (5)$$

În al doilea termen din (5) apar evident componentele vectorului

$$2\mu\nu(1-2\nu)^{-1}\boldsymbol{n}\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \tag{6}$$

dirijat după normală. În ce privește primul termen din membrul al doilea, din ecuațiile geometrice (4.11) avem pe rînd

$$\varepsilon_{ij}n_j = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})n_j = \frac{1}{2}(u_{j,i}-u_{i,j})n_j + u_{i,j}n_j, \tag{7}$$

unde ultimul termen este derivata normală a funcției u_i; prin urmare, din (5) se separă și componentele vectorului

$$2\mu\boldsymbol{u}_{,n}. \tag{8}$$

În fine, primul termen din expresia finală din (7) este alcătuit din componentele vectorilor $\boldsymbol{n}$ și rot $\boldsymbol{u}$; după calcule elementare, deducem că în (7) apar componentele lui $\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$. Ținînd seama și de (6) și (8), obținem în definitiv

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) = 2\mu\left[\nu(1-2\nu)^{-1}\boldsymbol{n}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_{,n}\right]. \tag{9}$$

Pentru studiul problemei lui Dirichlet vom păstra deci condiția la limită (2), în timp ce în problema lui Neumann trebuie să introducem (9) în condiția (3).

Capitolele ce urmează sînt consacrate studiului problemei tridimensionale. Aci nu mai dispunem de un analog eficace al reprezentării conforme, astfel că rezultatele obținute pentru domenii canonice (bulă, semi-spațiu) nu sînt nici înrudite între ele, și nici nu pot fi „transcrise'' pentru domenii mai generale. Aceasta obligă la studiul separat al diferitelor tipuri de corpuri, și justifică situația actuală, cînd masei de soluții relativ unitare de care dispunem în cazul antiplan și plan, i se opun în cazul tridimensional puțin numeroase probleme, rezolvate cu metode relativ disparate. Tocmai așa se explică faptul că, chiar în tratate de prima mînă, spațiul acordat problemei tridimensionale este în general destul de redus.

Menționăm încă unele încercări de extindere a *metodelor teoriei funcțiilor complexe* (și hipercomplexe) în studiul problemelor tridimensionale: lucrările lui A. Alexandrov și ale colaboratorilor săi I. Soloviev și V. Volpert (vezi de ex. A. Alexandrov [1]); I. Arjanih și B. Bondarenko [1]; S. Bergman [1]; M. Mișicu [2]; V. Mossakovski [8]; M. Nedelcu [1]; E. Obolașvili [1]; Tang Li Min și Sun Hwan Chun [1].

O metodă ce-și păstrează validitatea în principiu intactă în problemele uni-, bi- sau tridimensionale, este *metoda operațională*, bazată pe utilizarea a diferite transformări integrale

(Fourier, Laplace, Mellin, Hankel etc.). Aparatul matematic corespunzător este expus în detaliu de I. Sneddon [2], şi pe larg folosit de acelaşi autor în [1]. Vezi de asemenea I. Sneddon şi D. Berry [1], §§ 64–66; I. Ufliand [2] (cu numeroase aplicaţii) şi [3]; I. Sneddon [3].

Capitolul de faţă este consacrat studiului ecuaţiilor lui Lamé din punctul de vedere al legăturii lor cu ecuaţia lui Laplace, şi al unor metode generale de integrare. În capitolul 8 va fi prezentată problema bulei, iar în capitolul 9, cea a semi-spaţiului. În fine, în capitolul 10 va fi studiată una dintre problemele cu vaste implicaţii: contactul corpurilor elastice.

Toate acestea poartă numele de „probleme clasice" ale teoriei elasticităţii. Forma geometrică a corpurilor considerate nu mai îngăduie nici o simplificare de tipul celor admise de rezistenţa materialelor, şi aceste probleme — ca şi cea plană — nu pot fi cercetate decît cu ajutorul metodelor exacte ale teoriei elasticităţii. Toate aceste probleme vor fi examinate aci în varianta lor tridimensională — deşi există şi variante plane ale lor (de exemplu problema semi-planului, sau cea a contactului plan). Indicaţii asupra problemelor clasice sînt date de A. Love [1], capitolele 7,8, 10, 11; E. Trefftz [3], capitolul 10.

Printre problemele clasice de care nu ne vom ocupa aci, notăm încă problema corpurilor axial-simetrice, problema paralelipipedului elastic, şi altele.

Pentru problemele cu simetrie axială, vezi articolul de analiză al lui B. Abramian şi A. Alexandrov [1]; apoi A. Alexandrov [1] (cu generalizare la cazul absenţei simetriei); N. Arutiunian şi B. Abramian [1] (cu aplicaţii speciale la problema torsiunii); M. Belenkiĭ [1] (ca şi la A. Alexandrov, în strînsă conexiune cu problema plană); S. Belonosov [1]; V. Cemeris [1] (funcţii p-analitice); A. Lurie [4], capitolele 6 şi 7 (bulă, şi cilindru circular solicitat pe suprafaţa sa laterală); G. Polojii [1], [4] (probleme de torsiune şi încovoiere, şi aplicaţii ale teoriei funcţiilor p-analitice); H. Poritsky [2] (torsiune); I. Sneddon [1], capitolul 10; K. Solianik-Krasa [1] – [3]; I. Ufliand [2] (transformări integrale); G. Valov [1], [2]; V. V. Vlasov [1]. Pentru chestiuni mai simple de tip axial-simetric, vezi S. Timoshenko şi J. Goodier [1], capitolul 13.

Problema paralelipipedului a fost propusă de G. Lamé [1]; ea a fost reluată de B. Bondarenko [1], [2]; M. Filonenko-Borodici [2] (metode aproximative); K. Hata [1] (metode operaţionale); P. P. Teodorescu [1] (care demonstrează că sistemele de ecuaţii liniare obţinute pornind de la soluţia lui Lamé sînt complet regulate) şi [5] (diferite domenii de tipul paralelipipedului cu feţe aruncate la infinit).

Studiul teoretic al ecuaţiilor lui Lamé poate fi pus în strînsă conexiune cu cel al ecuaţiei lui Laplace. În acest sens amintim mai întîi lucrările lui E. Betti [1], O. Tedone [1], care studiază ecuaţiile lui Lamé puse sub forma

$$\Delta\left[\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}(1-2\nu)^{-1}\boldsymbol{x}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right] = 0.$$

În felul acesta, problema este redusă la integrarea celor trei ecuaţii Laplace de mai sus, plus ecuaţia care arată că div $\boldsymbol{u}$ este de asemenea armonică. Aceasta permite utilizarea directă

a rezultatelor teoriei potențialului. Totuși, metoda conduce nu în mod nemijlocit la cunoașterea componentelor deplasării, ci la cea a mărimilor div $\boldsymbol{u}$ și rot $\boldsymbol{u}$. Atît Betti cît și Tedone studiază problema semi-spațiului, a domeniului mărginit de două plane paralele, a bulei, a domeniului mărginit de două sfere concentrice. O expunere rezumativă a acestor rezultate, inclusiv indicații bibliografice, este dată de A. Love [1], cap. 10. Vezi de asemenea M. Haimovici [1], cap. 12 și § 13.3; I. Sneddon și D. S. Berry [1], §§ 61—63.

Lucrări recente aflate sub o formă sau alta în conexiune cu studiul ecuației lui Laplace aparțin lui J. Bramble [1]; J. Bramble și L. Payne [6]; J. Diaz și L. Payne [1]; G. Grioli [1], [3].

Printre problemele generale de mare importanță notăm aci chestiunea evaluării *marginilor* pentru deplasări, tensiuni, energia de deformație, în funcție de datele problemei, — și pe cea a *concentrării tensiunilor*.

În ce privește chestiunea marginilor, vezi G. Adler [1], J. Diaz și H. Greenberg [1], G. Fichera [4] (margini în problema lui Dirichlet); G. Grioli [3], capitolul 6 (margini pentru tensiuni); J. Bramble și L. Payne [4], M. Slobodianskii [3], [4] (margini pentru tensiuni și pentru energia de deformație); K. Washizu [1]; vezi de asemenea G. Colombo [1], G. Grioli [2] (margini pentru tensiuni în problema anti-plană); C. Maple [1], L. Payne și H. Weinberger [1], [2] (margini pentru soluțiile unor ecuații de tip eliptic). Aceste rezultate se obțin făcîndu-se uz de reprezentări prin intermediul matricei lui Green (vezi mai jos § 12), sau încă prin metodele lui W. Prager și L. Synge, citate în § 4.4, pag. 136.

Cu referire la studiul concentrării tensiunilor, a se revedea indicațiile din § 4.2, pag. 127; exemplele tratate în capitolele 5 și 6; lucrările citate în § 6.22, pag. 496. Indicăm încă punctul de vedere a lui I. Babuşka și J. Kautski [1], și studiul concentrărilor de tensiuni în vecinătatea unei frontiere cu rugozități, realizat prin mijloace probabilistice de către V. Palmov [1] — [3]. Menționăm aci și o concluzie generală la care se ajunge în studiul concentrărilor de tensiuni: caracterul lor mai puțin important și mai localizat în cazul tridimensional, în comparație cu variantele plane respective (vezi exemplul de la finele § 8.6, pag. 584). Acest fapt se explică într-un mod asemănător cu cele spuse referitor la principiul lui Saint-Venant în cazul plan (vezi § 6.11, pag. 421); vezi și mai departe § 10.

Pentru studiul problemei tridimensionale, vezi încă indicațiile date de I. Sneddon și D. Berry [1] (cap. D), E. Sternberg [4], G. Şapiro [2]. Pentru problemele *dinamice*, a se revedea finele § 4.12, pag. 163—164.

§ 2. DESPRE STUDIUL ECUAȚIEI LUI POISSON

Vom aminti aci unele fapte privind studiul celei mai simple ecuații de tip eliptic — ecuația lui Poisson. Acestea vor fi utile în studiul ecuațiilor lui Lamé, pe ambele linii menționate la începutul § 1. Pentru detalii, vezi de pildă R. Courant [1], capitolul 4; E. Goursat [2], capitolele 27 și 28; C. Iacob [5], capitolul 3; V. Smirnov [2], volumul 2, § 7.4; A. Tihonov și A. Samarskii [1], §§ 4.2—4.5.

Vom nota[1]) coordonatele carteziene cu x, y, z sau x_1, x_2, x_3, iar versorii axelor, cu $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sau $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$. Amintim expresiile operatorilor:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \boldsymbol{i}_j f_{,j}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \nabla \cdot \boldsymbol{V} = V_{j,j}, \tag{2}$$

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = f_{,jj}. \tag{3}$$

Dat fiind că avem pe rînd $(\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad}) f = (n_j \boldsymbol{i}_j)\cdot(\boldsymbol{i}_l f_{,l}) = n_j f_{,j}$, operatorul de derivare normală se poate scrie și sub forma

$$f_{,n} = (\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad}) f = (\boldsymbol{n}\cdot\nabla) f. \tag{4}$$

Trecînd la coordonatele sferice definite de relațiile

$$x_1 = R\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = R\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = R\cos\theta, \tag{5}$$

sau încă de relațiile inverse lor

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}[\sqrt{x_1^2 + x_2^2}/x_3], \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}(x_2/x_1), \tag{6}$$

obținem după calcule elementare expresiile:

$$\begin{aligned} f_{,1} &= \sin\theta\cos\varphi f_{,R} + R^{-1}\cos\theta\cos\varphi f_{,\theta} - R^{-1}(\sin\varphi/\sin\theta) f_{,\varphi}, \\ f_{,2} &= \sin\theta\sin\varphi f_{,R} + R^{-1}\cos\theta\sin\varphi f_{,\theta} + R^{-1}(\cos\varphi/\sin\theta) f_{,\varphi}, \\ f_{,3} &= \cos\theta f_{,R} - R^{-1}\sin\theta f_{,\theta}, \end{aligned} \tag{7}$$

ceea ce permite să transcriem (1)—(4) în coordonate sferice. În particular avem

$$\Delta f = R^{-2}[(R^2 f_{,R})_{,R} + (\sin\theta)^{-1}(\sin\theta f_{,\theta})_{,\theta} + (\sin\theta)^{-2} f_{,\varphi\varphi}]. \tag{8}$$

Pentru transcrierea operatorilor diferențiali analogi celor de mai sus în diferite sisteme de coordonate curbilinii, inclusiv pentru utilizarea lor în teoria elasticității, există o vastă literatură. (Vezi indicațiile din § 4.1, pag. 121).

a) Formule integrale

Formula lui Gauss-Ostrogradskii: date fiind trei funcții $U_j \in C^1(\mathscr{V})$ într-un domeniu mărginit $\mathscr{V}$, a cărui frontieră $\mathscr{S}$ este alcătuită dintr-un număr finit de suprafețe ce posedă o arie (vezi § 1.1, pag. 34), avem relația

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} U_{j,j}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\mathscr{S}} U_j n_j\,\mathrm{d}S, \tag{9}$$

unde $n_j = \cos(\boldsymbol{n}, x_j)$, iar $\boldsymbol{n}$ este normala exterioară la $\mathscr{S}$.

---

[1]) Orice exagerație puristă duce la complicații, și ar fi greu să scriem majoritatea relațiilor din capitolele 9 și 10 în coordonate x_1, x_2, x_3, (vezi de ex. mai departe pag. 557; cap. 10 pag. 669; etc.).

Formula rămîne valabilă dacă funcțiile U_j posedă derivate parțiale mărginite și integrabile în $\mathscr{V}$. Pentru cadrul ei de valabilitate, vezi și indicațiile de la finele § A.3, pag. 701. În cazul plan, (9) ia forma (A.3.18) sau (A.3.19).

Prima formulă a lui Green: date fiind funcțiile u, $v \in C^2(\mathscr{V})$, avem

$$\iiint_{\mathscr{V}} v\Delta u \,\mathrm{d}V = -\iiint_{\mathscr{V}} (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)\,\mathrm{d}V + \iint_{\mathscr{S}} v u_{,n} \,\mathrm{d}S. \qquad (10)$$

A doua formulă a lui Green: Luînd $u = v$, obținem din (10):

$$\iiint_{\mathscr{V}} u\Delta u \,\mathrm{d}V = -\iiint_{\mathscr{V}} (\operatorname{grad} u)^2 \mathrm{d}V + \iint_{\mathscr{S}} u u_{,n} \,\mathrm{d}S. \qquad (11)$$

A treia formulă a lui Green: intervertind în (10) funcțiile u și v și scăzînd termen cu termen (10) din relația astfel obținută, avem

$$\iiint_{\mathscr{V}} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V = \iint_{\mathscr{S}} (u v_{,n} - v u_{,n})\,\mathrm{d}S. \qquad (12)$$

Formule de același tip se stabilesc și în cazul plan, pentru domenii $\mathscr{D}$ mărginite de curbe frontieră netede pe porțiuni.

Toate aceste formule se generalizează ușor pentru domenii nemărginite, dacă u, v sînt *regulate la infinit*, adică verifică (în $\mathscr{E}_3$) condițiile

$$\lim_{R\to\infty} R|f| \leqslant C, \quad \lim_{R\to\infty} R^2 |\operatorname{grad} f| \leqslant C, \qquad (13)$$

(C = const.) (Vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.2, pct. 8.)

Subliniem că formulele lui Green *nu se referă* la proprietăți ale funcțiilor u, v — ci la proprietăți ale operatorului lui Laplace și ale operatorilor grad și ($\boldsymbol{n}\cdot$grad), asociați acestuia prin intermediul relațiilor (10)—(12).

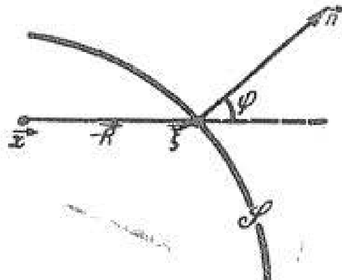


Fig. 7.2.1

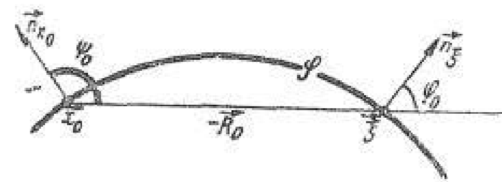


Fig. 7.2.2

În cele ce urmează, vom avea de repetate ori de considerat puncte în $\mathscr{V}$, pe care le vom nota $\boldsymbol{x}$ sau $\boldsymbol{\xi}$. Punctele situate pe $\mathscr{S}$ se vor nota x_0 (și încă $\boldsymbol{\xi}$, în special pentru puncte curente de integrare). Pe $\mathscr{S}$ se consideră întotdeauna normala *exterioară*, notată cu $\boldsymbol{n}$.

Vom folosi notațiile

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\xi}, \quad R = |\boldsymbol{R}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} (x_j - \xi_j)^2},$$
$$\varphi = (\widehat{\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{R}}), \quad \varphi_0 = (\widehat{\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{R}_0}). \tag{14}$$

Prin urmare, $\boldsymbol{R}$ este vectorul de la $\boldsymbol{\xi}$ la $\boldsymbol{x}$, iar R este modulul său. (În (5), (6) avem desigur $\boldsymbol{\xi} = 0$.) Unghiul φ este unghiul dintre normala $\boldsymbol{n}$ *în punctul* $\boldsymbol{\xi}$ și vectorul $-\boldsymbol{R}$ de la $\boldsymbol{x}$ la $\boldsymbol{\xi}$ (vezi și mai departe, pag. 518).

Este ușor de văzut că funcția R^{-1} verifică ecuația lui Laplace în raport cu variabilele x_j (cu excepția punctului $\boldsymbol{\xi}$), sau încă verifică ecuația lui Laplace în raport cu variabilele ξ_j (cu excepția punctului $\boldsymbol{x}$). Mai precis, se poate arăta că

$$\Delta R^{-1} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}), \tag{15}$$

unde $\delta(\boldsymbol{x})$ este funcția lui Dirac în $\mathscr{E}_3$: $\delta(\boldsymbol{x}) \equiv \delta(x_1, x_2, x_3)$. (Vezi I. Ghelfand și G. Șilov [1], volumul 1, § 1.2, pct. 3 ; § 4.1, pct. 5.)

Privind valorile funcției R^{-1} în punctul $\boldsymbol{x}$ ca descriind efectul unei anumite acțiuni mecanice în $\boldsymbol{\xi}$, vom numi pe primul din aceste puncte, *punct de observație*, iar pe cel de al doilea, *punct de sursă*. Rolurile acestor puncte pot fi intervertite.

Funcția

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) = 1/4\pi R(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) \tag{16}$$

se numește *soluția fundametală*[2]) a ecuației lui Laplace (în $\mathscr{E}_3$). Factorul $1/4\pi$ este un factor de normare : prezența sa arată că $f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})$ descrie o acțiune concentrată *unitară* în $\boldsymbol{\xi}$ (compară (15) și (16)). Astfel de pildă, funcția (16) poate fi privită ca potențial al vitezelor în mișcarea irotațională a unui fluid ideal, în prezența unui izvor de intensitate *unitară*.

În cazul plan, rolul de soluție fundamentală este luat de funcția

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) = (1/2\pi) \ln [1/R(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})]. \tag{17}$$

Întrucît aceste funcții depind numai de *diferența* $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}$, orice suprapunere de acțiuni descrise prin intermediul lor, poate fi exprimată printr-o convoluție (vezi § A.2, pag. 690).

Pentru a scrie formula (12) pentru o funcție $u \in C^2(\mathscr{V})$ și funcția (16), trebuie să izolăm punctul singular $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$, și să calculăm integrala de suprafață pe $\mathscr{S}$, *plus* aceeași integrală luată pe o suprafață $\mathscr{S}_\varepsilon$ care conține în interior punctul $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$, de exemplu o sferă $S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$; integrala de volum urmează a fi calculată în domeniul $\mathscr{V} - B_\varepsilon$, unde B_ε e bula mărginită de

---

[2]) Din punctul de vedere al unei teorii generale ar fi mai corect să atribuim expresiei (16) semnul *minus*.

S_ε. (Compară cu raționamentele care au condus la (A.4.48).) Trecînd la limită pentru $\varepsilon \to 0$, se obține așa numita *formulă integrală fundamentală* :

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathscr{V}} \frac{\Delta u}{R}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathscr{S}}\left[\frac{1}{R}u_{,n} - u\left(\frac{1}{R}\right)_{,n}\right]\mathrm{d}S, \tag{18}$$

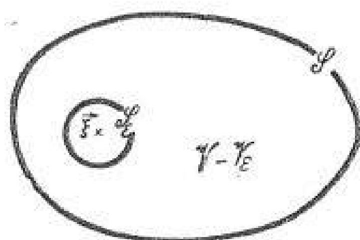


Fig. 7.2.3

unde derivata normală se calculează în raport cu punctul de sursă ξ variabil, iar punctul de observație x joacă rol de parametru. Formula (18) rămîne valabilă și pentru domenii $\mathscr{V}$ nemărginite, dacă funcția u este regulată la infinit. Ea poate fi transcrisă în $\mathscr{E}_2$, dacă înlocuim (16) prin (17).

Ca și formulele lui Green, formula (18) pune în evidență proprietăți ale *operatorului* lui Laplace, căruia ea îi asociază operatorul identic și operatorul de derivare normală.

b) Potențiali newtonieni

Considerînd funcțiile Δu, u și $u_{,n}$ cunoscute în $\mathscr{V}$, respectiv pe $\mathscr{S}$, formula (18) introduce trei tipuri de integrale, legate de soluția fundamentală :

$$U(x) = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \frac{F(\xi)}{R}\,\mathrm{d}V, \tag{19}$$

$$V(x) = \iint\limits_{\mathscr{S}} \frac{G(\xi)}{R}\,\mathrm{d}S, \tag{20}$$

$$W(x) = -\iint\limits_{\mathscr{S}} \left(\frac{1}{R}\right)_{,n} H(\xi)\,\mathrm{d}S. \tag{21}$$

Acestea se numesc *potențiali newtonieni*, și anume : *potențial de volum, de simplu strat*, și *de dublu strat*; F, G, și H sînt *densitățile* respective.

Pentru o expunere detailată a teoriei potențialilor newtonieni, vezi de exemplu E. Goursat [2], §§ 535–539 ; N. Günther [1] ; L. Sretenskii [1].

Pentru potențialul de dublu strat, putem încă scrie (21) sub forma

$$W(x) = \iint\limits_{\mathscr{S}} R^{-2} R_{,n} H(\xi)\,\mathrm{d}S. \tag{22}$$

Or, din (14) urmează că în $\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{S}$ avem

$$R_{,n} = n_j R_{,\xi_j} = n_j(\xi_j - x_j) / R = -(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{R}) / R = \cos \varphi, \tag{23}$$

astfel că acum formula (21) devine

$$W(\boldsymbol{x}) = \iint_{\mathscr{S}} (\cos \varphi / R^2) \, H(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}S. \tag{24}$$

Proprietăţile potenţialilor depind de cele ale densităţilor, şi de $\mathscr{S}$.

Potenţialul de volum (19) este o integrală improprie. Dacă $F \in C^0_\mu(\mathscr{V})$, integrala $U(\boldsymbol{x})$ este convergentă, şi reprezintă o funcţie de clasă $C^2_\mu(\mathscr{V})$, pentru care

$$\Delta U(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -4\pi F(\boldsymbol{x}) & \text{dacă} \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}, \\ \quad 0 & \text{dacă} \quad \boldsymbol{x} \notin \mathscr{V} + \mathscr{S}. \end{cases} \tag{25}$$

Potenţialul de volum este deci o soluţie particulară a ecuaţiei lui Poisson, şi cunoaşterea lui permite reducerea studiului acesteia, la studiul ecuaţiei lui Laplace, cu condiţii la limită convenabil modificate.

Domeniul $\mathscr{V}$ poate fi privit ca ocupat de o mulţime de surse de intensitate variabilă $(1/4\pi) \, F \mathrm{d}V$, repartizate continuu în $\mathscr{V}$. Luînd $F \equiv 0$ în complementara $\complement(\mathscr{V} + \mathscr{S})$, şi observînd că R depinde numai de diferenţele $x_i - \xi_i$, acest potenţial se scrie sub forma unei convoluţii

$$U = F * R^{-1}. \tag{26}$$

Ţinînd seama de (A.2.23), unde rolul operatorului $\mathfrak{D}$ este preluat de Δ, obţinem pe rînd (făcînd uz şi de (15) şi (A.2.10)):

$$\Delta U = \Delta(F * R^{-1}) = F * \Delta R^{-1} = F * (-4\pi\delta) = -4\pi F, \tag{27}$$

ceea ce este similar cu (25), dar are un sens mai general, întrucît F este aci o distribuţie. (Vezi I. Ghelfand şi G. Şilov[1], vol. 1, § 1.3, pct. 3.)

Potenţialii (20), (21) verifică ecuaţia lui Laplace în orice punct $\boldsymbol{x} \notin \mathscr{S}$, pentru orice densităţi G, H integrabile pe $\mathscr{S}$. (Formule mai generale, similare cu (26), pot fi de asemenea date; vezi loc. cit., § 3.1, pct. 2, 5 şi 8.) Este limpede că aceste formule definesc funcţii *diferite* după cum $\boldsymbol{x}$ este interior sau exterior domeniului.

Întrucît sînt funcţii armonice, potenţialii (20), (21) sînt şi funcţii analitice (desfăşurabile în serii Taylor convergente) în orice punct $\boldsymbol{x} \notin \mathscr{S}$.

Dacă însă $\boldsymbol{x} \in \mathscr{S}$, integralele (20), (21) devin de asemenea improprii. Dacă densităţile sînt integrabile şi mărginite pe $\mathscr{S}$, iar $\mathscr{S}$ este o suprafaţă Liapunov pe porţiuni, aceste integrale sînt convergente. Valorile lor pot fi obţinute printr-un proces de trecere la limită, *care nu trebuie confundat* cu cel care dă valorile la limită ale integralelor (20), (21) în sensul din § 1.1, pentru puncte interioare sau exterioare ce tind către puncte de pe $\mathscr{S}$. (Compară cu § A.11, pag. 776.)

Să notăm cu indicele „+" valorile la limită pentru $x \to x_0$, $x \in \mathscr{V}^+$, $x_0 \in \mathscr{S}$, şi cu indicele „−" cele ce corespund cazului complementar.

Dacă G şi H sînt *continue* pe $\mathscr{S}$, se pot stabili următoarele relaţii între valorile la limită interioare (+), cele exterioare (−), şi valorile directe ale integralelor (20), (21) şi ale derivatelor lor în orice punct $x_0 \in \mathscr{S}$:

$$V_+(x_0) = V_-(x_0)\,, \tag{28}$$

$$W_+(x_0) = 2\pi\, H(x_0) + \iint_{\mathscr{S}} (\cos \varphi_0 / R_0^2)\, H(\xi)\, \mathrm{d}S, \tag{29}$$

$$W_-(x_0) = -\,2\pi\, H(x_0) + \iint_{\mathscr{S}} (\cos \varphi_0 / R_0^2)\, H(\xi)\, \mathrm{d}S, \tag{30}$$

$$V_{+,n}(x_0) = 2\pi G(x_0) + \iint_{\mathscr{S}} (\cos \psi_0 / R_0^2)\, G(\xi)\, \mathrm{d}S, \tag{31}$$

$$V_{-,n}(x_0) = -\,2\pi\, G(x_0) + \iint_{\mathscr{S}} (\cos \psi_0 / R_0^2)\, G(\xi)\, \mathrm{d}S. \tag{32}$$

În aceste relaţii, φ_0 este — după cum urmează din (14) — unghiul dintre normala *exterioară* $\boldsymbol{n}$ la $\mathscr{S}$ în *punctul de sursă* $\boldsymbol{\xi}$, şi vectorul $-\boldsymbol{R}_0$ ce merge de la punctul de observaţie x_0 (situat acum tot pe $\mathscr{S}$), la punctul de sursă $\boldsymbol{\xi}$. Unghiul ψ_0 este unghiul dintre normala exterioară *în punctul de observaţie*, şi acelaşi vector $-\boldsymbol{R}_0$ (vezi şi fig. 7.2.1 şi 7.2.2).

Aceste relaţii rămîn valabile pentru suprafeţe $\mathscr{S}$ deschise şi orientabile.

Asemănarea dintre formulele (28)—(32) şi formulele lui Sohoţkii-Plemelj (A.11.6) pentru integralele de tip Cauchy este evidentă.

Formule similare pot fi stabilite în $\mathscr{E}_2$, înlocuind în (29)—(32) coeficientul 2π prin π, şi R_0^2 prin R_0.

Pentru un studiu detailat al formulelor (28)—(32), vezi de exemplu N. Günther [1], capitolul 2 ; V. Smirnov [2], volumul 4, pct. 192—199 ; L. Sretenskii [1], capitolul 1 ; A. Tihonov şi A. Samarskii [1], § 4.5. Vezi şi N. Mushelişvili [4], § 1.12.

Potenţialii newtonieni introduşi în (19)—(21) conduc la o interpretare importantă a formulei (18). Anume, fiind dată ecuaţia lui Poisson

$$\Delta u + F = 0 \quad \text{în} \quad \mathscr{V}, \tag{33}$$

şi valorile la limită

$$u|_{\mathscr{S}} = g\,, \quad u_{,n}|_{\mathscr{S}} = f, \tag{34}$$

formula (18) realizează reprezentarea lui u ca *sumă a trei potenţiali*. Studiul ecuaţiei lui Poisson poate fi deci redus la cel al funcţiilor (19)—(21).

c) Metode de rezolvare

Formula (18) nu dă totuși explicit soluția problemei (33), (34): teorema de unicitate arată că datele din (34) sînt supraabundente. Pentru a căpăta o formulă care să furnizeze soluția ecuației (33) cu datele la limită

$$u|_{\mathscr{S}'} = g, \quad u_{,n}|_{\mathscr{S}''} = f, \quad (\mathscr{S}' \cup \mathscr{S}'' = \mathscr{S},\ \mathscr{S}' \cap \mathscr{S}'' = \emptyset), \tag{35}$$

este necesară considerarea *funcției lui Green* $G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$. (A nu se confunda cu $G(\boldsymbol{\xi})$ din (20)!) Aceasta este suma soluției fundamentale a ecuației lui Laplace, cu *o anumită* soluție regulată a aceleiași ecuații, care trebuie determinată din condițiile

$$G|_{\mathscr{S}'} = 0, \quad G_{,n}|_{\mathscr{S}''} = 0. \tag{36}$$

Prin urmare, $G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$ este o *funcție de domeniu* (și de descompunerea $\mathscr{S}' \cup \mathscr{S}''$) și trebuie atașată *nu* ecuației (33) cu condițiile (35), ci operatorului Δ, domeniului $\mathscr{V}$, și descompunerii $\mathscr{S}' \cup \mathscr{S}''$. Cunoașterea ei dă posibilitatea de a exprima soluția celor trei probleme fundamentale (Dirichlet, Neumann, sau mixtă) pentru ecuația lui Poisson *prin integrale definite*:

$$u(\boldsymbol{x}) = \iiint_{\mathscr{V}} F(\boldsymbol{\xi})\, G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}V - \iint_{\mathscr{S}} g(\boldsymbol{\xi})\, [G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})]_{,n}\, \mathrm{d}S + \iint_{\mathscr{S}''} f(\boldsymbol{\xi})\, G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}S. \tag{37}$$

Aceasta a fost istoricește prima cale spre demonstrarea teoremelor de existență pentru ecuația lui Poisson. Din punct de vedere al calculului, importanța ei este sensibil redusă de dificultățile legate de determinarea efectivă a funcției lui Green.

O a doua cale constă în a reduce problema la studiul unor *ecuații integrale* pentru densitățile ce apar în (18) — așadar, în cazul tridimensional, pentru funcții de două variabile, iar în cel bidimensional, pentru funcții de numai o variabilă.

Formula (25) arată că problema poate fi întotdeauna redusă la integrarea ecuației lui Laplace, iar soluția acesteia poate fi căutată sub forma unui potențial de dublu sau de simplu strat, după cum este vorba de problema lui Dirichlet sau Neumann. Densitatea odată găsită, soluția se obține și aci sub forma unei integrale definite.

Astfel de pildă, să determinăm funcția u, armonică în $\mathscr{V}^+$, și care ia pe $\mathscr{S}$ valori date g. Căutînd soluția sub forma

$$W(\boldsymbol{x}) = \iint_{\mathscr{S}} (\cos\varphi / R^2)\, H(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}S, \tag{38}$$

sîntem conduşi la a transcrie condiţia la limită sub forma

$$W_{+} = g\,, \tag{39}$$

ceea ce, ţinînd seama de (29), duce la ecuaţia integrală

$$2\pi H(x_0) + \iint_{\mathscr{S}} (\cos \varphi_0 / R_0^2)\, H(\xi)\, \mathrm{d}S = g(x_0), \quad x_0, \xi \in \mathscr{S}. \tag{40}$$

Dacă $\mathscr{S}$ este o suprafaţă cu curbură continuă (vezi § 1.1, pag. 34), această ecuaţie este de tip Fredholm. Dacă $\mathscr{S}$ este numai o suprafaţă Liapunov, prezenţa factorului $1/R_0^2$ arată că avem de-a face cu o ecuaţie slab-singulară (funcţia $\cos \varphi_0$ fiind în acest caz hölderiană), care beneficiază deci de multe din mijloacele teoriei lui Fredholm. Pentru studiul acestor probleme, vezi C. Iacob [5], capitolul 3 ; S. Mihlin [1], §§ 10 şi 38 ; [2], §§ 48 şi 49 ; [3], §§ 19—21 ; [4], § 74 ; A. Tihonov şi A. Samarskii [1], § 4.5, pct. 11.

Dacă $\mathscr{S}$ nu este o suprafaţă Liapunov, atunci (40) este o ecuaţie integrală singulară. Pentru problema plană, astfel de ecuaţii (incluzînd cazul frontierelor Liapunov) sînt studiate în general de F. Gahov [1] ; N. Musheli̇şvili [3]. Pentru un număr oarecare de dimensiuni, rezultatele cele mai importante aparţin lui G. Giraud (vezi o expunere detaliată în C. Miranda [1], capitolele 3 şi 4) şi S. Mihlin [5].

Menţionăm în fine vechiul punct de vedere al lui Riemann în studiul ecuaţiei lui Poisson, constînd în reducerea chestiunii la *o problemă de minimum pentru o anumită funcţională*. Reluat de D. Hilbert [1], acest punct de vedere a deschis drumul aplicaţiilor analizei funcţionale în problemele fundamentale ale teoriei potenţialului. (Vezi S. Mihlin [2]—[4].)

Ideea de a reprezenta soluţia cu ajutorul funcţiei lui Green, sau prin potenţiali (integrale de tipul (19)—(21), definite cu ajutorul soluţiilor fundamentale ale ecuaţiei omogene corespunzătoare), cu reducerea ulterioară la rezolvarea anumitor ecuaţii integrale — s-a dovedit a fi rodnică şi înafara studiului ecuaţiei lui Poisson. Pentru mai multe detalii, vezi mai departe § 11, pag. 562.

d) Funcţii sferice

În unele chestiuni cu caracter teoretic, precum şi în problemele referitoare la domeniul mărginit de una sau două sfere concentrice, se poate face uz de dezvoltări în serie, analoge într-o anumită măsură seriilor Laurent şi Fourier : este vorba despre seriile de polinoame armonice omogene, respectiv de seriile de funcţii sferice superficiale.

Pentru expuneri amănunţite, vezi de exemplu E. Goursat [2], §§ 531—532 ; E. Hobson [2], capitolul 4 ; V. Smirnov [2], volumul 3, partea 2, § 6.1 ; S. Sobolev [3], capitolele

29–30; L. Sretenskii [1], capitolul 5; N. Teodorescu şi V. Olaru [1], vol. 1, partea 3, capitolul 4. A. Tihonov şi A. Samarskii [1], anexa 2.

Amintim aci pe scurt că, dacă se caută soluţiile *polinomiale* ale ecuaţiei lui Laplace (în $\mathcal{E}_3$), se vede uşor că există $2n+1$ polinoame armonice şi omogene de grad n, liniar independente. Transcriind aceste polinoame în coordonate sferice cu ajutorul formulelor (5), deducem că orice astfel de polinom are forma

$$H_n(x_1, x_2, x_3) = R^n Y_n(\theta, \varphi). \tag{41}$$

Aceeaşi concluzie se obţine dacă se pune ecuaţia lui Laplace sub forma care rezultă din (8), şi se caută soluţia sub forma

$$H(R, \theta, \varphi) = g(R)\, Y(\theta, \varphi). \tag{42}$$

De aci, obţinem uşor ecuaţiile

$$R^2 g''(R) + 2Rg'(R) - kg(R) = 0, \tag{43}$$

$$(\sin\theta)^{-1}(\sin\theta\, Y_{,\theta})_{,\theta} + (\sin\theta)^{-2} Y_{,\varphi\varphi} + kY = 0, \tag{44}$$

unde k este o constantă nedeterminată. Soluţia ecuaţiei (43) este de forma $g(R) = R^n$; întrucît căutăm soluţii *polinomiale*, urmează $k = n(n+1)$. Introducînd această valoare în (44), obţinem pentru fiecare întreg $n > 0$ *cîte o* soluţie $Y_n(\theta, \varphi)$ şi pentru fiecare Y_n, *cîte două* soluţii ale ecuaţiei lui Laplace:

$$H_n(R, \theta, \varphi) = R^n Y_n(\theta, \varphi), \quad H_{-n-1}(R, \theta, \varphi) = R^{-n-1} Y_n(\theta, \varphi), \tag{45}$$

dintre care prima este un polinom, iar cea de a doua este o funcţie armonică şi omogenă de grad $-n-1$.

Funcţiile H_n şi H_{-n-1} se numesc *funcţii sferice*, iar Y_n se numesc *funcţii sferice superficiale* de ordin n. Evident, există $2n+1$ funcţii sferice superficiale independente de ordin n.

Căutînd soluţia ecuaţiei (44) pentru $k = n(n+1)$ sub forma

$$Y_n(\theta, \varphi) = \Theta_n(\theta)\, \Phi_n(\varphi), \tag{46}$$

obţinem

$$\Phi_n''/\Phi_n = -[\sin\theta(\sin\theta\ \Theta_n')'/\Theta_n] - n(n+1)\sin^2\theta = -m^2, \tag{47}$$

unde $-m^2$ este o nouă constantă. Ecuaţia

$$\Phi_n'' + m^2\Phi_n = 0, \tag{48}$$

ce rezultă din (47), posedă soluţiile $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$. Pentru $0 \leqslant m \leqslant n$, obţinem deci $2n+1$ soluţii liniar independente.

Efectuînd în cea de-a doua ecuație ce rezultă din (47) schimbarea de variabilă $x = \cos\,\theta$, obținem ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}P_n^m(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right]P_n^m(x) = 0, \qquad (49)$$

unde am notat

$$P_n^m(x) = \Theta_n(\theta) \qquad (50)$$

pentru o valoare dată a lui m (număr natural).

Soluția continuă în intervalul $[-1, +1]$ a ecuației (49) este

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2}\,\mathrm{d}^m P_n(x)/\mathrm{d}x^m, \qquad (51)$$

unde funcțiile $P_n(x)$ sînt *polinoamele lui Legendre*

$$P_n(x) = (1/2^n\,n!)\,\mathrm{d}^n(x^2 - 1)^n/\mathrm{d}x^n; \qquad (52)$$

$P_n^m(x)$ se numesc *polinoamele lui Legendre asociate*. Și unele, și celelalte sînt sisteme de polinoame ortogonale în intervalul $[-1, +1]$.

Funcția sferică superficială din (46) ia acum forma

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_0\,P_0(\cos\,\theta) + \sum_{m=1}^{n}[a_m \cos m\,\varphi + b_m \sin m\,\varphi]\,P_n^m(\cos\,\theta), \qquad (53)$$

și depinde de $2n + 1$ constante arbitrare.

Funcțiile sferice superficiale rezultă de asemenea ortogonale pe sfera unitate. Aceasta permite construirea unor serii formal analoge seriilor Fourier :

$$F(\theta,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\ \varphi) = a_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[a_0^n\,P_n(\cos\,\theta) + $$

$$+ \sum_{m=1}^{n}(a_m^n \cos m\,\varphi + b_m^n\,\sin m\,\varphi)\,P_n^m(\cos\,\theta)\Bigg], \qquad (54)$$

în care coeficienții au, datorită proprietăților de ortogonalitate, valorile

$$a_m^n = \frac{(2n+1)\,(n-m)!}{2\,\delta_m\,\pi\,(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta,\ \varphi)\,P_n^m(\cos\,\theta)\cos m\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$b_m^n = \frac{(2n+1)\,(n-m)!}{2\,\delta_m\,\pi\,(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta,\ \varphi)\,P_n^m(\cos\,\theta)\sin m\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi, \qquad (55)$$

unde $P_n^0 \equiv P_n$, iar $\delta_0 = 2,\ \delta_m = 1$ pentru $m \geqslant 1$.

Pentru convergența uniformă a seriei (54) în orice punct al sferei unitate, este suficient ca media valorilor lui $F(\theta,\ \varphi)$ pe orice cerc (privit ca cerc paralel) pe sferă să fie o funcție de clasă

C^1 în raport cu arcul meridianului corespunzător (vezi V. Smirnov [2], vol. 3, partea 2, pct. 134). Aceasta este o condiţie mai severă decît cele ce intervin în teoria seriilor Fourier (vezi § A.9). O altă condiţie suficientă de convergenţă este $F(\theta, \varphi) \in C^2$. Pentru rezultate mai generale, vezi E. Hobson [2], capitolul 7.

Din cele de mai s s rezultă uşor soluţia problemelor lui Dirichlet şi Neumann pentru bulă, pentru exteriorul sferei şi pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice. Astfel, în problema lui Dirichlet este suficient să dezvoltăm datele la limită în serii de funcţii sferice superficiale, şi să înlocuim în fiecare din termeni funcţia Y_n prin $(R/R_0)^n\, Y_n$ (pentru problema interioară), sau prin $(R/R_1)^{-n-1}\, Y_n$ (pentru problema exterioară) sau, în fine, cu o sumă de termeni de ambele tipuri (pentru domeniul mărginit de două sfere de raze $R_1 < R_0$).

§ 3. ASUPRA REPREZENTĂRII SOLUŢIILOR ECUAŢIILOR ELASTICITĂŢII PRIN POTENŢIALI DE TENSIUNE ŞI DE DEPLASARE

a) *Potenţiali*

Noţiunea de *potenţial* a fost introdusă în § 4.10. În capitolele 5 şi 6, am văzut că funcţiile lui Prandtl şi Timoshenko, ca şi cea a lui Airy, sînt potenţiali de tensiune; funcţiile lui Capildeo şi Milne-Thomson, respectiv ale lui Kolosov şi Mushelişvili, sînt potenţiali de deplasare pentru aceleaşi probleme.

Trecînd la cazul tridimensional, amintim rezultatele lui J. Maxwell [1] şi G. Morera [1] care, generalizînd formulele lui Airy, au construit potenţiali de tensiune ce asigură verificarea ecuaţiilor de echilibru. (Vezi şi E. Beltrami [1]; G. Morera [1], [2]; M. Gurtin [2].) Dar faptul că aceşti potenţiali trebuie să verifice şi ecuaţiile ce derivă din condiţiile de compatibilitate (şase la număr, în loc de una în cazul plan), explică noile dificultăţi de învins. Pentru detalii, vezi de exemplu M. Haimovici [1], § 9.1; A. Lurie [4], §§ 1.11 şi 1.12; A. Love [1], § 56; vezi şi lucrarea lui B. Finzi [1], care este la originea punctului de vedere dezvoltat de I. Krutkov [1] şi V. Bloh [1], [2] (inclusiv pentru cazul coordonatelor curbilinii); vezi în fine E. Kröner [2] şi [4], § 2.11–2.12; H. Schaeffer [1]; C. Truesdell [4].

Dificultăţile menţionate au justificat concentrarea atenţiei asupra ecuaţiilor în deplasări.

După o primă reprezentare a soluţiei ecuaţiilor lui Lamé omogene prin funcţii armonice (lord Kelvin [1], retipărit în [4], vol. 1; vezi încă E. şi F. Cosserat [2]), au urmat repetate încercări de a se reprezenta aceste soluţii prin funcţii bi-armonice (vezi de ex. J. Boussinesq [2]; B. Galerkin, [1], [2] vol. 1). Dar teorema lui Almansi (vezi § 4.10) permite să se ajungă la *reprezentarea deplasărilor prin potenţiali armonici*. Utilizarea funcţiilor *bi*-armonice în acest scop este azi deja depăşită.

Totuşi, potenţialii de deplasare prezintă — deocamdată — avantaje evidente, *mai ales în cazul corpurilor izotrope şi omogene*. Dimpotrivă, metoda potenţialilor de tensiune poate conduce la soluţii care nu depind de legătura dintre tensiuni şi deformaţii, şi sînt deci apte de a fi generalizate la corpuri anizotrope, ne-omogene, chiar plastice etc. (Vezi şi § 5.1, pag. 166; § 6.6, pag. 388.)

b) Reprezentarea lui Kelvin

Înainte de a trece la reprezentările uzuale ale soluţiilor, amintim pe scurt reprezentarea lui Kelvin. Să considerăm ecuaţiile lui Lamé (4.8.7):

$$\Delta \boldsymbol{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mu^{-1} \boldsymbol{F} = 0, \tag{1}$$

şi să folosim pentru vectorii $\boldsymbol{u}$ şi $\boldsymbol{F}$ descompunerea lui Stokes:

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} p + \operatorname{rot} \boldsymbol{q}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} P + \operatorname{rot} \boldsymbol{Q}. \tag{3}$$

Aceasta dă succesiv

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \Delta p; \qquad \Delta \boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \Delta p + \operatorname{rot} \Delta \boldsymbol{q}, \tag{4}$$

astfel că (1) devine

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \operatorname{grad} \Delta p + \operatorname{rot} \Delta \boldsymbol{q} + \frac{1}{\mu} (\operatorname{grad} P + \operatorname{rot} \boldsymbol{Q}) = 0. \tag{5}$$

Or, această ecuaţie este desigur satisfăcută dacă alegem

$$\Delta p = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{P}{\mu}, \qquad \Delta \boldsymbol{q} = -\frac{\boldsymbol{Q}}{\mu}. \tag{6}$$

Orice vector $\boldsymbol{u}$ definit de (2), (6), verifică ecuaţiile (1). Am obţinut deci o soluţie a ecuaţiilor lui Lamé, reprezentată prin patru potenţiali (scalari) de deplasare, soluţii la rîndul lor ale unor ecuaţii Poisson, sau pur şi simplu funcţii armonice dacă $\boldsymbol{F} = 0$. (Vezi şi § 4.10, pag. 156).

Cu toată importanţa ei principială, reprezentarea lui Kelvin a jucat un rol practic restrîns — desigur, din cauză că potenţialii p şi $\boldsymbol{q}$ intervin în expresia lui $\boldsymbol{u}$ numai sub formă diferenţială.

c) Reprezentarea lui Clebsch

Un analog al acestei reprezentări pentru cazul dinamic a fost obţinut de A. Clebsch [1]. Folosind cele arătate în § 4.11, ecuaţiile micilor mişcări elastice se obţin (în absenţa forţelor de volum) înlocuind $\boldsymbol{F}$

prin vectorul lui d'Alembert $-\rho\ddot{\boldsymbol{u}}$. Raționamentele de mai sus rămîn intacte, și în locul ecuațiilor (6) căpătăm (folosind încă și (3.4.7))

$$\Delta p = [\rho/(\lambda + 2\mu)]\,\ddot{p}, \qquad \Delta \boldsymbol{q} = [\rho/\mu]\,\ddot{\boldsymbol{q}}. \tag{7}$$

În cazul prezenței forțelor de volum, în membrul al doilea din (7) se adaugă încă termeni identici celor din membrul al doilea din (6).

În elasto-dinamică, ecuația lui Poisson (sau Laplace) este deci înlocuită de *ecuația propagării undelor*, cea mai simplă ecuație de tip hiperbolic. Repetînd cu referire la ecuațiile (7) raționamentele bazate pe formula (4.12.4), ajungem la concluzia că *componenta irotațională* grad p a deplasării $\boldsymbol{u}$ se propagă cu viteza c_1, iar *componenta echivoluminală* rot $\boldsymbol{q}$ se propagă cu viteza c_2 din (4.12.16). Descompunerea lui Stokes și raționamentul lui Clebsch oferă deci o posibilitate de a separa cele două tipuri de unde, puse în evidență în § 4.12.

§ 4. REPREZENTAREA LUI GRODSKII. ALTE REPREZENTĂRI PRIN POTENȚIALI DE DEPLASARE. PROPRIETĂȚI GENERALE

Ne vom opri acum asupra unor reprezentări libere de inconvenientul mai sus menționat relativ la cea a lui Kelvin. O tehnică unitară de deducere a celor mai importante reprezentări prin potențiali de deplasare este următoarea (L. Solomon [1]).

Dacă termenul median ar lipsi din ecuațiile lui Lamé

$$\Delta \boldsymbol{u} + (1 - 2\nu)^{-1}\,\text{grad div}\,\boldsymbol{u} + \mu^{-1}\boldsymbol{F} = 0, \tag{1}$$

vectorul $\boldsymbol{u}$ ar satisface o ecuație Poisson. Să căutăm deci soluția ecuațiilor lui Lamé sub forma

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{u}_0, \tag{2}$$

unde $\boldsymbol{B}$ este soluția ecuației Poisson (vectoriale)

$$\Delta \boldsymbol{B} + \mu^{-1}\boldsymbol{F} = 0, \tag{3}$$

iar $\boldsymbol{u}_0$ este un vector de corecție. Impunînd dinainte diferite proprietăți vectorului $\boldsymbol{u}_0$, vom obține pentru acesta diferite ecuații cărora el le satisface. Toate aceste rezultate sînt valabile pentru $\boldsymbol{u} \in C^2(\mathscr{V})$, chiar dacă $\boldsymbol{F} \neq 0$.

a) Reprezentarea lui Grodskii

Să căutăm mai întîi vectorul $\boldsymbol{u}_0$ sub forma

$$\boldsymbol{u}_0 = \text{grad}\, f. \tag{4}$$

Pentru a găsi ecuația căreia îi satisface funcția f, vom introduce

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} + \text{grad } f \tag{5}$$

în (1), ținînd seama că $\boldsymbol{B}$ este soluția ecuației (3). Întrucît avem

$$\Delta \boldsymbol{u} = -\frac{\boldsymbol{F}}{\mu} + \text{grad } \Delta f, \qquad \text{div } \boldsymbol{u} = \text{div } \boldsymbol{B} + \Delta f, \tag{6}$$

și întrucît avem $0 < \nu < \frac{1}{2}$, ecuația (1) devine

$$\text{grad}\left[\Delta f + \frac{1}{2}(1 - \nu)^{-1} \text{div} \boldsymbol{B}\right] = 0. \tag{7}$$

Întrucît nu căutăm soluția generală a ecuației (7), este suficient să luăm

$$\Delta f = -\frac{1}{2}(1 - \nu)^{-1} \text{div } \boldsymbol{B}. \tag{8}$$

Să începem prin a evalua expresia $\Delta(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B})$. Avem mai întîi

$$\Delta(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}) = (\delta_{jh} B_h + x_h B_{h,j})_{,j} = 2 \text{ div } \boldsymbol{B} + \boldsymbol{x} \cdot \Delta \boldsymbol{B}, \tag{9}$$

și deci, ținînd seama și de (3):

$$\text{div } \boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\Delta(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}) + \frac{1}{2}\mu^{-1}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}). \tag{10}$$

Introducînd acum (10) în (8), căpătăm ecuația

$$\Delta\left[f + \frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B})\right] = -\frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1}\mu^{-1}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}), \tag{11}$$

și mai departe, notînd

$$f + \frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}) = -\frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1} B_0,$$

căpătăm în definitiv

$$\Delta B_0 = \mu^{-1}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}), \tag{12}$$

unde B_0 este soluția *generală* a ecuației (12), iar f are forma

$$f = -\frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B} + B_0). \tag{13}$$

Corecția căutată a fost astfel găsită, și $\boldsymbol{u}$ admite reprezentarea

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} - \frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1}\text{grad }(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B} + B_0), \tag{14}$$

unde avem

$$\Delta \boldsymbol{B} = -\mu^{-1} \boldsymbol{F}, \qquad \Delta B_0 = \mu^{-1} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}). \tag{15}$$

Sub o formă mai dezvoltată, relațiile (14) se scriu

$$u_j = B_j - \frac{1}{4(1-\nu)} (x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3 + B_0)_{,j}. \tag{16}$$

Se verifică ușor că *orice* vector $\boldsymbol{u}$ de forma dată în (14), (15) este o soluție a ecuațiilor lui Lamé. Într-adevăr, un calcul elementar dă (ținînd seama și de (9) și (3)) :

$$\Delta \boldsymbol{u} = -\frac{\boldsymbol{F}}{\mu} - \frac{1}{2(1-\nu)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{B}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{div} \boldsymbol{B}, \tag{17}$$

astfel că ecuațiile (1) rezultă identic verificate.

Prin urmare, reprezentarea (14), (15) este o condiție *suficientă* (nu și necesară !) pentru ca vectorul $\boldsymbol{u} \in C^2$ să fie soluție a ecuațiilor Lamé ne-omogene. Evident, alegînd funcții $\boldsymbol{B}$, B_0 destul de simple, putem construi, printr-o metodă inversă, soluții ale ecuațiilor Lamé. Vom face de repetate ori uz de acest fapt.

Reprezentarea (14), (15) a fost găsită de către G. Grodskii [1], H. Neuber [1] și P. Papkovici [1], [2]. După cum subliniază P. Papkovici [3], prioritatea îi aparține lui Grodskii, în timp ce Neuber are meritul celei dintîi utilizări sistematice a acestei reprezentări. În cele ce urmează, reprezentarea (14), (15) se va numi *reprezentarea* (sau *soluția*) *lui Grodskii*, iar funcțiile B_1, B_2, B_3, B_0 vor fi funcțiile lui Grodskii. (În literatură, este frecvent folosită denumirea de „soluție Neuber-Papkovici" sau „Papkovici-Boussinesq".)

OBSERVAȚIE. O reprezentare de aspect similar apare în studiul corpurilor poroase, sau al corpurilor compuse din mici granule sferice. Vezi de exemplu M. Biot [1]; A. Lubinskii [1]; R. Mindlin [5].

Pentru $\boldsymbol{F} = 0$, formulele (14) și (15) dau soluția de clasă C^2 a ecuațiilor lui Lamé omogene *prin intermediul a 4 potențiali armonici de deplasare.* (După cum vom vedea în § 5, aceștia *nu sînt* independenți.)

Ca și în §§ 5.11 și 6.11, ne vom limita în general la a căuta soluții regulate. Pentru aceasta, este suficient să presupunem că $\boldsymbol{B}, B_0 \in C^2(\mathscr{V} + \mathscr{S})$. Uneori, vom considera totuși și potențiali cu singularități (vezi de ex. § 8 și §§ 9.5—9.8).

b) Reprezentarea lui Trefftz

Să căutăm soluția ecuațiilor (1) sub forma (2) în așa fel, încît $\boldsymbol{u}_0$ să depindă de o singură funcție scalară, și să se anuleze[3]) pe unul din planele de coordonate, fie el $x_j = 0$:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} + x_j \operatorname{grad} h. \tag{18}$$

[3]) Pentru sensul acestei condiții, vezi § 9.2.

Vectorul $\boldsymbol{B}$ satisface aceeași ecuație (3); dar întrucît vectorii de corecție din (5) și (18) sînt diferiți, rezultă că notația $\boldsymbol{B}$ este folosită în cele două formule pentru vectori de asemenea diferiți.

Ținînd seama că grad $x_j = \boldsymbol{i}_j$, deducem din (3) și (18)

$$\Delta \boldsymbol{u} = -\mu^{-1}\boldsymbol{F} + 2\,(\text{grad}\, h)_{,j} + x_j \;\text{grad}\, \Delta h,$$
$$\text{div}\, \boldsymbol{u} = \text{div}\, \boldsymbol{B} + h_{,j} + x_j\, \Delta\, h\,, \tag{19}$$
$$\text{grad div}\, \boldsymbol{u} = \text{grad div}\, \boldsymbol{B} + \text{grad}\, h_{,j} + x_j\, \text{grad}\, \Delta\, h + \boldsymbol{i}_j\, \Delta\, h,$$

astfel că ecuația (1), după înmulțire cu $(1-2\,\nu)\neq 0$, conduce la $(3-4\,\nu)\;(\text{grad}\; h)_{,j} + \text{grad div}\; \boldsymbol{B} + 2(1-\nu)\; x_j\; \text{grad}\, \Delta\, h + \boldsymbol{i}_j\, \Delta\, h = 0$, ceea ce este desigur verificat dacă luăm

$$\Delta\, h = 0 \quad , \quad h_{,j} = -(3-4\,\nu)^{-1}\; \text{div}\; \boldsymbol{B}. \tag{20}$$

Spre deosebire de cazul reprezentării lui Grodskii, scalarul h care determină vectorul de corecție este soluție a unui sistem de *două* ecuații. Problema compatibilității sistemului (20) — așadar a posibilității de a reconstitui funcția *armonică* h dacă derivata ei $h_{,j}$ (pentru j dat) e cunoscută, este cercetată de M. Slobodianskii [1]. (Aceasta revine la a rezolva o anumită problemă Dirichlet pentru ecuația lui Laplace.)

Reprezentarea (3), (18), (20) aparține lui E. Trefftz [3]. Și ea poate fi folosită pentru a obține soluții pe linia metodei inverse.

Menționăm încă reprezentarea lui J. Boussinesq [2]— care se obține cerînd ca vectorul $\boldsymbol{u}_0$ să se anuleze pe frontiera unei bule— și cea a lui A. Korn [1]— care rezultă dacă $\boldsymbol{u}_0$ este căutat sub forma unui vector echivoluminal. Nu insistăm asupra lor, întrucît ele par a fi deja eliminate din practică de către reprezentarea lui Grodskii, cea mai maleabilă.

O reprezentare foarte generală este propusă de A. Haimovici [1], § 9.2 :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} + H\;\text{grad}\;\varphi + \boldsymbol{K}\;\varphi,$$
$$\Delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L},\quad \Delta\varphi = L,\quad H = aR^2 + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} + c,\; \boldsymbol{K} = (a+k)\;\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \tag{21}$$

unde a, c, k, L, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{L}$, sînt constante și vectori constanți cunoscuți.

Vezi de asemenea reprezentările propuse de V. Bloh [1], [2]; F. Ciurikov [1]; V. Deev [1].

Articole de sinteză asupra diferitelor reprezentări ale soluțiilor aparțin lui C. Marguerre [1]; P. Papkovici [3]; C. Weber [3]. Importanta chestiune a *completitudinii* acestor reprezentări (așadar a condițiilor *necesare* pentru ca soluția să poată fi pusă sub o anumită formă) este cercetată de R. Eubanks și E. Sternberg [1]; M. Gurtin [3]; R. Mindlin [2]; P.Naghdi și C. Hsu [1]; M. Slobodianskii [1], [2]; E. Sternberg și M. Gurtin [1].

Pentru aceeași problemă în elasticitate asimetrică, vezi J. Doyle [1].

c) *Proprietăți generale*

Vom examina acum pe scurt unele caracteristici ale reprezentărilor lui Grodskii și Trefftz, valabile de altfel și pentru cele ale lui Korn și Boussinesq.

Ideea de bază în utilizarea acestor reprezentări este următoarea: dacă transcriem componentele stării elastice prin intermediul potențialilor de deplasare, *integrarea ecuațiilor lui Lamé este redusă la cea a unor ecuații Poisson* (sau Laplace), *cu date la limită formulate pentru potențiali.* Desigur, în general nu se mai obțin probleme Dirichlet sau Neumann pentru funcțiile lui Grodskii, Trefftz etc. Totuși, în unele cazuri problema a putut fi redusă chiar la studiul unor probleme Dirichlet sau Neumann pentru ecuația lui Laplace (vezi de ex. §§ 5.11, 8.3, 8.4, 9.2, 9.4, 9.6).

Toate aceste reprezentări sînt valabile numai pentru corpuri izotrope și omogene. Rezultatele puțin numeroase obținute pentru corpuri anizotrope sînt expuse de A. Green și W. Zerna [1], § 5.12; E. Kröner [1], [3]; Z. Mossakowska [1]; A. Seeger [1]. (Vezi și § 4.10, pag. 155–156).

Aceste rezultate nu depind de ordinul de conexiune al domeniului, de faptul dacă el este mărginit sau nu, de natura frontierei sale, sau de eventualele condiții la limită. Singura presupunere necesară este aceea că soluția *există*, și că $\boldsymbol{u} \in C^2(\mathscr{V})$. Conform cercetărilor asupra completitudinii amintite mai sus, *dacă* soluția există și *dacă* $\boldsymbol{u} \in C^2$, atunci soluția poate fi pusă sub forma propusă de Grodskii, Trefftz etc. — cu unele rezerve asupra faptului dacă $\mathscr{V}$ este mărginit sau nu, precum și asupra frontierei $\mathscr{S}$ (vezi de ex. M. Slobodianskii [1]).

Să ne oprim asupra reprezentării lui Grodskii pentru $\boldsymbol{F} = 0$. Din proprietățile fundamentale ale funcțiilor armonice (vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.2), urmează că orice soluție de clasă C^2 a ecuațiilor lui Lamé omogene: a) este de clasă $C^\infty(\mathscr{V})$, așadar indefinit derivabilă, b) este analitică în $\mathscr{V}$, așadar desfășurabilă în orice punct $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ în serie Taylor convergentă; c) depinde continuu de datele la limită, așadar la modificări mici ale datelor la limită corespund modificări mici ale soluției în $\mathscr{V}$.

Dacă $\mathscr{V}$ este nemărginit, sînt necesare în plus anumite condiții la infinit (vezi mai jos (6.18)). Pentru o analiză amănunțită a acestor chestiuni (mai ales în domenii nemărginite), vezi R. Duffin și W. Noll [1]; M. Gurtin [3]; M. Gurtin și E. Sternberg [2].

Pentru dependența soluției în raport cu domeniul și proprietățile materialului, vezi încă lucrările lui I. Babuška (pe scurt rezumate în [2]), J. Bramble și L. Payne [5], și V. Palmov [5]. Pentru indicații asupra proprietăților soluțiilor în prezența forțelor concentrate, a se vedea indicațiile din § 2.1, pag. 65.

Dacă $\boldsymbol{F} \neq 0$, dar nu există forțe de volum concentrate, trebuie să admitem $\boldsymbol{F} \in C^0(\mathscr{V})$ – ceea ce este evident necesar din considerente mecanice.

Soluția particulară a ecuațiilor (15) este în acest caz construită cu ajutorul unor potențiali newtonieni de volum (2.19), ceea ce nu mai conduce în mod obligatoriu la funcții analitice.

Mărginindu-ne la cazul $F = 0$, din proprietatea de analiticitate rezultă că dacă o parte (de volum nenul) a corpului $\mathscr{V}$ este în stare naturală, atunci întreg corpul este în stare naturală. (În cazul plan, analiticitatea soluției duce la proprietăți suplimentare : vezi N. Mushelișvili [5], § 37.)

Din cele de mai sus nu rezultă că ecuațiile lui Lamé posedă *numai* soluții analitice — ci doar că, *dacă* în anumite condiții aceste ecuații au soluții de clasă C^2, atunci soluțiile se dovedesc în fapt a fi analitice. Chestiunea de a ști dacă astfel de soluții există și sînt de clasă C^2 aparține desigur domeniului teoremelor de existență.

În cele ce urmează, ne vom limita la a considera numai soluții analitice, exceptînd eventual prezența unor puncte singulare izolate.

Cu anumite precauțiuni, rezultatele de mai sus pot fi extinse la cazul prezenței de singularități (de ex. : date la limită discontinue).

Toate reprezentările prin potențiali de deplasare se deosebesc avantajos de cele prin potențiali de tensiune (Maxwell, Morera), datorită simplicității ecuațiilor pe care potențialii le verifică. Toate aceste reprezentări separă din vectorul $\boldsymbol{u}$ o componentă $\boldsymbol{B}$ sub formă întreagă, și prin aceasta se deosebesc avantajos de reprezentarea lui Kelvin (3.2), (3.6). Întrucît ele conduc la ecuații Laplace (sau Poisson), ele se dovedesc în practică considerabil mai eficace decît reprezentările prin funcții *bi*-armonice (de tip Galerkin, și altele).

d) Cazul problemei plane; cazul dinamic

Variantele plane ale acestor reprezentări se obțin cu ușurință.

Expresia (14) rămîne desigur valabilă în $\mathscr{E}_2$. Efectuînd calculele în (16) (pentru $j = 1,2$) și amintind notația (6.7.13) pentru $\varkappa = 3 - 4\nu$ (deformație plană), obținem

$$\begin{aligned} 4(1-\nu)\,u_1 &= \varkappa B_1 - B_{0,1} - x_1 B_{1,1} - x_2 B_{2,1}, \\ 4(1-\nu)\,u_2 &= \varkappa B_2 - B_{0,2} - x_1 B_{1,2} - x_2 B_{2,2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Pe de altă parte notînd $\varphi = \mathrm{p} + i\mathrm{q}$, $\psi = \mathrm{r} + i\mathrm{t}$, și separînd părțile reală și imaginară în (6.7.12), căpătăm

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= \varkappa \mathrm{p} - \mathrm{r} - x_1 \mathrm{p}_{,1} - x_2 \mathrm{q}_{,1}, \\ 2\mu u_2 &= \varkappa \mathrm{q} + \mathrm{t} - x_2 \mathrm{p}_{,1} + x_1 \mathrm{p}_{,1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Înmulțind (22) cu μ și (23) cu $2(1-\nu)$ și egalînd relațiile, deducem

$$\begin{aligned} 2(1-\nu)\,[\varkappa \mathrm{p} - \mathrm{r} - x_1 \mathrm{p}_{,1} - x_2 \mathrm{q}_{,1}] &= \mu[\varkappa B_1 - B_{0,1} - x_1 B_{1,1} - x_2 B_{2,1}], \\ 2(1-\nu)\,[\varkappa \mathrm{q} + \mathrm{t} - x_2 \mathrm{p}_{,1} + x_1 \mathrm{q}_{,1}] &= \mu[\varkappa B_2 - B_{0,2} - x_1 B_{1,2} - x_2 B_{2,2}]. \end{aligned} \tag{24}$$

Ţinînd seama de ecuaţiile lui Cauchy-Riemann şi de faptul că funcţia B_0 este armonică, aceste relaţii rezultă verificate dacă alegem

$$p = \frac{\mu}{2(1-\nu)} B_1, \quad q = \frac{\mu}{2(1-\nu)} B_2, \quad r = \frac{\mu}{2(1-\nu)} B_{0,1}, \quad t = \frac{-\mu}{2(1-\nu)} B_{0,2}, \tag{25}$$

astfel că reprezentarea lui Kolosov şi Musheli şvili se obţine din cea a lui Grodskii dacă luăm

$$\varphi(\mathfrak{z}) = p + iq = \frac{\mu}{2(1-\nu)} (B_1 + iB_2), \quad \psi(\mathfrak{z}) = r + it = \frac{\mu}{1-\nu} B_{0,\mathfrak{z}}. \tag{26}$$

Un raţionament similar poate fi construit pentru reprezentarea lui Capildeo şi Milne-Thomson.

Pentru cazul *dinamic*, ne mărginim la a menţiona că există reprezentări în parte analoge celor ale lui Grodskii şi Korn (vezi de ex. L. Solomon [2]) — dar totuşi problema elasto-dinamicii rămîne dominată de reprezentarea lui Clebsch, examinată la finele § 3. Toate aceste reprezentări exprimă deplasările prin potenţiali ce satisfac ecuaţia propagării undelor. Pentru informaţii, vezi articolul de sinteză al lui E. Sternberg [3]. Vezi şi E. Sternberg şi M. Gurtin [1].

Problema reprezentării soluţiilor începe a fi studiată sub forme analoage şi pentru corpuri care nu mai sînt elastice. Vezi, ca exemplu, W. Edelstein şi M. Gurtin [2].

§ 5. RELAŢII DE DEPENDENŢĂ ÎNTRE POTENŢIALII DE DEPLASARE. TEOREMA LUI EUBANKS ŞI STERNBERG

Chestiunea independenţei funcţiilor B_1, B_2, B_3, B_0 s-a pus încă de mult. P. Papkovici [4], § 4.6, a încercat să demonstreze că (pentru $\nu \neq 0{,}25$) soluţia generală este reprezentabilă prin intermediul vectorului $\boldsymbol{B}$. H. Neuber [2], § 3.6, afirmă că oricare din cele patru funcţii poate fi neglijată. Problema a fost reluată de R. Mindlin [2] şi M. Slobodianskii [1], inclusiv pentru alte reprezentări. O examinare critică a acestor din urmă rezultate a condus pe R. Eubanks şi E. Sternberg [1] la rezultate privind reprezentarea lui Grodskii

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} - \frac{1}{4}(1-\nu)^{-1} \operatorname{grad} (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B} + B_0), \tag{1}$$

unde, în absenţa forţelor de volum, avem

$$\Delta\boldsymbol{B} = 0, \ \Delta B_0 = 0. \tag{2}$$

Presupunerea geometrică fundamentală este aceea că domeniul $\mathscr{V}$ este *stelat* cel puţin în raport cu un punct al său : există un punct cu proprietatea că segmentul ce îl uneşte cu orice alt punct al domeniului, este în întregime conţinut în domeniu. În particular, acesta este cazul pentru orice domeniu *convex* (care este stelat în raport cu *orice* punct al său).

Scopul raționamentului este de a se demonstra că, dacă originea este aleasă într-un punct în raport cu care $\mathscr{V}$ e stelat, şi dacă $\nu \neq 0{,}25$, atunci vectorul $\boldsymbol{u}$ admite şi *reprezentarea prin trei potențiali armonici*

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A} - \frac{1}{4}(1-\nu)^{-1}\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}), \quad \Delta\boldsymbol{A} = 0. \tag{3}$$

Pentru aceasta, este suficient să se demonstreze că vectorul

$$\boldsymbol{v} = -\frac{1}{4}(1-\nu)^{-1}\operatorname{grad} B_0, \quad \Delta B_0 = 0, \tag{4}$$

admite reprezentarea

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{C} - \frac{1}{4}(1-\nu)^{-1}\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{C}), \quad \Delta\boldsymbol{C} = 0\,; \tag{5}$$

într-adevăr, introducînd $\boldsymbol{v}$ din (5) în (1) şi notînd $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$, se obține reprezentarea dorită (3).

Dacă relațiile (4) şi (5) sînt adevărate, avem

$$\operatorname{grad} B_0 = -\alpha\boldsymbol{C} + \operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{C}), \tag{6}$$

unde am notat

$$\alpha = 4(1-\nu), \quad 2 < \alpha < 4. \tag{7}$$

Aplicînd în ambii membri din (6) operatorul rot, deducem

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{C} = 0. \tag{8}$$

Dacă vectorul $\boldsymbol{C}$ definit de (5) există, atunci el e armonic, deci analitic, şi urmează că *există* un scalar f aşa fel ca

$$\boldsymbol{C} = \operatorname{grad} f \tag{9}$$

(vezi N. Kocin [1], § 16). Introducînd acum (9) în (6), obținem

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\operatorname{grad} f) - \alpha\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} B_0,$$

sau încă, integrînd

$$\boldsymbol{x}\cdot\operatorname{grad} f - \alpha f = B_0 + c_1, \quad c_1 = \text{const.} \tag{10}$$

Pe de altă parte, aplicînd în (9) operatorul lui Laplace, deducem (utilizînd $\Delta\boldsymbol{C} = 0$) că $\operatorname{grad}\Delta f = 0$, de unde după integrare:

$$\Delta f = c_2, \; c_2 = \text{const.} \tag{11}$$

Deci, *dacă* reprezentarea (5) este realizată, trebuie să existe o soluție *analitică* f a sistemului (10), (11). Reciproc, *dacă* există soluția analitică a acestui sistem, atunci din (4), (10), (11) urmează

$$\boldsymbol{v} = -\frac{1}{4}(1-\nu)^{-1}\operatorname{grad}\boldsymbol{B}_0 = \operatorname{grad}(f - \alpha^{-1}\boldsymbol{x}\cdot\operatorname{grad} f). \tag{12}$$

Atunci, dacă vom *defini* $\boldsymbol{C}$ prin (9) şi vom introduce (9) în (12), vom avea

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{C} - \alpha^{-1} \operatorname{grad} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{C}).$$

Totodată, în virtutea ecuaţiei (11) vom avea şi

$$\operatorname{grad} \Delta f = \Delta \boldsymbol{C} = 0,$$

astfel că reprezentarea (5) este o consecinţă a existenţei soluţiei analitice f a sistemului (10), (11). Problema este astfel redusă la a dovedi că, în condiţiile date, sistemul considerat are soluţie analitică.

Observînd că din (2.6) urmează

$$R_{,j} = x_j/R, \quad \boldsymbol{x} \cdot \operatorname{grad} f = x_j f_{,j} = R f_{,R}, \tag{13}$$

şi incluzînd constanta c_1 în B_0, vom pune (10), (11) sub forma

$$R f_{,R} - \alpha f = B_0, \quad \Delta f = c_2. \tag{14}$$

Întrucît avem evident $(R^{-\alpha} f)_{,R} = - \alpha R^{-\alpha-1} f + R^{-\alpha} f_{,R}$, deducem că prima ecuaţie (14) ia forma

$$(R^{-\alpha} f)_{,R} = R^{-\alpha-1} B_0. \tag{15}$$

Să transcriem în coordonate sferice (2.5) toate funcţiile ce intervin aci. Întrucît B_0 este armonică în $\mathscr{V}$, ea este reprezentabilă prin seria

$$B_0 = \sum_{n=0}^{\infty} R^n Y_n(\theta, \varphi), \tag{16}$$

care converge uniform în orice vecinătate sferică a originii conţinută în $\mathscr{V}$ (vezi § 2, pct. ***d***). Introducînd (16) în (15), vom separa în membrul al doilea termeni ce rămîn mărginiţi, şi termenii ce tind către infinit pentru $R \to 0$. Notînd (*numai* în acest paragraf) cu $[N]$ pe cel mai mare întreg cuprins în N, vom scrie

$$B_0 = B_{01} + B_{02}, \tag{17}$$

unde

$$B_{01} = \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} R^n Y_n, \qquad B_{02} = \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} R^n Y_n, \tag{18}$$

cea de a doua dezvoltare fiind valabilă *numai* într-o vecinătate a originii conţinută în $\mathscr{V}$.

Funcţia B_{01} este suma unui număr finit (de trei sau patru) funcţii armonice. Prin urmare, ea este de asemenea armonică. Din faptul că B_0 este prin ipoteză armonică, rezultă deci că şi B_{02} posedă aceeaşi proprietate în $\mathscr{V}$.

Introducînd (17), (18) în ecuația (15), o vom transcrie acum sub forma

$$(R^{-\alpha} f)_{,R} = \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} R^{n-\alpha-1}\, Y_n + R^{-\alpha-1}\, B_{02}. \tag{19}$$

Pentru a găsi de aci funcția f, este suficient să determinăm o primitivă a acestei expresii în raport cu R; domeniul $\mathscr{V}$ fiind stelat în raport cu originea, orice integrală în raport cu R folosită pentru a găsi o astfel de primitivă are o limită superioară determinată. Pentru a efectua calculele necesare, observăm mai întîi că dezvoltarea în serie (valabilă în vecinătatea originii)

$$R^{-\alpha-1}\, B_{02} = \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} R^{n-\alpha-1}\, Y_n\,(\theta, \varphi) \tag{20}$$

cuprinde numai puteri *pozitive* ale lui R. În virtutea faptului că seria (16) converge *uniform*, de aci rezultă

$$\lim_{R\to 0} R^{-\alpha-1}\, B_{02} = 0, \tag{21}$$

și prin urmare integrala

$$\int_0^R B_{02}\, \rho^{-\alpha-1}\, \mathrm{d}\rho \tag{22}$$

este convergentă, și are o valoare deplin determinată.

Pe de altă parte, calculînd o primitivă pentru suma celor trei sau patru termeni ce apar în B_{01}, avem

$$\int B_{01}\, \rho^{-\alpha-1}\, \mathrm{d}\rho = \int \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} \rho^{n-\alpha-1}\, Y_n\, \mathrm{d}\rho = \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} (n-\alpha)^{-1} R^{n-\alpha}\, Y_n. \tag{23}$$

Din (19), (22) și (23) căpătăm mai întîi valoarea $R^{-\alpha} f$, de unde

$$f = \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} (n-\alpha)^{-1} R^n Y_n + R^\alpha \int_0^R \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} \rho^{-\alpha-1}\, B_{02}\, \mathrm{d}\rho, \tag{24}$$

astfel că funcția f (care verifică (19), și deci și prima ecuație (14)) este determinată, dacă se cunoaște dezvoltarea lui B_0 în serie de funcții sferice.

Relația (24) are sens numai dacă $n \neq \alpha$, de unde deducem că singura valoare interzisă este $\nu = 0{,}25$. Rezultatul coincide cu cel prevăzut de P. Papkovici.

Rămîne de arătat că funcția din (24) verifică și a doua ecuație (14). Întrucît pentru $\nu \neq 0{,}25$ prima sumă din (24) este evident armonică, rămîne de calculat laplasianul expresiei

$$g = R^\alpha \int_0^R B_{02}\, \rho^{-\alpha-1}\, \mathrm{d}\rho. \tag{25}$$

Să punem operatorul lui Laplace din (2.8) sub forma

$$\Delta = \frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \mathfrak{R}\right], \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (26)$$

Din (25) căpătăm mai întîi

$$g_{,R} = \alpha R^{\alpha-1}\int_0^R B_{02}\,\rho^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}\rho + R^\alpha R^{-\alpha-1} B_{02} = R^{-1}(\alpha g + B_{02}),$$

de unde urmează

$$(R^2 g_{,R})_{,R} = (\alpha R g + R B_{02})_{,R} = (\alpha+1)(\alpha g + B_{02}) + R B_{02,R}. \quad (27)$$

Mai departe, întrucît operatorul $\mathfrak{R}$ nu depinde de R, avem şi

$$\mathfrak{R} g = \mathfrak{R}\left(R^\alpha\int_0^R \rho^{-\alpha-1} B_{02}\,\mathrm{d}\rho\right) = R^\alpha\int_0^R \rho^{-\alpha-1}\,\mathfrak{R}B_{02}\,\mathrm{d}\rho. \quad (28)$$

Or, întrucît B_{02} este o funcţie armonică, din (26) deducem

$$\mathfrak{R} B_{02} = -(R^2 B_{02,R})_{,R},$$

astfel că (28) devine

$$\mathfrak{R} g = -R^\alpha\int_0^R \rho^{-\alpha-1}(\rho^2 B_{02,\rho})_{,\rho}\,\mathrm{d}\rho. \quad (29)$$

Integrînd aci prin părţi, avem pe rînd

$$\int_0^R \rho^{-\alpha-1}(\rho^2 B_{02,\rho})_{,\rho}\,\mathrm{d}\rho = \rho^{-\alpha-1}\rho^2 B_{02,\rho}\Big|_0^R - \int_0^R \rho^2 B_{02,\rho}(-\alpha-1)\rho^{-\alpha-2}\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= \rho^{-\alpha+1} B_{02,\rho}\Big|_0^R + (\alpha+1)\int_0^R \rho^{-\alpha} B_{02,\rho}\,\mathrm{d}\rho. \quad (30)$$

Ţinînd seama aci de valoarea B_{02} din (18), obţinem

$$\rho^{-\alpha+1} B_{02,\rho}\Big|_{\rho=0} = \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} n\rho^{n-\alpha} Y_n\Big|_{\rho=0} = 0,$$

astfel că (30) devine

$$\int_0^R \rho^{-\alpha-1}(\rho^2 B_{02,\rho})_{,\rho}\mathrm{d}\rho = R^{-\alpha+1} B_{02,R} + (\alpha+1)\int_0^R \rho^{-\alpha} B_{02,\rho}\,\mathrm{d}\rho. \quad (31)$$

În integrala din membrul al doilea și în suma dinaintea ei, exponenții sînt pozitivi, integrala este deci convergentă, și integrarea prin părți are sens. Integrînd mai departe prin părți în (31), obținem (vezi și (30)) :

$$\int_0^R \rho^{-\alpha} B_{02,\rho}\, d\rho = \rho^{-\alpha} B_{02}\Big|_0^R + \alpha \int_0^R \rho^{-\alpha-1} B_{02}\, d\rho. \tag{32}$$

Integrala din membrul al doilea din (32) apare și în expresia (25) care definește pe g. Din (20) și (21) știm că ea e convergentă, și chiar că

$$\lim_{\rho\to 0} (\rho^{-\alpha} B_{02}) = \lim_{\rho\to 0} \rho(\rho^{-\alpha-1} B_{02}) = 0, \tag{33}$$

astfel că (32) se reduce la

$$\int_0^R \rho^{-\alpha} B_{02,\rho}\, d\rho = R^{-\alpha} B_{02} + \alpha \int_0^R \rho^{-\alpha-1} B_{02}\, d\rho. \tag{34}$$

Putem introduce acum (34) în (31), și rezultatul astfel obținut, în (29). Ținînd din nou seama de (18) și (25), căpătăm

$$\Re g = - R^{\alpha}\left\{ \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} n R^{n-\alpha} Y_n + (\alpha+1) R^{-\alpha} B_{02} + \alpha(\alpha+1) \int_0^R \rho^{-\alpha-1} B_{02}\, d\rho \right\},$$

de unde

$$\Re g = -\{R B_{02,R} + (\alpha+1) B_{02} + \alpha(\alpha+1) g\}, \tag{35}$$

așadar o cantitate egală și de semn contrar cu cea din (27). Introducînd acum (27) și (35) în (26), deducem mai întîi că $R^2 \Delta g = 0$. Dar ținînd seama de expresiile (18) și (25) în (27) și (35), precum și de faptul că $\alpha > 2$, rezultă că putem împărți peste tot la R^2, astfel că găsim

$$\Delta g = 0 . \tag{36}$$

Amintind încă structura expresiei (24), avem în definitiv

$$\Delta f = 0 , \tag{37}$$

și deci funcția f, soluție (analitică) a celei dintîi dintre ecuațiile (14), o satisface și pe cea de a doua (pentru $c_2 = 0$).

Cu aceasta, este demonstrată posibilitatea reprezentării (3) prin intermediul a numai *trei* potențiali armonici.

Cazul de excepție $\nu = 0{,}25$ nu derivă din tehnica demonstrației, ci din natura problemei. Într-adevăr, Eubanks și Sternberg dau un contra-exemplu, din care urmează că pentru $\nu = 0{,}25$ și $B_0 = R^3 Y_3$, soluția sistemului (14) *nu este* analitică în origine.

Menționăm încă faptul că pentru $\mathscr{V}$ *convex*, se demonstrează (loc. cit.) că se poate renunța la oricare din componentele lui $\boldsymbol{B}$ (independent de valoarea lui ν).

Aceste rezultate au fost ulterior reluate de P. Naghdi şi C. Hsu [1], care au demonstrat că pentru orice domeniu $\mathscr{V}$ regulat în sensul lui O. Kellog ([1], § 4.8), eventual chiar multiplu conex, şi pentru orice valoare $\nu \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$, avem reprezentarea

$$u = B - \frac{1}{2}(1-\nu)^{-1} b,$$
$$\Delta B = -\mu^{-1} F, \quad b = -(1/4\pi)\,\mathrm{grad} \iiint_{\mathscr{V}} R^{-1} \,\mathrm{div}\, B \,\mathrm{d}V, \tag{38}$$

aşadar o reprezentare prin intermediul a *trei* funcţii. O modificare a acestei formule rămîne valabilă şi pentru $\nu = \frac{1}{2}$. Rezultatul lui Naghdi şi Hsu este mai general, şi cuprinde şi cazul $F \neq 0$. Dar el face uz de descompunerea lui Stokes $u = v + w$, cu div $v = 0$, $w = \mathrm{grad}\, \varphi$, iar raţionamentele, deşi mai scurte, sînt mai puţin directe decît cele ale lui Eubanks şi Sternberg.

OBSERVAŢIE. Toate acestea nu trebuie să dea impresia că ar fi bine să se caute soluţia prin intermediul a *trei* potenţiali. Dimpotrivă, încă P. Papkovici [3] a sugerat, şi A. Lurie (vezi mai departe §§ 8.3; 8.4; 9.4) a utilizat cu succes ideea de a se păstra pentru început în raţionamente toate cele *patru* funcţii ale lui Grodskii, folosindu-se faptul că ele nu sînt independente abia în momentul în care aceasta duce la simplificări esenţiale.

§ 6. PROPRIETĂŢI DE RECIPROCITATE ALE OPERATORULUI LUI LAMÉ

Să reluăm sistemul complet de ecuaţii pentru corpuri eventual anizotrope şi ne-omogene (vezi § 4.1) sub forma

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}, \tag{3}$$

şi să amintim forma (4.8.3) a ecuaţiilor lui Lamé

$$\mathfrak{A} u = F, \tag{4}$$

unde operatorul lui Lamé $\mathfrak{A}$ are expresia, echivalentă cu (4.8.4),

$$[c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(u)]_{,j} i_i + F = 0. \tag{5}$$

Comparînd (4) cu (2.33), vom pune în evidenţă un anumit paralelism între operatorii $\mathfrak{A}$ şi $-\Delta$.

Să începem prin a stabili analogul formulelor lui Green (2.10) — (2.12). În acest scop, să considerăm doi vectori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in C^2(\mathscr{V})$, unde $\mathscr{V}$ este *mărginit*, și să calculăm valoarea integralei [4])

$$< \boldsymbol{v}, \mathfrak{A} \boldsymbol{u} > = \iiint_{\mathscr{V}} \boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{A} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d} V . \tag{6}$$

Pentru produsul scalar $\boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{A} \boldsymbol{u}$ avem imediat din (4), (5):

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{A} \boldsymbol{u} = - v_i \left[c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk} (\boldsymbol{u}) \right]_{,j} , \tag{7}$$

de unde, integrînd cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradskii (2.9):

$$< \boldsymbol{v}, \mathfrak{A} \boldsymbol{u} > = - \iint_{\mathscr{S}} v_i c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk} (\boldsymbol{u}) n_j \, \mathrm{d} S + \iiint_{\mathscr{V}} c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk} (\boldsymbol{u}) v_{i,j} \, \mathrm{d} V . \tag{8}$$

Or, din (1.5.6) avem evident

$$v_{i,j} = \varepsilon_{ij} (\boldsymbol{v}) + \omega_{ij} (\boldsymbol{v}) . \tag{9}$$

Ținînd seama de (3) și (2.3.3), integrandul din integrala de suprafață din (8) se scrie sub forma

$$v_i c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk} (\boldsymbol{u}) n_j = v_i \sigma_{ij} (\boldsymbol{u}) n_j = v_i \sigma_{ni} (\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n (\boldsymbol{u}) , \tag{10}$$

unde $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})$ este dat de (1.9). În integrala de volum din membrul al doilea din (8), ținînd seama de (9), de proprietățile de simetrie ale coeficienților c_{ij}^{hk}, și de faptul că matricea ω_{ij} este antisimetrică, obținem

$$c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(\boldsymbol{u}) v_{i,j} = c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) . \tag{11}$$

În virtutea legii lui Hooke (3) și a proprietăților de simetrie ale coeficienților c_{ij}^{hk}, această formă biliniară poate fi scrisă în două variante:

$$c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk} (\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} \sigma_{ij} (\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij} (\boldsymbol{v}) , \\ \sigma_{hk} (\boldsymbol{v}) \varepsilon_{hk} (\boldsymbol{u}) . \end{cases} \tag{12}$$

Ambele forme amintesc de expresia (3.7.11) a energiei de deformație ($2 \Phi = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$), dar se deosebesc de ea prin faptul că aci apar produse contractate de tensori ce corespund la vectori deplasare *diferiți*. Vom nota de aceea

$$2 \Phi (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sigma_{ij} (\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) . \tag{13}$$

Această formă se numește ***energia unitară a tensiunilor stării u, acționînd în cîmpul deformațiilor stării v.*** Această cantitate are dimensiu-

---

[4]) Este limpede că acesta este un *produs scalar în sensul teoriei spațiilor Hilbert*. Mai mult, în spațiul asociat de K. Friedrichs problemei (4), acesta este pur și simplu produsul scalar $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$. Vezi de exemplu S. Mihlin [4], §§ 4.26 și 6.46.

nile energiei (sau lucrului mecanic), dar e alcătuită, hibrid, din date relative la *două* stări elastice distincte ale aceluiaşi corp. În particular, (3.7.11) se va scrie acum $2\,\Phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$. Relaţia (12) arată că *forma biliniară* Φ *este simetrică*:

$$\Phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \,. \tag{14}$$

Forma Φ, ca şi relaţia (14), au fost considerate de E. Betti [2]. Rezultate mai generale, dar de acelaşi tip, aparţin lui I. Fredholm [1].

Ţinînd acum seama în (8) de rezultatele din (10)–(12) şi de notaţia (13), obţinem *prima formulă a lui Betti*:

$$< \boldsymbol{v}, \mathfrak{A}\boldsymbol{u} > = 2 \iiint\limits_{\mathscr{V}} \Phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V - \iint\limits_{\mathscr{S}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S, \tag{15}$$

analogă cu prima formulă a lui Green (2.1): operatorul $-\Delta$ este înlocuit cu $\mathfrak{A}$, forma biliniară şi simetrică (grad $u \cdot$ grad v) este înlocuită cu $2\,\Phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, iar derivata normală $u_{,n}$ — cu vectorul tensiune $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})$.

Mai departe, luînd $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ în (15), obţinem *a doua formulă a lui Betti*, analogă cu (2.11):

$$< \boldsymbol{u}, \mathfrak{A}\boldsymbol{u} > = 2 \iiint\limits_{\mathscr{V}} \Phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V - \iint\limits_{\mathscr{S}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S \,. \tag{16}$$

În fine, intervertind $\boldsymbol{u}$ cu $\boldsymbol{v}$ în (15) şi scăzînd termen cu termen relaţia astfel obţinută din relaţia (15), deducem, în virtutea relaţiei (14), cea de *a treia formulă a lui Betti*, analogă cu (2.12):

$$< \boldsymbol{u}, \mathfrak{A}\boldsymbol{v} > - < \boldsymbol{v}, \mathfrak{A}\boldsymbol{u} > = \iint\limits_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v})]\,\mathrm{d}S \,. \tag{17}$$

OBSERVAŢIA 1. Ca şi formulele lui Green, formulele lui Betti nu sînt legate de proprietăţile domeniului $\mathscr{V}$ (în afară de cele pretinse de aplicarea teoremei Gauss-Ostrogradskii), nici de cele ale vectorilor $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ (în afară de apartenenţa lor la clasa C^2). Ele informează doar asupra unor proprietăţi ale *operatorului lui Lamé*, permiţînd trecerea ulterioară la studiul proprietăţilor soluţiilor *ecuaţiilor lui Lamé*.

Totuşi, notăm aci un rezultat foarte sugestiv, datorat lui C. Truesdell [8]: dacă formulele lui Betti sînt *identic* valabile pentru *orice* pereche de deplasări infinitezimale $\boldsymbol{u}$ şi $\boldsymbol{v}$ într-un corp, atunci acest corp este hiperelastic.

Formule similare apar în studiul mişcării fluidelor viscoase (vezi C. Iacob [5], § 4.46).

OBSERVAŢIA 2. Formulele lui Betti rămîn valabile pentru domenii *nemărginite*, dacă $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ satisfac la infinit condiţii de regularitate analoge cu (2.13):

$$\lim_{R \to \infty} R\,|\boldsymbol{u}| \leqslant C\,, \qquad \lim_{R \to \infty} R^2\,|\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})| \leqslant C\,. \tag{18}$$

Pentru detalii, vezi M. Gurtin şi E. Sternberg [2]. În particular, se vede uşor că dacă funcţiile lui Grodskii sînt regulate la infinit în sensul din (2.13), atunci vectorul deplasare corespunzător este regulat în sensul din (18).

§ 7. TEOREMELE LUI BETTI

Să presupunem acum că $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ sînt *soluții* diferite ale anumitor ecuații Lamé, corespunzînd unor forțe de volum $\boldsymbol{F}_{(u)}, \boldsymbol{F}_{(v)}$, unor forțe superficiale $\boldsymbol{f}_{(u)}$, $\boldsymbol{f}_{(v)}$ — dar *aceluiași* domeniu $\mathscr{V}$ și *acelorași* constante elastice. Vom scrie deci

$$\mathfrak{A}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_{(u)}\,, \quad \mathfrak{A}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}_{(v)}\,. \tag{1}$$

Proprietățile *operatorului* $\mathfrak{A}$ puse în evidență în § 6, conduc la proprietăți ale *stărilor elastice* corespunzătoare vectorilor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Obținem pe rînd :

a) **Teorema lui Betti (forma locală)** : energia potențială (unitară) de deformație corespunzătoare tensiunilor stării $\boldsymbol{u}$ acționînd în cîmpul deformațiilor stării $\boldsymbol{v}$, este egală cu energia corespunzătoare tensiunilor stării $\boldsymbol{v}$ acționînd în cîmpul deformațiilor stării $\boldsymbol{u}$.

Teorema exprimă pur și simplu conținutul relației de simetrie (6.14).

b) **Teorema lucrului forțelor exterioare** : lucrul mecanic formal total al forțelor exterioare ale stării $\boldsymbol{u}$ acționînd în cîmpul deplasărilor stării $\boldsymbol{v}$, este egal cu dublul energiei potențiale totale formal acumulate.

Pentru a explica acest enunț, să considerăm valorile

$$\mathfrak{A}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_{(u)}\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{f}_{(u)}\,. \tag{2}$$

Introducînd (2) în (6.15) și ținînd seama de (6.6), obținem :

$$\iiint_{\mathscr{V}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}_{(u)}\,\mathrm{d}V + \iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}_{(u)}\,\mathrm{d}S = 2\iiint_{\mathscr{V}} \Phi\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V\,. \tag{3}$$

În membrul al doilea apare energia potențială totală (adică integrată pe $\mathscr{V}$), *formal* definită cu ajutorul relației (6.13). În primul membru din (3) apare un hibrid de același tip, și anume un lucru mecanic total formal, care se va nota

$$\mathfrak{L}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \iiint_{\mathscr{V}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}_{(u)}\,\mathrm{d}V + \iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}_{(u)}\,\mathrm{d}S\,. \tag{4}$$

Relația (3), transcrisă cu ajutorul lui (4), dă tocmai enunțul teoremei.

c) **Teorema lui Betti (forma globală)** : lucrul mecanic formal total al forțelor exterioare ale stării $\boldsymbol{u}$ acționînd în cîmpul deplasărilor stării $\boldsymbol{v}$, este egal cu lucrul mecanic formal total al forțelor exterioare ale stării $\boldsymbol{v}$, acționînd în cîmpul deplasărilor stării $\boldsymbol{u}$.

Într-adevăr, din (6.14), (3) și (4) urmează imediat

$$\mathfrak{L}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\,. \tag{5}$$

d) **Teorema lui Clapeyron** : lucrul mecanic total al forțelor exterioare acționînd în cîmpul deplasărilor *static* corespunzătoare lor, este egal cu dublul energiei potențiale *real* acumulate în corpul elastic.

Aceasta se deduce imediat dacă luăm $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ în (3), (4) :

$$\mathfrak{L}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 2\iiint_{\mathscr{V}} \Phi\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V\,. \tag{6}$$

În expresia lucrului mecanic $\mathfrak{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ (vezi (4)), deplasările $\boldsymbol{u}$ sînt cele ce corespund forțelor $\boldsymbol{F}_{(u)}$ și $\boldsymbol{f}_{(u)}$ prin intermediul ecuațiilor echilibrului elastic. Apariția factorului 2 în (6) se explică prin aceea că forma (6.13) pentru $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ a fost obținută prin integrarea formei diferențiale $\delta\Phi = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}$ din (3.6.6), așadar ținînd implicit seama de creșterea deformației de la zero la valoarea sa finală, în cadrul ipotezei dependenței liniare între tensiuni și deformații. Dimpotrivă, lucrul mecanic $\mathfrak{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ se obține înmulțind scalar forțele $\boldsymbol{F}_{(u)}$ și $\boldsymbol{f}_{(u)}$ cu deplasările $\boldsymbol{u}$ ce le corespund *static* — așadar la *finele* procesului de deformație — în timp ce lucrul mecanic *realmente* cheltuit de forțele exterioare ar trebui calculat prin înmulțirea acestor forțe cu valori $\boldsymbol{u}$ ale deplasării ce *cresc în timp* de la zero la valorile lor finale, și prin integrarea în raport cu timpul a cantității astfel deduse.

Acest raționament subliniază caracterul *formal* al mărimii $\mathfrak{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$, spre deosebire de cel *real* al mărimii $\iiint_{\mathcal{V}} \Phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V$. Dacă am presupune că deplasarea crește în primă aproximație ca funcție *liniară* de timp de la 0 la $\boldsymbol{u}$, va rezulta și intuitiv că lucrul mecanic real al forțelor exterioare trebuie să fie egal cu $\frac{1}{2}\mathfrak{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$.

Sub forma lor inițială, aceste teoreme aparțin lui E. Betti [1], [2]. Teorema lui Clapeyron — extrem de importantă în practică — este încă mai veche. (Asupra ei, vezi observațiile lui A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], nota la pag. 871 și 872.)

Toate aceste teoreme pot fi extinse la domenii $\mathcal{V}$ nemărginite, cu respectarea condițiilor de regularitate. În mod evident, *ele sînt independente de proprietățile de omogenitate sau izotropie*, dar depind esențial de caracterul liniar al relațiilor cu care operăm. Astfel, ele au putut fi generalizate în elasto-dinamică, în visco-elasticitate, în termo-elasticitate etc. (Vezi de ex. D. Graffi [1]; V. Ionescu-Cazimir [1].)

§ 8. METODA SURSELOR. SOLUȚIA FUNDAMENTALĂ A ECUAȚIILOR LUI LAMÉ

Pentru a construi un analog al formulei integrale fundamentale (2.18), este necesară o soluție care să joace în teoria ecuațiilor lui Lamé, rolul soluției $1/4\pi R$ din teoria ecuației lui Poisson. Astfel de soluții au putut fi găsite pînă acum numai în două cazuri : pentru corpurile omogene și izotrope, și pentru cristalele sistemului exagonal (cu 5 constante elastice). Pentru cristalele din alte sisteme, se folosesc mijloace aproximative, reprezentîndu-se soluția fundamentală prin serii. (Vezi de ex. E. Kröner [1], [3]; A. Seeger [1], § 53.)

Teoria soluțiilor fundamentale și toate problemele ce derivă de aci sînt amănunțit studiate de C. Miranda [1]. În cazul ecuațiilor cu coeficienți constanți, problema este abordabilă sub o formă simplă și generală cu ajutorul teoriei distribuțiilor (vezi I. Ghelfand și G. Șilov [1], vol. 1, § 3.2).

Ne vom limita în cele ce urmează la cazul corpurilor *izotrope și omogene.*

Căutarea de soluții singulare va fi pusă în legătură cu interpretarea lor ca descriind unele acțiuni mecanice concentrate. Acesta este punctul de pornire al *metodei surselor*, împrumutate din hidrodinamică. Tehnica de lucru e similară celei amintite: punctul singular este izolat cu ajutorul unei suprafețe închise, și se studiază apoi din punct de vedere mecanic comportarea acestei suprafețe și a domeniului mărginit de ea, atunci cînd diametrul său tinde la zero. Ca și în hidrodinamică — unde se evaluează fluxul de fluid ce traversează suprafața care conține în interior punctul singular — în teoria elasticității sîntem conduși la a determina torsorul tensiunilor pe această suprafață, și valoarea sa limită, cînd suprafața *se reduce la un punct.*

a) *Cîmpul deplasărilor singulare*

Să presupunem deci spațiul $\mathcal{E}_3$, ocupat de un material elastic *omogen și izotrop*. Forțele de volum sînt nule. Nu există condiții la limită, ci numai condiții de regularitate (6.18). În virtutea teoremei de unicitate, orice soluții ne-identic nule, regulate la infinit, și corespunzînd la forțe de volum nule, *trebuie să posede puncte singulare.*

Vom căuta — pe linia metodei inverse — o soluție care să aibă în origine o singularitate de cea mai simplă natură, și care înafara originii să fie regulată, așadar reprezentabilă sub forma (4.14), (4.15). Întrucît $\boldsymbol{F} = 0$, avem

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} - \frac{1}{4}(1-\nu)^{-1} \text{ grad } (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B} + B_0), \tag{1}$$

unde funcțiile $\boldsymbol{B}$, B_0 sînt armonice în $\mathcal{E}_3$ (cu excepția originii), și regulate la infinit. Să luăm $B_0 = 0$, și să căutăm vectorul $\boldsymbol{B}$ sub forma

$$\boldsymbol{B} = \underset{\sim}{Q}\, \varphi, \tag{2}$$

unde $\underset{\sim}{Q}$ este un vector constant, iar φ este un scalar armonic. Pentru φ, vom alege soluția fundamentală a ecuației lui Laplace (care posedă în origine și la infinit proprietățile cerute), înmulțită cu un factor de normare A necunoscut

$$\varphi = A/R. \tag{3}$$

Cu aceasta, soluția prezumată a problemei ia forma

$$\boldsymbol{u} = A\left[\boldsymbol{Q}/R - \frac{1}{4}(1-\nu)^{-1} \text{ grad } (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}/R)\right], \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{4}$$

În cele ce urmează, vom face de repetate ori uz de diferite relații simple de analiză vectorială (vezi de ex. N. Kocin [1], § 12; V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 105 și 112). Ținînd seama că

$$\text{grad } (f\,g) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f, \tag{5}$$

deducem imediat

$$\operatorname{grad}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}/R) = R^{-1}\operatorname{grad}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}) + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\operatorname{grad}\,R^{-1}; \tag{6}$$

întrucît $\boldsymbol{Q}$ este un vector constant, avem mai întîi

$$\operatorname{grad}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{i}_j(x_i Q_i)_{,j} = \boldsymbol{Q}, \tag{7}$$

și pe de altă parte

$$\operatorname{grad}\,R^{-1} = -R^{-2}\operatorname{grad}\,R = -R^{-3}\boldsymbol{x}; \tag{8}$$

de aci urmează

$$\operatorname{grad}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}/R) = \boldsymbol{Q}/R - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x}/R^3. \tag{9}$$

Prin urmare, formula (4) se mai scrie și

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{4}(1-\nu)^{-1}A\,[(3-4\nu)\,\boldsymbol{Q}/R + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x}/R^3]. \tag{10}$$

Acesta va fi cel mai simplu cîmp de deplasări, cu o singularitate în origine, și regulat înafara originii (inclusiv la infinit). Pentru a determina cîmpul vectorilor tensiune corespunzători, vom aminti aci formula (1.9):

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) = 2\mu\left[\nu(1-2\nu)^{-1}\boldsymbol{n}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\times\operatorname{rot}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_{,n}\right]. \tag{11}$$

Aceasta arată că avem de calculat expresiile div $\boldsymbol{u}$, rot $\boldsymbol{u}$, și $\boldsymbol{u}_{,n}$ pentru vectorul $\boldsymbol{u}$ din (4) sau (10), construit cu ajutorul vectorilor $\boldsymbol{Q}/R$ și $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}/R^3$.

Amintind că avem

$$\operatorname{div}\,(f\boldsymbol{v}) = f\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} f, \tag{12}$$

și ținînd seama de (8) și de faptul că $\boldsymbol{Q}$ este constant, urmează

$$\operatorname{div}\,(\boldsymbol{Q}/R) = -\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}/R^3. \tag{13}$$

Utilizînd (12), (7) și (8), și faptul că $\Delta R^{-1} = 0$ pentru $R \neq 0$, deducem

$$\operatorname{div}\,[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x}/R^3] = -\operatorname{div}\,[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\operatorname{grad}\,R^{-1}] = -$$

$$-(\operatorname{grad}\,R^{-1})\cdot\operatorname{grad}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}) = -\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}/R^3. \tag{14}$$

Făcînd uz acum de (10), (13) și (14), deducem

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2}(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}A\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})/R^3. \tag{15}$$

Calculul cantității rot $\boldsymbol{u}$ este mai simplu. Pentru a o găsi, vom folosi expresia (4) a deplasării, și vom ține seama că

$$\text{rot grad } f = 0, \quad \text{rot}(f\,\boldsymbol{v}) = f \text{ rot } \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \text{grad } f. \tag{16}$$

Cu aceasta, căpătăm mai întîi

$$\text{rot } \boldsymbol{u} = A \text{ rot } (\boldsymbol{Q}/R) \tag{17}$$

și apoi, utilizînd (8), (16) și faptul că $\boldsymbol{Q}$ este constant :

$$\text{rot } \boldsymbol{u} = A\,(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{x})/R^3. \tag{18}$$

Mai rămîne de calculat $\boldsymbol{u}_{,n}$, pentru care vom face uz de formula

$$(f\,\boldsymbol{v})_{,n} = f_{,n}\,\boldsymbol{v} + f\,\boldsymbol{v}_{,n}. \tag{19}$$

Dat fiind că $\boldsymbol{Q}$ este constant, avem mai întîi

$$(\boldsymbol{Q}/R)_{,n} = \boldsymbol{Q}\,(R^{-1})_{,n} = -\,\boldsymbol{Q}R^{-2}\,R_{,n}, \tag{20}$$

unde

$$R_{,n} = n_j\,R_{,j} = n_j\,x_j/R = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}/R, \tag{21}$$

astfel că

$$(\boldsymbol{Q}/R)_{,n} = -\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{Q}/R^3. \tag{22}$$

Pe de altă parte, trebuie să calculăm derivata

$$[\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})/R^3]_{,n} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}/R^3)\,\boldsymbol{x}_{,n} + \boldsymbol{x}\,[\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}/R^3]_{,n}. \tag{23}$$

Or, utilizînd și (21), avem pe rînd :

$$\boldsymbol{x}_{,n} = n_j\,(\boldsymbol{i}_l\,x_l)_{,j} = n_j\,\delta_{jl}\,\boldsymbol{i}_l = \boldsymbol{n}\,; \tag{24}$$

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q}/R^3)_{,n} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\,(R^{-3})_{,n} + R^{-3}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})_{,n}\,; \tag{25}$$

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})_{,n} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}_{,n} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{Q}\,; \tag{26}$$

$$(R^{-3})_{,n} = -\,3\,R^{-4}\,R_{,n} = -\,3\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})/R^5. \tag{27}$$

Cu aceasta, (23) devine

$$[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x}/R^3]_{,n} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{n}/R^3 + \boldsymbol{x}\,[-\,3\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{Q})\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})/R^5 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{Q})/R^3]. \tag{28}$$

Ținînd seama de (10), (22) și (28), deducem deci

$$\boldsymbol{u}_{,n} = \frac{A}{4\,(1-\nu)}\Bigg[-\,(3-4\nu)\,\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}}{R^3}\,\boldsymbol{Q} + \frac{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}}{R^3}\,\boldsymbol{n} + \frac{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{n}}{R^3}\,\boldsymbol{x} - 3\,\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x})}{R^5}\,\boldsymbol{x}\Bigg]. \tag{29}$$

Pentru a putea face uz de (11), ne mai rămîne să calculăm

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\times \text{rot }\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(A/R^3)\,[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{x})] =$$

$$= \frac{1}{2}(A/R^3)\,[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{Q} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x}]. \tag{30}$$

Introducînd acum (15), (29) şi (30) în (11), obţinem relaţia finală:

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) = -\frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{A}{R^3}\Big[-(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{Q} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x} + $$

$$+ \frac{3}{1-2\nu}\frac{1}{R^2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}\Big]. \tag{31}$$

Acesta este cîmpul vectorilor tensiune corespunzător cîmpului deplasărilor din (10). Condiţia de regularitate la infinit este vizibil respectată.

b) Soluţia fundamentală

Să trasăm acum o suprafaţă închisă $\mathscr{S}$ *care nu conţine originea* în interior. Întrucît (10) este aci o soluţie regulată, torsorul tensiunilor ce acţionează pe $\mathscr{S}$ trebuie să fie egal şi de semn opus cu cel al forţelor de volum acţionînd în domeniul mărginit de $\mathscr{S}$ — aşadar egal cu zero. Argumentul îşi pierde valabilitatea dacă $\mathscr{S}$ conţine în interior originea.

În acest ultim caz, este vizibil că torsorul tensiunilor pe o suprafaţă $\mathscr{S}$ nu depinde de forma acesteia. Într-adevăr, să considerăm două suprafeţe $\mathscr{S}'$ şi $\mathscr{S}''$ fără puncte multiple, şi dintre care a doua este conţinută în interiorul celei dintîi. Torsorul tensiunilor ce iau naştere pe frontiera domeniului definit de $\mathscr{S}'$, $\mathscr{S}''$ este evident nul, astfel că

$$\iint_{\mathscr{S}'}\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S - \iint_{\mathscr{S}''}\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S = 0,\qquad \iint_{\mathscr{S}'}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S - \iint_{\mathscr{S}''}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S = 0, \tag{32}$$

întrucît aci normala exterioară coincide cu normala exterioară la $\mathscr{S}'$, şi cu cea interioară la $\mathscr{S}''$, iar forţele de volum sînt nule. Raţionamentul poate fi uşor extins la suprafeţe care se intersectează, la suprafeţe cu puncte multiple etc. Aşadar, rezultanta şi momentul rezultant al tensiunilor considerate nu depinde de forma lui $\mathscr{S}$, şi este cel mai uşor să le calculăm pe o *sferă* $S(0, R)$.

Întrucît pe sferă avem $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/R$, formula (31) poate fi mult simplificată. Făcînd înlocuirea $\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{n}$, obţinem

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) = -\frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{A}{R^2}\Big[\boldsymbol{Q} + \frac{3}{1-2\nu}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}\Big]\quad \text{pe } S(0, R). \tag{33}$$

Rezultanta tensiunilor (33) pe această sferă este

$$\mathcal{R} = \iint_S \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\, dS = \iint_S \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\, R^2\, dS_1 = R^2 \iint_S \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\, dS_1, \tag{34}$$

unde am notat cu dS_1 elementul de arie pe sfera unitate S_1 cu centrul în origine. Întrucît avem $R = \text{const.}$, obținem

$$\mathcal{R} = -\frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)} A \iint_{S_1} \left[\boldsymbol{Q} + \frac{3}{1-2\nu} (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{n})\, \boldsymbol{n}\right] dS_1. \tag{35}$$

După cum se vede, tocmai faptul că $\boldsymbol{\sigma}_n$ tinde spre infinit ca $1/R^2$ pentru $R \to 0$, dă integralei $\mathcal{R}$ o valoare finită și independentă de R. De aceea integrala din (35) poate fi calculată pe sfera S_1, și nu pe S.

Prima integrală din (35) se obține ușor sub forma

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{Q}\, dS_1 = \boldsymbol{Q} \iint_{S_1} dS_1 = 4\pi \boldsymbol{Q}. \tag{36}$$

Pentru a o găsi pe cea de a doua, să observăm că pe sfera S_1 avem $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}$, și deci integrandul corespunzător este un vector de lungime $(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x})$, dirijat după normala $\boldsymbol{n}$. Scriind formula lui Gauss-Ostrogradskii (2.9) sub forma

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{grad} f\, dV = \iint_{\mathcal{S}} f\, \boldsymbol{n}\, dS, \tag{37}$$

ceea ce se verifică ușor dacă separăm cele trei componente din (37), deducem din (37) și (7):

$$\iint_{S_1} (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{n})\, \boldsymbol{n}\, dS_1 = \iiint_{B_1} \operatorname{grad}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x})\, dV = \iiint_{B_1} \boldsymbol{Q}\, dV = \frac{4}{3}\pi \boldsymbol{Q}, \tag{38}$$

unde B_1 este bula de frontieră S_1, al cărei volum este desigur $\frac{4}{3}\pi$.

Introducînd acum (36) și (38) în (35), obținem

$$\mathcal{R} = -4\pi\mu A \boldsymbol{Q}, \tag{39}$$

ceea ce dă rezultanta tensiunilor pe *orice* suprafață închisă care conține originea în interior.

Momentul rezultant al tensiunilor (33) față de origine este

$$\mathcal{M} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\, dS = -\frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)} A\, R \iint_{S_1} \boldsymbol{n} \times \left[\boldsymbol{Q} + \frac{3}{1-2\nu} (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{n})\, \boldsymbol{n}\right] dS_1 \tag{40}$$

unde, ca şi în (35), am ţinut seama că R = const. şi că integrăm pe S_1 Al doilea termen din integrandul din (40) este nul, iar pentru cel dintîi deducem pe S_1:

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}S_1 = -\boldsymbol{Q}\times\iint_{S_1}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}S_1 = 0. \tag{41}$$

Prin urmare, momentul rezultant (în raport cu originea) al tensiunilor pe *orice* suprafaţă care conţine originea în interior, este nul.

Domeniul mărginit de o suprafaţă $\mathcal{S}$ care conţine în interior originea va fi în echilibru dacă şi numai dacă în interiorul său, *oricît de mici ar fi dimensiunile lui*, acţionează forţe al căror moment rezultant faţă de origine este nul, şi a căror rezultantă este egală cu $-\mathcal{R} = 4\pi\mu A\boldsymbol{Q}$. Prin urmare, starea descrisă de (10) este realizată dacă considerăm spaţiul elastic nemărginit, solicitat *în origine* de o *forţă concentrată* $4\pi\mu A\boldsymbol{Q}$, care face echilibru tensiunilor ce apar pe orice suprafaţă care conţine în interior originea.

Prin „*forţă concentrată*" se înţelege tocmai acţiunea mecanică definită prin acest proces de trecere la limită. Din punct de vedere practic, avem de-a face cu un sistem de tensiuni foarte mari, repartizate pe un domeniu de dimensiuni foarte mici, avînd momentul rezultant faţă de origine nul, iar rezultanta finită şi diferită de zero. (Compară cu § 2.1, pag. 65. Vezi şi mai jos, Observaţia 3.)

Putem dispune în sfîrşit de constanta încă nedeterminată A. Soluţia obţinută va corespunde acţiunii unei forţe concentrate $\boldsymbol{Q}$, dacă avem

$$A = 1/4\pi\mu. \tag{42}$$

Aşadar, pe calea unei metode inverse am obţinut soluţia ecuaţiilor lui Lamé omogene pentru o forţă concentrată $\boldsymbol{Q}$ în origine, sub forma

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{16\,\pi\mu\,(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\,\frac{\boldsymbol{Q}}{R} + \frac{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}}{R^3}\,\boldsymbol{x}\right]. \tag{43}$$

Vectorul (43) este *soluţia fundamentală a ecuaţiilor lui Lamé* şi constituie analogul funcţiei $1/4\pi R$ din teoria ecuaţiei lui Poisson. Rolul constantei (42) este analog celui al factorului $1/4\pi$ din teoria acestei din urmă ecuaţii.

Cîmpul vectorilor tensiune (31) se scrie acum sub forma definitivă

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) = -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\,\frac{1}{R^3}\Big[&-(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{Q} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x} + \\ &+ \frac{3}{1-2\nu}\,\frac{1}{R^2}\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}\Big].\end{aligned} \tag{44}$$

O soluţie de tipul (43) a fost dată de lord Kelvin [1] (retipărit în [4], vol. 1). Ea a fost regăsită şi utilizată de C. Somigliana [1] (vezi şi [3]). Asupra semnificaţiei sale au revenit E. şi F. Cosserat [2], [3]. Vom numi această soluţie — sau unele variante ale ei — *soluţia lui Kelvin şi Somigliana.*

OBSERVAŢIA 1. O soluţie de acelaşi tip apare în studiul fluidelor viscoase. Rezultatele relative la ea sînt deci legate de rezultatele corespunzătoare de hidrodinamică. (Vezi de ex. C. Iacob [5], § 4.47.)

OBSERVAŢIA 2. Dacă am calcula rezultanta tensiunilor (33) pe o *semi-sferă* cu centrul în origine, am obţine — datorită simetriei — valoarea $\mathcal{R} = -2\pi\mu A'\boldsymbol{Q}$, de unde, raţionînd la fel ca mai sus:

$$A' = 1/2\pi\mu. \tag{45}$$

Nu se poate însă afirma nimic despre momentul rezultant — afară de cazul unei sarcini *normale* pe planul-frontieră. (Vezi şi mai jos § 9.4, pag. 594).

OBSERVAŢIA 3. Raţionamentele de mai sus sînt bazate pe un *anumit* proces de trecere la limită, analog celui considerat în plan în § 6.16, exemplul *d*. Observaţiile făcute acolo (pag. 455) rămîn valabile. Pot fi imaginate şi procese de trecere la limită mai complicate, pentru sarcini mai puţin particulare, sau în care bula să fie înlocuită cu alt tip de domeniu.

c) *Utilizarea funcţiei lui Dirac*

Toate cele de mai sus sînt în fond strîns legate de unele noţiuni de bază din teoria distribuţiilor. În fapt, soluţia (43) poate fi reobţinută cu ajutorul funcţiei δ, ceea ce a fost realizat de către N. Şandru [2] (vezi şi I. Ghelfand şi G. Şilov [1], vol. 1, § 1.2, pct. 3, şi § 1.4, pct. 4).

Pentru aceasta, să rezolvăm ecuaţiile lui Lamé (1.1) în spaţiul elastic $\mathcal{E}_3$, supus acţiunii forţei concentrate $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}\,\delta(\boldsymbol{x})$ aplicate în origine (vezi 2.1.4)). Pentru a găsi funcţiile lui Grodskii, trebuie să rezolvăm ecuaţiile (4.15), fără nici o condiţie la limită. Observînd că (A.2.15) rămîne valabilă în $\mathcal{E}_3$, ecuaţiile (4.15) devin

$$\Delta \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{Q}/\mu)\,\delta(\boldsymbol{x}), \qquad \Delta B_0 = 0. \tag{46}$$

Ţinînd seama de (2.15) pentru $\boldsymbol{\xi} = 0$, urmează imediat

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{Q}/4\pi\mu)\,R^{-1}, \qquad B_0 = 0, \tag{47}$$

ceea ce este exact soluţia care rezultă din (2), (3) şi (42).

Demonstraţia este incomparabil mai simplă, dar mai puţin elementară. Mai mult: calculele care duc la expresia (31) rămîn întotdeauna necesare pentru a ne da vectorul tensiune ce corespunde deplasării considerate. Şi chiar şi cele care duc de la (31) la (42) nu sînt fără rost: tocmai ele arată că soluţia (47) dă într-adevăr, pentru orice $\mathcal{S}$, rezultatul căutat, astfel încît utilizarea funcţiei δ în reprezentarea forţelor concentrate se găseşte justificată.

Este uşor să se obţină acum deplasarea care corespunde acţiunii unui *moment concentrat*. În acest scop este suficient să considerăm două forţe egale şi opuse aplicate în puncte apropiate, şi să facem ca distanţa între aceste puncte să tindă la zero, în timp ce momentul păstrează o valoare constantă. În acest raţionament, trebuie avută în vedere necesitatea de a se obţine un rezultat independent de punctele de aplicare, şi de orientarea forţelor alese.

Toate cele spuse relativ la acţiunile concentrate au semnificaţie mecanică numai la o oarecare distanţă de punctul de aplicare corespunzător. Într-adevăr, întrucît tensiunile şi deplasările cresc nemărginit în vecinătatea unor astfel de puncte, urmează că ecuaţiile elasticităţii liniare îşi pierd aci valabilitatea. Din punctul de vedere al comportării materialelor reale, problema este rezolvată prin apariţia de zone de deformare plastică, sau de fisuri.

§ 9. TENSORUL LUI KELVIN ŞI SOMIGLIANA. APLICAŢII

Să ne imaginăm starea de deplasare (8.43) realizată prin suprapunerea a trei stări elementare, corespunzînd fiecare acţiunii unei forţe concentrate dirijate după una din axe; să presupunem că acestea sînt forţe unitare. Pentru $Q = \boldsymbol{i}_k$, vom obţine

$$\boldsymbol{v}_k = [1/16\,\pi\mu\,(1-\nu)]\,[(3-4\nu)\,\boldsymbol{i}_k/R + (\boldsymbol{i}_k\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}/R^3], \tag{1}$$

de unde, întrucît $\boldsymbol{i}_k$ are componentele δ_{ki}, căpătăm componentele

$$v_{ki} = [1/16\,\pi\mu\,(1-\nu)]\,[(3-4\nu)\,\delta_{ki}/R + x_k\,x_i/R^3]. \tag{2}$$

Vectorul $\boldsymbol{v}_k$ poartă şi el numele de *soluţia lui Kelvin şi Somigliana*. Cele nouă cantităţi v_{ki} formează un tensor de ordinul al doilea: *tensorul lui Kelvin şi Somigliana*. Componentele v_{ki} se măsoară în cm/kgf. Ele pot fi scrise şi sub forma

$$v_{ki} = [1/24\pi\mu\,(1-\nu)]\left[(5-6\nu)\,\delta_{ki}/R + \frac{1}{2}\,R^2(1/R)_{,ki}\right]. \tag{3}$$

Cunoaşterea componentelor v_{ki} permite scrierea soluţiei corespunzătoare acţiunii *oricărei* forţe concentrate în origine. Dacă aceasta este aplicată într-un punct $\boldsymbol{\xi}$ — *punctul de sursă* — soluţia rămîne valabilă după o translaţie. Notînd, ca şi în (2.14), cu $\boldsymbol{R}$ vectorul de componente $x_i - \xi_i$, de la punctul de sursă $\boldsymbol{\xi}$ la cel de observaţie $\boldsymbol{x}$, obţinem de pildă din (2):

$$v_{ki}(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{\xi}) = [1/16\pi\mu\,(1-\nu)]\,[(3-4\nu)\,\delta_{ki}/R + (x_k-\xi_k)\,(x_i-\xi_i)/R^3], \tag{4}$$

unde

$$R^2 = (x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2. \tag{5}$$

Formula (1) rămîne şi ea valabilă dacă se înlocuieşte $\boldsymbol{x}$ prin $\boldsymbol{R}$.

a) *Proprietăți de simetrie*

În primul rînd, se remarcă simetria soluției (4) în raport cu punctele de sursă și de observație. Notînd cu $\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})$ vectorul de componente (4), avem

$$\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{x}), \tag{6}$$

astfel că forța unitară aplicată în punctul de sursă și dirijată după Ox_k produce în punctul de observație o deplasare egală cu cea care ar fi produsă în chiar punctul de sursă de aceeași forță, dacă ea ar fi aplicată în punctul de observație.

Această interpretare — valabilă deocamdată numai pentru spațiul nemărginit — stă la baza așa-numitelor teoreme de reciprocitate de tip Maxwell, de care nu ne vom ocupa aci. (Vezi de ex. C. Biezeno și R. Grammel [1], cap. 2, pct. 9; R. Southwell [3], § 12.) Ele au un rol însemnat în calculul practic, mai ales în studiul sistemelor de bare elastice. Caracterul lor de principiu este identic cu cel al teoremelor lui Betti.

În al doilea rînd, se mai poate interverti în (4) indicele axei de proiecție cu cel al axei indicînd direcția de acțiune a forței:

$$v_{ki}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) = v_{ik}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}). \tag{7}$$

b) *Superpoziția soluțiilor*

Din (4) se obține ușor soluția corespunzătoare acțiunii unui sistem *finit* de forțe concentrate. Astfel dacă notăm cu $\boldsymbol{Q}^{(j)}$ forța de componente $Q_k^{(j)}$ aplicată în punctul $\boldsymbol{\xi}^{(j)}$ de coordonate $\xi_k^{(j)}$, căpătăm deplasarea

$$\boldsymbol{u}^{(j)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{3} Q_k^{(j)} \boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}^{(j)}), \tag{8}$$

unde $\boldsymbol{v}_k$ este dat de (4), dar unde $\boldsymbol{R}$ trebuie înlocuit cu $\boldsymbol{R}^{(j)} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}^{(j)}$. Vectorul deplasare corespunzător acțiunii *tuturor* celor m forțe $\boldsymbol{Q}^{(j)}$ are deci forma

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = Q_k^{(j)} \boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}^{(j)}), \quad k = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots m, \tag{9}$$

unde $\boldsymbol{x}$ este același, iar $\boldsymbol{R}^{(j)}$ variază cu $\boldsymbol{\xi}^{(j)}$ de la termen la termen.

Desigur, pentru ca soluția (9) să aibă sens, trebuie ca principiul superpoziției să nu-și piardă valabilitatea, așadar ca deplasările, deformațiile și rotațiile *parțiale* și *totale* să fie destul de mici.

c) *Potențiali elastici de volum*

Expresia (9) sugerează calea de urmat pentru a obține soluția problemei spațiului elastic acționat de forțe de volum repartizate *continuu* la distanță *finită*. Raționamentul e similar celui folosit în hidrodinamică

pentru o repartiţie continuă de surse (vezi de ex. N. Kocin [1], § 19; V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 200; A. Tihonov şi A. Samarskii [1], § 4.5).

Fie deci un sistem de forţe $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$, repartizate într-o porţiune mărginită $\mathscr{V} \subset \mathscr{E}_3$. Fiecare element de volum $\mathrm{d}V$ cu centrul în $\boldsymbol{\xi}$ este supus acţiunii forţei $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}V$. Aceasta sugerează să înlocuim suma în raport cu j din (9), prin integrala

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathscr{V}} F_k(\boldsymbol{\xi})\, \boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}V, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{10}$$

(punctul de integrare fiind evident punctul $\boldsymbol{\xi}$), sau încă

$$U_i(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathscr{V}} F_k(\boldsymbol{\xi})\, v_{ki}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}V, \qquad i, k = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Soluţia (10) e similară cu soluţia (2.25) a ecuaţiei lui Poisson, exprimată prin potenţialul (2.19). Prin analogie, integralele ce intervin în (10) se numesc *potenţiali elastici de volum*, de densităţi egale cu factorii $F_k(\boldsymbol{\xi})$.

Acest raţionament are caracter pur euristic. Într-adevăr, integralele (10) conţin termeni singulari care, după derivarea necesară pentru a verifica ecuaţiile lui Lamé, duc la apariţia unor integrale improprii, a căror convergenţă trebuie demonstrată şi a căror valoare trebuie aflată.

Chestiunea se rezolvă ca şi în cazul ecuaţiei lui Poisson (vezi de ex. A. Tihonov şi A. Samarskii [1], § 4.5). Pentru ecuaţiile lui Lamé, calculele corespunzătoare au fost efectuate de G. Lauricella [1], [3], la sugestia lui V. Volterra. Vezi de asemenea M. Haimovici [1], § 11.2; S. Mihlin [3], §§ 21 şi 45.

Un raţionament bazat pe utilizarea funcţiei δ poate fi uşor construit, prin asemănare cu cel care conduce la formula (2.27). Anume, întrucît soluţia lui (4) verifică ecuaţiile omogene pentru $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\xi}$, şi corespunde acţiunii unei „forţe de volum'' $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}_k\, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})$, putem scrie (vezi şi (4.8.3) şi (4.8.7)):

$$\mathfrak{A}\, \boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{i}_k\, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}), \tag{12}$$

ecuaţie similară cu (2.15). Întrucît $\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$ depinde numai de $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}$, potenţialul (10) poate fi scris — analog cu (2.26) — sub forma

$$\boldsymbol{U} = F_k * \boldsymbol{v}_k, \tag{13}$$

unde în fapt avem *trei* convoluţii, corespunzînd celor trei componente v_{ki}. Luînd acum în (A.2.23) pentru $\mathfrak{D}$ — operatorul lui Lamé $\mathfrak{A}$, şi făcînd uz şi de (12) şi (A.2.10), avem pe rînd

$$\mathfrak{A}\, \boldsymbol{U} = \mathfrak{A}\,(F_k * \boldsymbol{v}_k) = F_k * \mathfrak{A}\, \boldsymbol{v}_k = F_k * \boldsymbol{i}_k\, \delta = \boldsymbol{i}_k F_k * \delta = \boldsymbol{F}. \tag{14}$$

Rezultatul rămîne valabil chiar dacă $\boldsymbol{F}$ este o distribuție[5]).

Problema echilibrului spațiului elastic nemărginit izotrop și omogen, acționat la distanță finită de forțe oarecari, și în care apar deplasări și tensiuni regulate la infinit, este deci rezolvată. Mai mult, pentru un corp $\mathscr{V}$ *mărginit* supus acțiunii forțelor $\boldsymbol{F}$ și satisfăcînd anumite condiții la limită, integrala (10) este tocmai acea soluție particulară a ecuațiilor lui Lamé *ne-omogene* despre care am vorbit în § 4.10, și care permite să reducem problema la problema *omogenă* corespunzătoare.

§ 10. SOLUȚIA FUNDAMENTALĂ A ECUAȚIILOR LUI LAMÉ BIDIMENSIONALE. CARACTERUL PARADOXAL AL ACESTEI SOLUȚII

a) Soluția fundamentală în $\mathscr{E}_2$

Toate rezultatele relative la soluția fundamentală rămîn valabile în orice $\mathscr{E}_m$: pentru $m \geqslant 3$ trebuie să facem uz de funcția R^{-m+2}, în timp ce în $\mathscr{E}_2$ intervine funcția $\ln R$.

În acest din urmă caz, calculele din § 8 pot fi refăcute pornind de la o reprezentare a lui Grodskii bidimensională (4.14), și înlocuind (8.3) prin

$$\varphi = A \ln (a/\rho), \tag{1}$$

unde — spre deosebire de notația folosită în capitolul 6 — vom scrie

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{2}$$

pentru a nu risca confuzia cu R din (8.4) sau (9.5). Remarcăm prezența constantei a în (1); aceasta are dimensiunea unei lungimi, și este introdusă pentru ca soluția să nu depindă de alegerea unității de măsură.

Făcînd uz de (1) în (4.14), momentul rezultant este nul, și obținem

$$A = 1/2\pi\mu. \tag{3}$$

Soluția (9.1) se înlocuiește acum prin

$$\boldsymbol{v}_k = [1/8\pi\mu\,(1-\nu)]\,[(3-4\nu)\,\boldsymbol{i}_k \ln (a/\rho) + (\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}/\rho^2], \tag{4}$$

unde constanta a nu poate fi determinată, întrucît tensiunile nu depind de ea. Pentru o forță unitară aplicată în $\boldsymbol{\xi}$, trebuie să înlocuim în (4) pe $\boldsymbol{x}$ prin $\rho = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}$.

---

[5]) Egalitatea este desigur înțeleasă aci într-un sens generalizat, mai slab — astfel că raționamentul din (14) nu poate *înlocui* raționamentele de tip Lauricella.

Fără a restrînge generalitatea raţionamentului, ne vom limita (L. Solomon [13]) la cazul $\xi = 0$, $i_k = i_1$, astfel că din (4) căpătăm :

$$v_{11} = [1/8\pi\mu(1-\nu)][(3-4\nu)\ln(a/\rho) + x_1^2/\rho^2],$$
$$v_{12} = [1/8\pi\mu(1-\nu)][x_1 x_2/\rho^2]. \quad (5)$$

Trecînd la coordonate polare $z = \rho \exp(i\chi)$, aceste expresii devin

$$v_{11} = [1/8\pi\mu(1-\nu)][(3-4\nu)\ln(a/\rho) + \cos^2\chi],$$
$$v_{12} = [1/8\pi\mu(1-\nu)]\sin\chi\cos\chi. \quad (6)$$

Aceleaşi expresii se obţin dacă facem uz de soluţia lui Kolosov şi Mushelişvili pentru problema forţei concentrate. Anume, luînd în (6.16.17) $R_1 \to 0$ şi $X^{(1)} = 1$ (forţă unitară concentrată dirijată în lungul axei Ox_1), obţinem

$$\varphi(z) = -[1/2\pi(\varkappa+1)]\ln z, \quad \psi(z) = [\varkappa/2\pi(\varkappa+1)]\ln z, \quad (7)$$

astfel că deplasarea rezultă din (6.7.12) sub forma

$$2\mu U = -[\varkappa/2\pi(\varkappa+1)]\ln(z\bar{z}) + [1/2\pi(\varkappa+1)](z/\bar{z}), \quad (8)$$

sau încă, ţinînd seama de valoarea (6.7.13) a constantei $\varkappa = 3-4\nu$ (deformaţie plană) :

$$U = -[(3-4\nu)/16\pi\mu(1-\nu)]\ln\rho^2 + [1/16\pi\mu(1-\nu)]\exp(2i\chi), \quad (9)$$

ceea ce conduce tocmai la componentele din (5) sau (6).

Să examinăm în detaliu comportarea componentei v_{11} (deplasarea în lungul liniei de acţiune a sarcinii). Cu acest scop, să considerăm curba

$$F(x_1, x_2; a) \equiv \cos^2\chi + (3-4\nu)\ln(a/\rho) = 0, \quad (10)$$

pe care avem $v_{11} = 0$. Este vizibil că

$$F(ax_1, ax_2; a) \equiv F(x_1, x_2; 1), \quad (11)$$

şi curbele care corespund la valori diferite ale constantei a sînt deci omotetice. Alegînd $c = \exp[-C/(3-4\nu)]$, se vede că curbele $F(x_1, x_2; a) = C$ coincid cu curbele $F(x_1, x_2; ac) = 0$. Liniile de egală deplasare $v_{11} =$ = const. sînt deci omotetice cu liniile $F(x_1, x_2; 1) = 0$. Ne rămîne să le examinăm pe acestea din urmă ; din ecuaţia lor urmează

$$\rho = \exp[(\cos^2\chi)/(3-4\nu)], \quad (12)$$

ceea ce defineşte o curbă închisă, cu două axe de simetrie. Pentru diferite valori ale lui ν, aspectul acestor curbe este cel dat în figura 7.10.1.

Soluţia (4) sau (7) pune deci în evidenţă o curbă închisă pe care avem $v_{11} = 0$. În interiorul acesteia avem $v_{11} > 0$, iar în exterior, $v_{11} < 0$. Aşadar, componenta deplasării după linia de acţiune a sarcinii se anulează la o anumită distanţă de origine, apoi îşi schimbă semnul, şi tinde la infinit, descriind deplasări tot mai mari şi opuse direcţiei de acţiune a sar-

cinii pe măsură ce ne depărtăm de punctul de aplicare al acesteia. Dimpotrivă, componenta v_{12} nu depinde de ρ.

Rezultatul e un non-sens. Modificarea constantei a modifică prin omotetie aspectul acestui „tub'' de deplasări egale, dar nu schimbă caracterul paradoxal al celor de mai sus.

Faptul că funcția $\ln \rho$ posedă *două* puncte singulare, în timp ce funcția $1/R$ folosită în $\mathcal{E}_3$ are numai *un singur* astfel de punct, explică deosebirea de comportare a soluției în cazul bidimensional și în cel tridimensional.

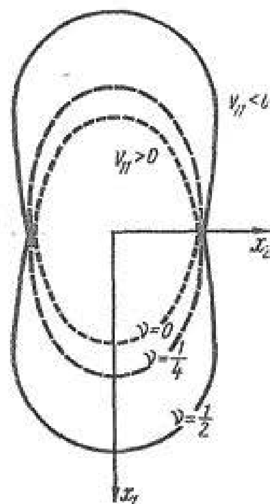


Fig. 7.10.1

E drept că în plan dispunem de *două* funcții armonice cu ajutorul cărora putem construi *două* soluții de tip Kelvin-Somigliana : Re $\ln \mathfrak{z}$, și Im $\ln \mathfrak{z}$, așadar $\ln \rho$ și $\chi = \operatorname{arc\,tg}(x_2/x_1)$. Alegînd în (4.14)

$$B_1 = 0, \quad B_2 = A\chi, \quad B_0 = 0, \tag{13}$$

raționamentul din § 8 poate fi repetat ; dar a doua soluție care se obține este de asemenea inacceptabilă, întrucît deplasările nu depind de ρ, și înafară de aceasta ele sînt funcții multiforme.

Alte posibilități de a construi soluții de tipul lui Kelvin și Somigliana în plan, nu există. Caracterul paradoxal al celor de mai sus interzice utilizarea necritică a soluțiilor *în deplasări* ale problemei plane, dacă se face uz de componentele tensorului lui Kelvin și Somigliana sub formă întreagă, așa cum este cazul de pildă în construcția soluțiilor particulare de tip (9.10). Din același motiv, nu are sens să calculăm componentele deplasării în probleme în care funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili conțin termeni logaritmici sau polari la infinit (vezi § 6.10). Dimpotrivă, toate calculele relative la componentele tensiunii rămîn justificate — dat fiind că *derivatele* termenilor în $\ln(a/\rho)$ sînt regulate la infinit și nu depind de constanta nedeterminată a.

b) Soluția fundamentală dedusă din soluția fundamentală în $\mathcal{E}_3$

Caracterul paradoxal al soluției lui Kelvin și Somigliana în plan poate fi înțeles, dacă amintim că problema stării de deformație plană este în fapt o problemă tridimensională, cu monotonie în raport cu variabila x_3.

Să revenim aci la notațiile în x, y, z, și să presupunem că în lungul axei Oz sînt distribuite sarcini de intensitate constantă, dirijate paralel cu Ox.

Vom nota cu $\boldsymbol{x}$ punctul de observație, și cu $\boldsymbol{\xi}\,(0,0,\zeta)$ pe cel de sursă. Presupunînd că sarcinile $q(\zeta)\,\boldsymbol{i}$ au rezultanta $\boldsymbol{i}$ pe orice interval de lungime unitară de pe Oz, rezultă că trebuie să luăm $q(\zeta) = \text{const.} = 1$.

Vom face uz de soluţia (9.4) pentru $k = 1$, ceea ce dă acum

$$v_{11} = c\,(\varkappa + x^2/R^3), \quad v_{12} = cxy/R^3, \quad v_{13} = cx\,(z - \zeta)/R^3, \tag{14}$$

unde am notat

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}, \quad c = 1/16\pi\mu\,(1 - \nu), \quad \varkappa = 3 - 4\nu. \tag{15}$$

Amplificînd în (15) cu $d\zeta$ şi integrînd de la o valoare ζ_1 la ζ_2, obţinem deplasările spaţiului $\mathcal{E}_3$, sub acţiunea unui „fir'' de sarcini repartizate continuu în lungul axei Oz, şi avînd rezultanta $(\zeta_2 - \zeta_1)\,\boldsymbol{i}$.

Efectuînd schimbarea de variabilă

$$Z = z - \zeta, \quad dZ = -\,d\zeta, \tag{16}$$

şi notînd cu V_{1i} integralele componentelor v_{1i} din (14), obţinem

$$\begin{aligned} V_{11} &= c\left[\varkappa\int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1}\,dZ + x^2\int_{Z_2}^{Z_1} R^{-3}\,dZ\right], \\ V_{12} &= cxy\int_{Z_2}^{Z_1} R^{-3}\,dZ, \quad V_{13} = cx\int_{Z_2}^{Z_1} Z\,dZ. \end{aligned} \tag{17}$$

Or, din (15), (16) avem evident

$$xR^{-3} = -\,(R^{-1})_{,1}, \quad yR^{-3} = -\,(R^{-1})_{,2}, \quad ZR^{-3} = -\,(R^{-1})_{,3}, \tag{18}$$

(unde indicele 3 marchează acum derivarea în raport cu Z). În acest fel, formulele (17) devin

$$\begin{aligned} V_{11} &= c\left[\varkappa\int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1}\,dZ - x\frac{\partial}{\partial x}\int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1}\,dZ\right], \\ V_{12} &= -\,cx\frac{\partial}{\partial y}\int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1}\,dZ, \quad V_{13} = -\,cx\int_{Z_2}^{Z_1}\frac{\partial}{\partial Z}(R^{-1})\,dZ. \end{aligned} \tag{19}$$

Să notăm pe scurt, pentru $j = 1, 2$:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2} = \sqrt{\rho^2 + Z^2}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad R_j = \sqrt{\rho^2 + Z_j^2}, \tag{20}$$

şi să amintim şi formula cunoscută

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left[\frac{(x + \sqrt{a^2 + x^2})}{a}\right]. \tag{21}$$

Presupunînd că $\zeta_1 < \zeta_2$, astfel că pentru orice $z \in]\zeta_1, \zeta_2[$ avem $Z_1 = z - \zeta_1 > 0$, $Z_2 = z - \zeta_2 < 0$, vom calcula integrala

$$\int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1}\,\mathrm{d}Z = \ln \frac{Z + R}{\rho}\Bigg|_{Z_2}^{Z_1} = \ln \frac{R_1 + Z_1}{\rho} + \ln \frac{\rho\,(R_2 - Z_2)}{(R_2 + Z_2)\,(R_2 - Z_2)} =$$

$$= \ln \frac{R_1 + Z_1}{\rho} + \ln \frac{R_2 - Z_2}{\rho},$$

unde $Z_1 > 0$, $-Z_2 > 0$. Introducînd aci şi constanta *arbitrară* a, avînd dimensiunea unei lungimi, putem scrie deci

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} R^{-1}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1}\,\mathrm{d}Z = \ln \frac{(R_1 + Z_1)\,(R_2 - Z_2)}{a^2} + 2 \ln \frac{a}{\rho}. \qquad (22)$$

Pentru a introduce (22) în (19), avem de calculat derivatele

$$[2 \ln\,(a/\rho)]_{,i} = -2\,(x_i/\rho^2), \qquad (23)$$

$$\left[\ln \frac{(R_1 + Z_1)\,(R_2 - Z_2)}{a^2}\right]_{,i} = \left[\frac{1}{R_1\,(R_1 + Z_1)} + \frac{1}{R_2\,(R_2 - Z_2)}\right] x_i, \qquad (24)$$

pentru $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $i = 1, 2$. Cu aceasta, soluţia (19) capătă forma

$$V_{11} = 2c\left[\frac{x^2}{\rho^2} + (3 - 4\nu) \ln \frac{a}{\rho}\right] + c\,(3 - 4\nu)\, \ln \frac{(R_1 + Z_1)\,(R_2 - Z_2)}{a^2} -$$

$$- cx^2\left[\frac{1}{R_1\,(R_1 + Z_1)} + \frac{1}{R_2\,(R_2 - Z_2)}\right],$$

$$V_{12} = 2c\,\frac{xy}{\rho^2} \qquad - cxy\left[\frac{1}{R_1\,(R_1 + Z_1)} + \frac{1}{R_2\,(R_2 - Z_2)}\right], \qquad (25)$$

$$V_{13} = \qquad cx\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right].$$

După cum se vede, primii termeni din V_{11} şi V_{12} coincid cu componentele v_{11}, respectiv v_{12} din (5).

Desigur, ar fi de dorit ca pentru Z_1, $-Z_2 \to \infty$, să căpătăm din (25) tocmai soluţia lui Kelvin şi Somigliana în $\mathcal{E}_2$. În fapt, se constată uşor că în acest caz termenii ultimi din V_{11} şi V_{12}, precum şi componenta V_{13}, se anulează. În schimb, termenul mijlociu din V_{11} tinde acum către infinit.

Tocmai acesta este motivul pentru care componenta v_{11} din (5) tinde la infinit pentru $\rho \to \infty$, în contradicţie cu sensul mecanic al problemei: lucrurile se petrec astfel, numai pentru că în soluţia problemei plane — care ar fi trebuit să fie obţinută din (25) — a fost *dinainte* neglijat acel termen logaritmic, care tinde şi el spre infinit. (Acest termen descrie o stare cu tensiuni nule la infinit, astfel că prezenţa sa nu influenţează tensiunile la mari distanţe.)

Să regrupăm acum termenii în $\cos^2\chi$, $\cos\chi\sin\chi$, și termenii logaritmici. După calcule elementare, obținem din (25)

$$\begin{aligned}
V_{11}(x, y, z) &= 2c\left\{\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{1+Z_1^2/\rho^2}\left(\sqrt{1+Z_1^2/\rho^2}+Z_1/\rho\right)} - \right.\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{2\sqrt{1+Z_2^2/\rho^2}\left(\sqrt{1+Z_2^2/\rho^2}-Z_2/\rho\right)}\right]\cos^2\chi + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(3-4\nu)\left[\ln\left(\sqrt{1+Z_1^2/\rho^2}+Z_1/\rho\right) + \ln\left(\sqrt{1+Z_2^2/\rho^2}-Z_2/\rho\right)\right]\right\}\\
V_{12}(x, y, z) &= 2c\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{1+Z_1^2/\rho^2}\left(\sqrt{1+Z_1^2/\rho^2}+Z_1/\rho\right)} - \right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{2\sqrt{1+Z_2^2/\rho^2}\left(\sqrt{1+Z_2^2/\rho^2}-Z_2/\rho\right)}\right]\cos\chi\sin\chi,\\
V_{13}(x, y, z) &= c\left[\frac{1}{\sqrt{1+Z_2^2/\rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+Z_1^2/\rho^2}}\right]\cos\chi,
\end{aligned} \tag{26}$$

(unde variabila z apare prin intermediul cantităților Z_1, Z_2).

Atît coeficientul termenului în $\cos^2\chi$, cît și termenul logaritmic din V_{11}, sînt pozitivi pentru orice valori ale lui ρ, χ, Z_1, Z_2, astfel că avem peste tot $V_{11} > 0$. Calculînd limitele expresiilor (26) pentru $\rho \to \infty$, obținem, pentru *orice* valori *finite* ale lui Z_1, Z_2:

$$\lim_{\rho\to\infty} V_{11}(x, y, z) = \lim_{\rho\to\infty} V_{12}(x, y, z) = \lim_{\rho\to\infty} V_{13}(x, y, z) = 0. \tag{27}$$

Prin urmare soluția (26) dă deplasări care păstrează un semn constant pe direcția sarcinii, și tind la zero la infinit — în concordanță cu sensul mecanic al problemei.

Dimpotrivă pentru ρ finit, obținem din (26)

$$\begin{aligned}
&\lim_{Z_1,\,-Z_2\to\infty} V_{11} = (3-4\nu)\,c\,\lim\ln\left(Z_1Z_2/\rho^2\right) = \infty,\\
&\lim_{Z_1,\,-Z_2\to\infty} V_{12} = 2c\sin\chi\cos\chi, \qquad \lim_{Z_1,\,-Z_2\to\infty} V_{13} = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Aceasta este de asemenea ușor de înțeles: rezultanta sarcinii aplicate în lungul liniei Oz tinde și ea la infinit, odată cu diferența $Z_1 - Z_2$, și e de așteptat că deplasările nu pot rămîne finite. Prin urmare, condiția de finitudine a deplasărilor la infinit impusă în § 6.10, pag. 413—414, este în fond străină naturii problemei.

În practică, nu vom întîlni desigur nici cazul $Z_1, -Z_2 \to \infty$, nici cazul $\rho \to \infty$. Dar valorile deplasării nu vor trebui căutate sub forma (5) — lipsită de sens mecanic — ci numai pornind de la formulele (26), și apreciind în ce măsură aceste formule — stabilite pentru spațiul *nemărginit* solicitat în lungul axei Oz — pot fi acceptate în problema studiată.

§ 11. FORMULA INTEGRALĂ FUNDAMENTALĂ A ELASTOSTATICII

a) *Reprezentarea prin potențiali elastici*

Această formulă reprezintă soluția ecuațiilor lui Lamé ne-omogene pentru un corp izotrop și omogen, ca sumă de integrale definite care depind de forțele de volum și de valorile la limită ale deplasării și tensiunii.

Să considerăm un corp mărginit $\mathscr{V}$, de frontieră $\mathscr{S}$ (suprafață care posedă arie), supus acțiunii forțelor $\boldsymbol{F}$ și $\boldsymbol{f}$, care realizează în $\mathscr{V}$ starea elastică *regulată* u_i, σ_{ij}.

Vom face uz de cea de a treia formulă Betti și de soluția fundamentală (9.4), alegînd în (6.17) drept vector $\boldsymbol{u}$ chiar soluția căutată, iar drept vector $\boldsymbol{v}$, un vector $\boldsymbol{v}_k$ (k fix, dar oarecare) de componente v_{ki} din (9.4). Vom izola punctul singular $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ al funcției $\boldsymbol{v}_k$ printr-o sferă notată S_ε, de rază ε. Formula (6.17) — unde în primul membru facem uz de (6.6) — va putea fi deci folosită pentru domeniul $\mathscr{V} - B_\varepsilon$ de frontieră $\mathscr{S} + S_\varepsilon$:

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}-B_\varepsilon} [\boldsymbol{u}\cdot\mathfrak{A}\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_k\cdot\mathfrak{A}\boldsymbol{u}]\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v}_k)]\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_\varepsilon} [\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v}_k)]\,\mathrm{d}S. \tag{1}$$

Întrucît $\boldsymbol{v}_k$ este o soluție a ecuațiilor Lamé omogene, avem

$$\mathfrak{A}\boldsymbol{v}_k = 0 \quad \text{în} \quad \mathscr{V} - B_\varepsilon. \tag{2}$$

Al doilea termen din integrala de volum este un potențial elastic de volum de densitate $\mathfrak{A}\boldsymbol{u}$, definit în $\mathscr{V} - B_\varepsilon$. Întrucît $\boldsymbol{u}\in C^2(\mathscr{V})$, urmează că $\mathfrak{A}\boldsymbol{u}\in C^0(\mathscr{V})$. Integrala corespunzătoare este deci convergentă (vezi indicațiile din § 9, pag. 551), limita pentru $\varepsilon\to 0$ a acestei integrale există și este desigur egală tocmai cu potențialul elastic de volum de densitate $\mathfrak{A}\boldsymbol{u}$, definit în $\mathscr{V}$.

Prima integrală din membrul al doilea din (1) nu depinde de ε, astfel că și cea de-a doua are o limită pentru $\varepsilon\to 0$. Ne propunem să găsim această limită.

Cu acest scop, să începem prin a calcula integrala

$$I'_k = \iint\limits_{S_\varepsilon} \boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S. \tag{3}$$

Ţinînd seama de (9.4), avem pe rînd

$$I_k' = [1/16\pi\mu(1-\nu)]\,\varepsilon \iint\limits_{S_\varepsilon} [(3-4\nu)\,\delta_{ki} + $$
$$+ (x_k - \xi_k)(x_i - \xi_i)\,\varepsilon^{-2}]\,\sigma_{ni}(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S_1. \tag{4}$$

Al doilea termen al integrandului conţine un produs de cosinuşi directori, care rămîne finit pentru $\varepsilon \to 0$. Din (3) şi (4) urmează atunci

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{S_\varepsilon} \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S = 0. \tag{5}$$

Să trecem acum la calculul celei de-a doua integrale pe S_ε din (1):

$$I_k'' = \iint\limits_{S_\varepsilon} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v}_k)\,\mathrm{d}S. \tag{6}$$

Tensiunea $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v}_k)$ se calculează din (8.44), înlocuind $\boldsymbol{x}$ prin $\boldsymbol{R}$, şi punînd $R = \varepsilon$, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{i}_k$ şi $\boldsymbol{R} = -R\boldsymbol{n}$ (spre deosebire de calculele care au condus la (8.33), normala exterioară domeniului $\mathscr{V} - B_\varepsilon$ e aci dirijată spre *interiorul* sferei S_ε). Obţinem astfel

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v}_k)|_{R=\varepsilon} = [(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)]\,\varepsilon^{-2}\,[\boldsymbol{i}_k + 3(1-2\nu)^{-1}\varepsilon^{-2}(\boldsymbol{i}_k\cdot\boldsymbol{R})\,\boldsymbol{R}], \tag{7}$$

şi deci (6) devine

$$I_k'' = [(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)]\,\varepsilon^{-2} \iint\limits_{S_\varepsilon} \boldsymbol{u}\cdot[\boldsymbol{i}_k + 3(1-2\nu)^{-1}\varepsilon^{-2}(x_k - \xi_k)\,\boldsymbol{R}]\,\mathrm{d}s, \tag{8}$$

sau încă, întrucît avem

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}_k = u_k, \quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R} = u_i(x_i - \xi_i), \quad \mathrm{d}S_\varepsilon = \varepsilon^2\,\mathrm{d}S_1,$$

(unde $\mathrm{d}S_1$ este elementul de arie pe sfera unitate):

$$I_k'' = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\left[\iint\limits_{S_\varepsilon} u_k\,\mathrm{d}S_1 + \frac{3}{1-2\nu}\,\varepsilon^{-2}\iint\limits_{S_\varepsilon} u_i(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)\,\mathrm{d}S_1\right]. \tag{9}$$

Prima integrală din (9) reprezintă media funcţiei $u_k(\boldsymbol{x})$ pe $S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$. Componentele u_k fiind continue, prima teoremă a mediei dă

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} u_k(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_1 = u_k(\boldsymbol{\xi})\iint\limits_{S_\varepsilon}\mathrm{d}S_1 + \eta' = 4\pi u_k(\boldsymbol{\xi}) + \eta', \tag{10}$$

unde $\eta' \to 0$ pentru $\varepsilon \to 0$.

Pentru a calcula a doua integrală din (9), aceeaşi teoremă conduce la

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} u_i(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)\,\mathrm{d}S_1 = u_i(\boldsymbol{\xi}) \iint\limits_{S_\varepsilon} (x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)\,\mathrm{d}S_1 + \eta'', \tag{11}$$

unde $\eta'' \to 0$ pentru $\varepsilon \to 0$.

Pentru $i \neq k$ avem evident

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} (x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)\,\mathrm{d}S_1 = 0. \tag{12}$$

Ne rămîne să calculăm această integrală pentru $i = k$. Valoarea ei nu depinde de indice. Făcînd uz de (2.5), vom scrie

$$\begin{gathered} x_1 - \xi_1 = \varepsilon \sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 - \xi_2 = \varepsilon\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 - \xi_3 = \varepsilon\cos\theta, \\ \mathrm{d}S_1 = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi, \end{gathered} \tag{13}$$

astfel că pentru $i = k = 3$ de pildă, avem

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} (x_3 - \xi_3)^2\,\mathrm{d}S_1 = \varepsilon^2\left[-\frac{1}{3}\int_0^\pi \mathrm{d}(\cos^3\theta)\right]\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^2. \tag{14}$$

Relaţiile (12) şi (14) se scriu împreună sub forma

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} (x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)\,\mathrm{d}S_1 = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^2\delta_{ik}, \tag{15}$$

astfel că (11) devine

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} u_i(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)\,\mathrm{d}S_1 = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^2 u_k(\boldsymbol{\xi}) + \eta''. \tag{16}$$

Introducînd (16) şi (10) în (9), obţinem după calcule elementare $I_k'' = u_k(\boldsymbol{\xi}) + \eta$, de unde

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S_\varepsilon} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v}_k)\,\mathrm{d}S_\varepsilon = u_k(\boldsymbol{\xi}). \tag{17}$$

Să luăm acum $\varepsilon \to 0$ în (1), ţinînd seama de (2), (5) şi (17). Regrupînd termenii şi intervertind $\boldsymbol{x}$ cu $\boldsymbol{\xi}$, căpătăm în definitiv *formula integrală fundamentală a elastostaticii liniare* (pentru corpuri izotrope şi omogene):

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \boldsymbol{v}_k\cdot\mathfrak{A}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v}_k)]\,\mathrm{d}S, \tag{18}$$

unde ξ este punctul curent de integrare. Analogia cu (2.18) este evidentă. Semnul *plus* în integrala de volum se datorește faptului că operatorul $\mathfrak{A}$ preia aici locul operatorului $-\Delta$ (vezi și § 6, pag. 539). Locul operatorului de derivare normală e preluat de operatorul-tensiune din (1.9).

Această formulă a fost obținută de C. Somigliana [3] pentru domenii mărginite. Tot el, în [4], a extins valabilitatea formulei la domenii nemărginite, dacă $\boldsymbol{F} \equiv 0$ în exteriorul unei sfere, și starea elastică este regulată la infinit.

Ca și (2.18), relația (18) exprimă numai o proprietate de structură a operatorului lui Lamé $\mathfrak{A}$ (compară cu § 2, pag. 514).

Să considerăm acum vectorul deplasare $\boldsymbol{u}$ pentru care

$$\mathfrak{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{f}. \tag{19}$$

Introducînd (19) în (18), obținem

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{f} - \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v}_k)]\,\mathrm{d}S, \tag{20}$$

ceea ce dă explicit vectorul deplasare prin intermediul a trei integrale definite. Condițiile la limită impuse de necesitățile practicii, și deja considerate, sînt deci tocmai acele condiții pe care însăși structura operatorului lui Lamé le scoate în evidență, prin intermediul formulei integrale fundamentale.

Pe lîngă potențialul de volum introdus în § 9, formula (20) conține încă două integrale care — prin analogie cu cele considerate în § 2 — se numesc *potențiali elastici* (superficiali) *de simplu*, respectiv *de dublu strat*. Acești potențiali au fost studiați tot de către G. Lauricella [3], care a demonstrat pentru ei teoreme deplin analoge cu (2.28)—(2.32), derivarea normală fiind sistematic înlocuită de o operație de tipul operatorului-tensiune definit în (1.9). Vezi încă E. și F. Cosserat [3].

Ca și pentru ecuația lui Poisson, datele incluse în (20) sînt supraabundente; teorema de unicitate din § 4.5 ne arată că *nu putem* da în mod independent valorile la limită ale deplasării *și* ale tensiunii. De aceea, formula (20) *nu definește* o soluție a ecuațiilor lui Lamé pentru valori *arbitrare* ale deplasării și tensiunii pe frontieră—ci dă numai o legătură obligatorie între diferitele mărimi elastice (cunoscute și necunoscute).

Formula (18) este esențial bazată pe presupunerea $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$. O formulă analogă poate fi scrisă și pentru $\boldsymbol{x} \notin \mathscr{V} + \mathscr{S}$ — dar nu și pentru $\boldsymbol{x} \in \mathscr{S}$ (cînd un analog al sferei S_ε nu poate fi construit). Prin urmare, abia studiul proprietăților la limită ale potențialilor elastici permite clarificarea proprietăților la limită ale sumei din membrul al doilea din (20), și deci și a valorilor pe care funcțiile $\boldsymbol{u}$ sau $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})$, construite prin intermediul acestei sume, le iau pe $\mathscr{S}$. (Vezi problema asemănătoare pentru ecuația lui Poisson, de exemplu în L. Sretenskii [1], §§ 3.2 și 4.3.).

b) Aplicații. Indicații bibliografice

Cu toate aceste observații limitative, formula (18) sau (20) este de o excepțională importanță. Ea permite obținerea de rezultate generale relative la proprietățile soluțiilor ecuațiilor lui Lamé : proprietăți de medie (vezi S. Mihlin [3], § 44), proprietățile de stabilitate a soluției în raport cu modificarea datelor la limită (vezi similar A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.2, referitor la ecuația lui Laplace) etc.

În afară de aceasta, ea poate conduce la reprezentări efective ale soluției, prin considerarea unui analog al funcției lui Green. (Vezi, pentru o teorie generală, R. Courant și D.Hilbert [1], vol. 1, § 5.16; C. Miranda [1], § 10; V. Smirnov [2], vol. 4, pct. 240.)

În sfîrșit, reprezentarea soluțiilor ecuațiilor lui Lamé omogene prin potențiali elastici superficiali, și studiul proprietăților lor la limită, permite reducerea problemei la studiul anumitor ecuații integrale. În cazul general al sistemelor de tip eliptic, chestiunea e studiată de C. Miranda [1], cap. 3 și 7; V. Smirnov [2], volumul 4, pct. 239—240. În ce privește problemele mecanicii, drumul a fost deschis de cercetările lui E. și F. Cosserat [2], [3] și G. Lauricella [3]—[5], care, bazați pe lucrările mai vechi ale școlii italiene de teoria elasticității (E. Betti, C. Somigliana) au obținut în acest mod demonstrarea teoremelor de existență. Metoda ecuațiilor integrale a fost utilizată și de A. Korn [1]—[3] și L. Lichtenstein [2]. Unele din aceste rezultate sînt pe scurt reluate de M. Haimovici [1], capitolele 11 și 12; E. Trefftz [3], §§ 49—51. Aceleași puncte de vedere sînt studiate, cu aplicații la fluidele viscoase, de F. Odqvist [1].

Ecuațiile lui G. Lauricella au fost regăsite, generalizate și simplificate (pentru problema lui Dirichlet) de către D. Șerman [5]. (Vezi și lucrările [1]—[4] ale aceluiași autor.) Pentru problema lui Neumann, vezi H. Weyl [1]. Bibliografia amănunțită a chestiunii (inclusiv aplicații) este prezentată de D. Șerman [8] (vezi și [9]).

Pe linia concepțiilor lui G. Giraud, vezi studiul sistematic al ecuațiilor elasticității, realizat de V. Kupradze [2], [3].

Pentru raporturile între teoria elasticității și diferitele reprezentări integrale posibile, vezi I. Arjanih [1]. Pentru ecuațiile dinamice, vezi și S. Kaliski [1].

Toate aceste puncte de vedere încep să-și găsească aplicații și în studiul unor corpuri caracterizate de legi fizice mai complicate. Citām astfel lucrarea lui E. Sternberg și S. Al-Khozaie [1] asupra *visco-elasticității*, unde se introduc matrice Green, soluții fundamentale, formule integrale fundamentale adecvate.

§ 12. MATRICEA LUI GREEN PENTRU ECUAȚIILE LUI LAMÉ

a) Matricea lui Green

Să revenim la formula fundamentală (11.18) sau (11.20), și să presupunem că avem de rezolvat una oarecare din problemele la limită (4.2.1)—(4.2.3). Dacă am putea determina un vector G_k care să ia într-un anume sens locul vectorului v_k în formula fundamentală, în așa fel încît termenii

din integrala de suprafață *care nu sînt cunoscuți* să dispară — atunci (11.20) ar da soluția explicită a acestor probleme. Astfel de pildă, dacă cunoaștem

$$\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{g}, \tag{1}$$

va trebui ca termenul care conține $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}}$ să se anuleze. Dimpotrivă, dacă cunoaștem

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{f}, \tag{2}$$

atunci va trebui să dispară termenul în care apare $\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}}$. În fine, dacă cunoaștem

$$\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}'} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}''} = \boldsymbol{f}, \tag{3}$$

vor trebui să se anuleze termenii care conțin $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}'}$ și $\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}''}$.

Să căutăm vectorul $\boldsymbol{G}_k$ sub forma sumei

$$\boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{V}_k, \tag{4}$$

unde $\boldsymbol{v}_k$ este soluția lui Kelvin și Somigliana, iar $\boldsymbol{V}_k \in C^2(\mathscr{V})$ și

$$\mathfrak{A}\boldsymbol{V}_k = 0. \tag{5}$$

Matricea celor 9 funcții G_{ki} se notează Γ, și se numește *matricea lui Green*.

Scriind a treia formulă a lui Betti (6.17) pentru $\boldsymbol{u}$ și $\boldsymbol{V}_k$, ținînd seama de (6.6) și de (5) și grupînd termenii în membrul al doilea, obținem

$$0 = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \boldsymbol{V}_k \cdot \mathfrak{A}\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V + \iint\limits_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{V}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{V}_k)]\, \mathrm{d}S. \tag{6}$$

Să adunăm acum termen cu termen (11.18) și (6), ținînd seama de notația (4), precum și de liniaritatea operatorilor $\mathfrak{A}$ și $\boldsymbol{\sigma}_n$. Obținem astfel relația

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \boldsymbol{G}_k \cdot \mathfrak{A}\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V + \iint\limits_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{G}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{G}_k)]\, \mathrm{d}S, \tag{7}$$

care va *înlocui* formula (11.18) în considerațiile ce vor urma.

Alegînd acum în diferite moduri matricea Γ, așadar în fond soluțiile regulate $\boldsymbol{V}_k$, putem face să dispară din (7) acele integrale de suprafață care cuprind valorile la limită *necunoscute*.

Primele rezultate de acest tip aparțin lui G. Lauricella [3]. Menționăm și că I. Fredholm [1] utilizează funcții de tipul lui G_{ki}, sub numele de „funcții compensatoare".

b) Problema lui Dirichlet

Să considerăm așadar ecuațiile lui Lamé, cu condiția la limită (1). Valorile necunoscute $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\mathscr{S}}$ dispar din (7), dacă avem

$$G_k|_{\mathscr{S}} = 0, \tag{8}$$

astfel că soluția se obține sub forma explicită

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \boldsymbol{G}_k \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}V - \iint\limits_{\mathscr{S}} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{G}_k) \, \mathrm{d}S. \tag{9}$$

În virtutea definiției (4), relația (8) conduce la condiția

$$\boldsymbol{V}_k|_{\mathscr{S}} = - \boldsymbol{v}_k|_{\mathscr{S}}. \tag{10}$$

Prin urmare, pentru a găsi matricea lui Green, trebuie să determinăm acea soluție *regulată* (deci unică) a ecuațiilor lui Lamé omogene, care ia valori la limită egale și de semn contrar cu valorile componentelor tensorului lui Kelvin și Somigliana[6]). Vectorul $\boldsymbol{G}_k$ are deci următoarele proprietăți:

1° ca funcție de x_i, este soluție regulată a ecuațiilor lui Lamé omogene în $\mathscr{V}$, exceptînd punctul $\boldsymbol{\xi}$;

2° are în punctul $\boldsymbol{\xi}$ o singularitate de același tip cu $\boldsymbol{v}_k$;

3° se anulează pe frontiera $\mathscr{S}$ a domeniului $\mathscr{V}$ [7]).

Vectorul $\boldsymbol{G}_k$ este deci soluția problemei echilibrului corpului *mărginit* $\mathscr{V}$, solicitat de forța unitară $\boldsymbol{i}_k$ aplicată în $\boldsymbol{\xi}$, avînd frontiera fixată (vezi (8)), și ne-supus acțiunii vreunei forțe de volum. În alcătuirea lui $\boldsymbol{G}_k$ intră vectorul $\boldsymbol{V}_k$, al cărui rol este de a „corecta" pe $\boldsymbol{v}_k$ (soluția regulată la infinit a aceleiași probleme, formulate însă pentru spațiul nemărginit $\mathscr{E}_3$).

Evident, vectorul $\boldsymbol{V}_k$ — ca și $\boldsymbol{v}_k$ — este o funcție de *două* puncte: $\boldsymbol{x}$ și $\boldsymbol{\xi}$. Prin urmare, trebuie să scriem

$$\boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{G}_k\,(\boldsymbol{x};\,\boldsymbol{\xi}), \quad \Gamma = \Gamma\,(\boldsymbol{x};\,\boldsymbol{\xi}). \tag{11}$$

Se poate demonstra că acestea sînt funcții *simetrice* de $\boldsymbol{x}$ și $\boldsymbol{\xi}$, ceea ce permite a se construi teoreme de reciprocitate de tip Maxwell pentru domenii mărginite. (Compară cu § 9, pag. 550; mai general, vezi C. Miranda [1], § 10.)

---

[6]) Faptul că realizăm cu ajutorul unei soluții regulate, valori ale deplasării egale pe frontieră (abstracție făcînd de semn) cu cele ce rezultă din acțiunea unei forțe unitare concentrate, nu contrazice teorema de unicitate: soluția lui Kelvin și Somigliana nu este regulată, și teorema lui Kirchhoff nu poate ține seama de ea.

[7]) Vectorul $\boldsymbol{G}_k$ nu este o soluție regulată a ecuațiilor lui Lamé, și de aceea omogenitatea ecuațiilor *și* a condițiilor la limită *nu* atrage după sine anularea soluției.

Relația (9) dă așadar *prin integrale definite* soluția problemei lui Dirichlet pentru *orice* domeniu mărginit $\mathscr{V}$, cu *orice* constante elastice λ, μ, și cu *orice* date la limită în deplasări, — dacă cunoaștem matricea lui Green $\Gamma\,(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\xi})$. Rezolvarea oricărei probleme Dirichlet pentru ecuațiile lui Lamé se poate deci efectua (în principiu) în două etape :

1° rezolvarea unei *anumite* probleme Dirichlet (vezi (10)) pentru corpul considerat, cu date la limită ce depind *numai* de forma sa și de material ;

2° calcularea unor *integrale definite*, ce depind de datele $\boldsymbol{F}$ și $\boldsymbol{g}$, și de soluția problemei particulare anterior rezolvate.

c) Problema lui Neumann

Să considerăm acum ecuațiile lui Lamé cu condiția la limită (2). Valorile necunoscute $\boldsymbol{u}|_{\mathscr{S}}$ dispar din expresia (7), dacă avem

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{G}_k)\,|_{\mathscr{S}} = 0, \tag{12}$$

ceea ce conduce la soluția problemei sub formă explicită

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \boldsymbol{G}_k \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{\mathscr{S}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{G}_k\,\mathrm{d}S, \tag{13}$$

de același tip cu (9). (Matricele lui Green pentru diferitele probleme fundamentale sînt desigur diferite.) Ținînd seama de (12) și (4), se obține condiția

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{V}_k)|_{\mathscr{S}} = -\,\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{v}_k)|_{\mathscr{S}}, \tag{14}$$

analogă cu (10). Dar o astfel de soluție regulată a ecuațiilor lui Lamé nu poate exista. Într-adevăr, dacă $\boldsymbol{G}_k$ este soluția ecuațiilor Lamé omogene cu condiția la limită omogenă (12), aceasta înseamnă că corpul mărginit $\mathscr{V}$ trebuie să fie în echilibru sub acțiunea *unei singure* forțe unitare, corespunzătoare singularității ce intervine în $\boldsymbol{v}_k$ — ceea ce este cu neputință.

Dificultatea poate fi ocolită în două moduri.

Pe de o parte, se poate presupune că un punct oarecare al corpului este fixat, ceea ce duce la apariția unei forțe de reacțiune care echilibrează forța unitară corespunzătoare soluției $\boldsymbol{v}_k$ (vezi de ex. E. Trefftz [3], § 49).

Pe de altă parte, se poate urma același drum ca în studiul problemei similare pentru ecuația lui Laplace (vezi de ex. S. Sobolev [3], § 31.2). Anume, se presupune (L. Solomon [4]) că $\boldsymbol{G}_k$ verifică condiția omogenă (12) (care permite să se scrie soluția sub forma (13)), dar e soluție a unei ecuații Lamé *ne*-omogene, al cărei membru al doilea e ales în așa fel, încît $\mathscr{V}$ să fie în echilibru. Se constată atunci că aceste forțe de volum pot fi întotdeauna determinate, astfel încît vectorul $\boldsymbol{G}_k$ este caracterizat de următoarele proprietăți :

1° ca funcție de x_i, este soluție regulată a ecuațiilor Lamé ne-omogene în $\mathscr{V}$, exceptînd punctul $\boldsymbol{\xi}$;

2° are în punctul $\boldsymbol{\xi}$ o singularitate de același tip cu $\boldsymbol{v}_k$;

3° conduce la tensiuni $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{G}_k)$ nule pe frontiera $\mathscr{S}$ a domeniului $\mathscr{V}$.

Cele spuse mai sus privitor la posibilitatea de a rezolva problema în două etape succesive, rămîn și aci valabile.

d) Problema mixtă

Dificultățile suplimentare legate de condițiile lui Neumann nu mai apar, datorită prezenței reacțiunilor (fictive) în punctele frontieră cu deplasare reală dată $\boldsymbol{u}$, reacțiuni care echilibrează tensiunile (fictive) corespunzătoare vectorului $\boldsymbol{G}_k$.

Din condiția la limită (3) urmează că trebuie să cerem

$$\boldsymbol{G}_k|_{\mathcal{S}'} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{G}_k)|_{\mathcal{S}''} = 0, \tag{15}$$

astfel că soluția problemei mixte se scrie sub forma explicită

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{G}_k \cdot \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}V - \iint\limits_{\mathcal{S}'} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{G}_k)\, \mathrm{d}S + \iint\limits_{\mathcal{S}''} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{G}_k\, \mathrm{d}S. \tag{16}$$

e) Concluzii

Pentru toate problemele considerate, dificultatea constă în determinarea efectivă a matricii lui Green. (Se știe de altfel că nici în cazul ecuației lui Laplace în $\mathcal{E}_3$, funcția lui Green nu a putut fi construită decît pentru foarte puține domenii.)

De aceea, acest punct de vedere are în primul rînd importanță teoretică. Printre altele, pe această cale poate fi abordată chestiunea existenței soluției. De asemenea, se pot cerceta proprietățile soluției pentru diferite proprietăți ale frontierei, ale datelor la limită etc.

Una din problemele cele mai interesante de studiat pornind de la aceste reprezentări, este cea a marginilor (a se revedea § 1, pag. 512).

În legătură cu teoria matricilor lui Green și a soluțiilor fundamentale, cităm încă B. Boley [1]; V. Hristoforov [1] (relativ la cazul plan); N. Kinoshita și T. Mura [1]; — dar mai ales V. Kupradze [2], [3].

OBSERVAȚIE. Pentru a încheia, să remarcăm că toate cele prezentate în acest capitol subliniază strînsa legătură dintre ecuația lui Laplace și ecuațiile lui Lamé — dar totodată și caracterul considerabil mai complicat al acestora din urmă. Pentru a ne convinge de aceasta, este suficient să amintim structura operatorului $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})$ din (1.9): să comparăm formulele lui Green din § 2 cu formulele lui Betti din § 6; soluțiile fundamentale (2.16) și (8.43); formulele integrale fundamentale (2.18) și (11.18); reprezentările prin funcții Green din (2.37) și (7).

CAPITOLUL 8

PROBLEMA BULEI ELASTICE

§ 1. GENERALITĂŢI

G. Lamé [2] a fost primul care a rezolvat problema lui Neumann pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice. El a transcris ecuaţiile elasticităţii în coordonate sferice, şi a dezvoltat datele la limită în serii duble de funcţii trigonometrice şi polinoame Legendre generalizate, ajungînd prin identificare la un şir de sisteme de cîte 12 ecuaţii liniare pentru 12 necunoscute, din care se obţin coeficienţii dezvoltărilor în serie pentru soluţie.

Un pas esenţial înainte a fost făcut de către lord Kelvin [3] (retipărit în [4], vol. 3), şi în acelaşi timp de către A. Clebsch [1]. Kelvin renunţă la folosirea coordonatelor sferice, şi caută soluţia sub forma unor serii de polinoame armonice omogene, dezvoltînd totodată datele la limită în serii de funcţii sferice superficiale şi determinînd coeficienţii prin identificare. Ideea este similară celei folosite în §§ 5.20 şi 6.14 pentru coroana circulară. Aceasta a fost prima problemă concretă în rezolvarea căreia s-a făcut uz de reprezentarea soluţiei prin potenţiali armonici de deplasare.

Mai tîrziu, J. Boussinesq [2] foloseşte o reprezentare a lui $\boldsymbol{u}$ care prezintă avantajul că vectorul de corecţie (vezi § 7.4) se anulează pe sfera-frontieră. În acest mod, problema lui Dirichlet pentru $\boldsymbol{u}$ se reduce la o problemă Dirichlet pentru $\boldsymbol{B}$, aşadar la trei probleme Dirichlet pentru trei ecuaţii Laplace separate. În cazul problemei lui Neumann, se ajunge tot la un număr finit de probleme Dirichlet pentru ecuaţia Laplace — dar calculele sînt extrem de greoaie. Pentru detalii vezi A. Love [1], capitolul 11; O. Tedone şi A. Timpe [1], § 4; E. Trefftz [3], §§ 37 şi 38. Vezi şi soluţia mai veche a lui C. Somigliana [2].

Primele două probleme fundamentale pentru bula elastică, pentru spaţiul cu o cavitate sferică, şi pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice, au primit o rezolvare unitară abia relativ de curînd, în lucrarea lui A. Lurie [3] (vezi şi [4], cap. 6 şi 8). Ideea de bază rămîne cea a lui Kelvin şi Clebsch, dar Lurie utilizează reprezentarea lui Grodskii (în aparenţă mai puţin adecvată problemei!) şi faptul că cea de a patra funcţie a lui Grodskii nu este independentă de primele trei. Soluţia obţinută pentru problema lui Dirichlet nu e esenţial nouă. În schimb, soluţia problemei lui Neumann apare principial tot atît de simplă, şi de acelaşi tip cu cea dintîi. (Pentru domeniul mărginit de două sfere excentrice, vezi R. Kaufman [1].)

În această soluție nu sînt de efectuat operații de integrare, cu excepția celor necesare pentru dezvoltarea în serie a datelor la limită. Acesta este încă un avantaj al metodei lui Lurie.

Menționăm încă și problema bulei supuse la sarcini concentrate, examinată de E. Sternberg și F. Rosenthal [1] (vezi și F. Field [1]) și reluată de A. Lurie [4], § 6.7.

Spre deosebire de problema plană, ne vom mărgini la a expune cazul bulei, îndestulător pentru a înțelege metoda. Pentru celelalte două cazuri, și pentru exemple mai dificile, trimitem la lucrările citate.

§ 2. OPERATORII LUI LURIE

Să considerăm un vector $\boldsymbol{B}_k$, de componente armonice și omogene de grad (întreg) k. Pentru $k \geqslant 0$, aceste componente sînt polinoame.

Ne propunem să determinăm anumiți operatori care să asocieze vectorului $\boldsymbol{B}_k$ — alți vectori, de asemenea armonici și de grad k. (Utilitatea acestor operatori se va evidenția în paragrafele următoare.)

Amintim că orice funcție armonică și omogenă de grad k are forma $R^k\, Y_k\,(\theta, \varphi)$, unde constantele arbitrare din (7.2.53) sînt presupuse ca incluse în expresia funcției $Y_k\,(\theta, \varphi)$.

Dar funcției Y_k i se poate asocia și funcția armonică $R^{-k-1}\, Y_k(\theta, \varphi)$. Prin urmare, împărțind o funcție armonică și omogenă de grad k la R^{2k+1}, se obține o funcție de asemenea armonică, și de grad $-k-1$. Tot astfel, înmulțind o funcție armonică și omogenă de grad $-k-1$ cu R^{2k+1}, căpătăm o funcție armonică și omogenă de grad k. Vom insista permanent asupra conservării simultane a *armonicității* și *omogenității* funcțiilor cu care operăm.

În particular, remarcăm că prin aplicarea unuia dintre operatorii grad, div sau rot, proprietățile de armonicitate și omogenitate se conservă (gradul reducîndu-se cu o unitate).

Să considerăm acum vectorul $\boldsymbol{B}_k$, pe care îl vom scrie

$$\boldsymbol{B}_k\,(x_1, x_2, x_3) = R^k\, \boldsymbol{Y}_k\,(\theta, \varphi), \tag{1}$$

unde am notat cu $\boldsymbol{Y}_k$ un vector ale cărui componente Y_{ki} sînt funcții sferice superficiale de ordin k.

Împărțind pe $\boldsymbol{B}_k$ la R^{2k+1}, obținem vectorul armonic

$$R^{-2k-1}\, \boldsymbol{B}_k = R^{-k-1}\, \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{B}_{-k-1}. \tag{2}$$

Mai departe, expresia div $(R^{-2k-1}\, \boldsymbol{B}_k)$ este un scalar armonic de grad $-k-2$; produsul R^{2k+3} div $(R^{-2k-1}\, \boldsymbol{B}_k)$ este un scalar armonic de grad $k+1$; în fine

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_k) = \operatorname{grad}\, [R^{2k+3} \operatorname{div}\, (R^{-2k-1}\, \boldsymbol{B}_k)] \tag{3}$$

este un vector armonic și omogen de grad k.

Pe de altă parte, scalarul div $\boldsymbol{B}_k$ este armonic şi de grad $k-1$. Împărţindu-l la $R^{2(k-1)+1} = R^{2k-1}$, obţinem un scalar armonic de grad $-k$, al cărui gradient este armonic şi de grad $-k-1$; în fine, înmulţindu-l pe acesta cu R^{2k+1}, obţinem vectorul armonic şi omogen de grad k:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k) = R^{2k+1} \operatorname{grad} (R^{-2k+1} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k). \tag{4}$$

Cei doi operatori (3) şi (4) asociază deci lui $\boldsymbol{B}_k$, nişte vectori de asemenea armonici şi omogeni, de acelaşi grad k. Aceşti operatori au fost introduşi de către A. Lurie [3] ca un mijloc de calcul comod în problema bulei. Pentru a-i explicita, vom folosi unele formule elementare de analiză vectorială, deja utilizate în § 7.8. Avem pe rînd

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_k) &= \operatorname{grad} [R^{2k+3} (R^{-2k-1} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k + \boldsymbol{B}_k \cdot \operatorname{grad} R^{-2k-1})] \\ &= \operatorname{grad} [R^2 \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k - (2k+1)\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}_k] \\ &= -(2k+1) \operatorname{grad} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}_k) + R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k + 2\, \boldsymbol{x} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k) &= R^{2k+1} [R^{-2k+1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k - (2k-1)\, R^{-2k-1}\, \boldsymbol{x} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k] \\ &= -(2k-1)\, \boldsymbol{x} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k + R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k. \end{aligned} \tag{6}$$

Luaţi separat, termenii din expresiile finale (5), (6) sînt tot omogeni şi de grad k, dar nu mai sînt în general armonici. În particular, se vede că unii din ei se regăsesc în ambele expresii.

Să calculăm şi rotaţionalul şi divergenţa vectorilor definiţi în (3) şi (4). Din (3) deducem imediat:

$$\operatorname{rot}\ \boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_k) = 0, \tag{7}$$

$$\operatorname{div}\ \boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_k) = \Delta\, [R^{2k+3} \operatorname{div}\ (R^{-2k-1} \boldsymbol{B}_k)] = 0. \tag{8}$$

Mai departe, avem

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k) = (\operatorname{grad}\ R^{2k+1}) \cdot \operatorname{grad}\ (R^{-2k+1}\ \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k) + \\ + R^{2k+1} \operatorname{div}\ \operatorname{grad}\ (R^{-2k+1} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k),\end{aligned}$$

unde ultimul termen este evident nul. În primul termen din al doilea membru, sîntem conduşi să facem uz de teorema lui Euler pentru funcţii omogene [1]):

$$\boldsymbol{x} \cdot \operatorname{grad}\ f_k = \sum_{i=1}^{3} x_i\, f_{k,i} = k\, f_k\,, \tag{9}$$

de unde urmează

$$\operatorname{div}\ \boldsymbol{T}\ (\boldsymbol{B}_k) = -k\ (2k+1) \operatorname{div}\ \boldsymbol{B}_k\,. \tag{10}$$

---

[1]) Se înţelege că nu avem nici un fel de sumare în raport cu k. Acolo unde este cazul, o astfel de sumare se indică cu semnul $\sum\limits_k$.

În sfîrşit avem şi

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k) = (\operatorname{grad} R^{2k+1}) \times \operatorname{grad} (R^{-2k+1} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k),$$

(întrucît un al doilea termen, conţinînd în factor rotaţionalul unui gradient, e nul). De aci urmează (deoarece avem $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = 0$):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k) = (2k + 1)\, \boldsymbol{x} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k . \tag{11}$$

§ 3. PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU BULA ELASTICĂ

Soluţia va fi căutată sub forma reprezentării lui Grodskii

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} - \frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{grad} (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B} + B_0). \tag{1}$$

Pentru $\boldsymbol{F} = 0$, funcţiile $\boldsymbol{B}$ şi B_0 sînt armonice, şi vor fi căutate sub forma unor serii de polinoame armonice. Prin analogie cu tehnica folosită în capitolele 5 şi 6, şi conform celor spuse în § 7.4, pag. 529, vom încerca să transferăm informaţiile de care dispunem (în speţă, deplasările la limită) asupra potenţialilor armonici $\boldsymbol{B}$ şi B_0. Prima problemă constă în determinarea coeficienţilor seriilor pentru $\boldsymbol{B}$ şi B_0; cea de-a doua, în studiul convergenţei seriilor astfel construite.

Să începem prin a pune potenţialii lui Grodskii sub forma

$$\boldsymbol{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{B}_k , \qquad B_0 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^0 , \tag{2}$$

unde componentele lui $\boldsymbol{B}_k$, precum şi B_k^0, sînt polinoame armonice de grad k. Introducînd (2) în (1), vom scrie

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_k , \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{B}_k - \frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{grad} (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k) - \frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{grad} B_{k-1}^0 . \tag{4}$$

În formula (4), primii doi termeni din membrul al doilea sînt omogeni şi de grad k, iar ultimul este omogen şi de grad $k-2$. Această deosebire va fi justificată ulterior. Termenul mijlociu din membrul al doilea *nu este* un vector armonic.

Să izolăm în $\boldsymbol{u}_k$ termenii armonici şi omogeni — operaţie pregătită prin raţionamentele din § 2. Întrucît singurul termen nearmonic din (4)

apare în ambele expresii (2.5), (2.6), valoarea lui se capătă eliminînd $\boldsymbol{x}$ div $\boldsymbol{B}_k$ din aceste două relații. După calcule elementare, obținem

$$\text{grad } (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}_k) = -\frac{1}{2k+1}\left[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_k) + \frac{2}{2k-1}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k)\right] + \\ + \frac{1}{2k-1} R^2 \text{ grad div } \boldsymbol{B}_k\,, \tag{5}$$

unde paranteza dreaptă din membrul al doilea este o componentă armonică și omogenă de grad k a vectorului grad $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}_k)$. Introducînd (5) în (4), vom scrie acum

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{U}_k - \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{R^2}{2k-1} \text{ grad div } \boldsymbol{B}_k + \text{grad } B^0_{k-1}\right], \tag{6}$$

unde am notat

$$\boldsymbol{U}_k = \boldsymbol{B}_k + \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{1}{2k+1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_k) + \frac{2}{4k^2-1}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k)\right]. \tag{7}$$

Evident, $\boldsymbol{U}_k$ este un vector armonic de grad k. Dacă am cunoaște valoarea sa la limită, ar rămîne de rezolvat o problemă Dirichlet *pentru ecuația lui Laplace* pentru bulă — problemă a cărei soluție este cunoscută (vezi indicația de la finele § 7.2, pag. 523; pentru detalii, vezi de ex. V. Smirnov [2], vol. 3, partea 2, pct. 136).

Pentru a transfera datele la limită — formulate pentru $\boldsymbol{u}_k$ — asupra componentei sale armonice $\boldsymbol{U}_k$, este suficient să alegem B_0 în așa fel, încît paranteza din membrul al doilea din (6) să se anuleze pe frontiera bulei, fie ea $R = R_0$. În principiu, lucrul este posibil, întrucît bula este un domeniu convex (vezi § 7.5).

Primul termen din paranteza dreaptă considerată este omogen și de grad k, dar nu și armonic. Pentru $R = R_0$, el ia valoarea $(2k-1)^{-1}$ $R_0^2\,(\text{grad div } \boldsymbol{B}_k)\,|_{R=R_0}$, care poate fi privită drept valoare la limită a vectorului *armonic* $(2k-1)^{-1}\, R_0^2$ grad div $\boldsymbol{B}_k$, de componente de grad $k-2$. Anularea parantezei drepte impune condiția

$$\text{grad } B^0_{k-1}\,|_{R=R_0} = -(2k-1)^{-1} R_0^2 \text{ grad div } \boldsymbol{B}_k\,|_{R=R_0}\,. \tag{8}$$

Întrucît ambii membri din (8) sînt valori la limită ale unor funcții *armonice* în bula considerată, rezultă (în virtutea unicității soluției problemei lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace) că cele două funcții *coincid și în bula de rază* R_0, așadar că, integrînd, avem

$$B^0_{k-1} = -(2k-1)^{-1} R_0^2 \text{ div } \boldsymbol{B}_k\,. \tag{9}$$

Aceasta este o consecință evidentă a înlocuirii lui R^2 prin R_0^2 în condiția la limită. Rezultatul justifică alegerea făcută în (4) pentru gradul polinomului provenit din B_0.

Acest raționament constituie un exemplu de utilizare a rezultatului general al lui Eubanks și Sternberg. El arată totodată justețea ideii lui Papkovici (vezi § 7.5, pag. 537).

Să introducem acum (9) în (6). Obținem astfel

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{U}_k - [1/4(1-\nu)(2k-1)]\,(R^2 - R_0^2)\,\text{grad div}\,\boldsymbol{B}_k\,. \qquad (10)$$

Acum este momentul să facem uz de datele la limită :

$$\boldsymbol{u}\,|_{R=R_0} = \boldsymbol{g}\,(\theta, \varphi). \qquad (11)$$

În acest scop, să dezvoltăm vectorul $\boldsymbol{g}$ în serie de vectori sferici superficiali

$$\boldsymbol{g}(\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_k\,(\theta,\varphi). \qquad (12)$$

Desigur, pentru fiecare din cele 3 componente ale vectorului $\boldsymbol{g}$ și pentru fiecare indice k, obținem $2k+1$ coeficienți, (vezi (7.2.55)). Vom considera acești coeficienți ca incluși în expresiile $\boldsymbol{Y}_k\,(\theta, \varphi)$.

Pe de altă parte, luînd $R = R_0$ în (10), obținem

$$\boldsymbol{u}_k\,|_{R=R_0} = \boldsymbol{U}_k\,|_{R=R_0}\,, \qquad (13)$$

astfel că din (3) și (11)—(13) conchidem că

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{U}_k\,|_{R=R_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_k\,(\theta, \varphi). \qquad (14)$$

În primul membru, apare o dezvoltare în serie de vectori armonici omogeni polinomiali pe sfera frontieră. Din proprietățile cunoscute ale sistemelor de funcții sferice superficiale (vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], anexa 2, § 2), egalitatea (14) este posibilă dacă și numai dacă termenii corespunzători sînt egali :

$$\boldsymbol{U}_k\,|_{R=R_0} = \boldsymbol{Y}_k\,(\theta,\varphi). \qquad (15)$$

Soluția acestei probleme la limită interioare este evident

$$\boldsymbol{U}_k\,(x_1,\; x_2,\; x_3) = (R/R_0)^k\,\boldsymbol{Y}_k(\theta,\varphi), \qquad (16)$$

astfel că primul termen al expresiei (10) este acum efectiv cunoscut.

Pentru a-l găsi pe cel de-al doilea, s-ar părea că trebuie să cunoaștem vectorul $\boldsymbol{B}_k$, așadar să rezolvăm relația (7) ca ecuație în $\boldsymbol{B}_k$. În fapt, în (10) intervine numai div $\boldsymbol{B}_k$. Aplicînd operatorul div în ambii membri din (7), și ținînd seama de (2.8) și (2.10), obținem ușor

$$\text{div}\,\boldsymbol{B}_k = \{[2(2k-1)\,(1-\nu)]/[2(2k-1)(1-\nu) - k]\}\,\text{div}\,\boldsymbol{U}_k. \qquad (17)$$

Introducînd această expresie în (10) și făcînd uz de (3), deducem

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{U}_k - \frac{1}{2}\,(R^2 - R_0^2) \sum_{k=0}^{\infty} [2(2k-1)(1-\nu) - k]^{-1}\,\text{grad div}\,\boldsymbol{U}_k\,,$$

unde a doua sumă are termeni ne-nuli numai pentru $k \geqslant 2$. Înlocuind aci pe k prin $k+2$ şi ţinînd seama de (16), obţinem soluţia problemei sub forma (compară cu § 6.14 relativ la coroana circulară)

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (R/R_0)^k \, Y_k(\theta,\varphi) -$$

$$-\frac{1}{2}(R^2 - R_0^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{grad div } [(R/R_0)^{k+2} \, \boldsymbol{Y}_{k+2}(\theta, \varphi)]}{2(2k+3)(1-\nu) - k - 2}. \tag{18}$$

OBSERVAŢIA. 1. Pentru ca seria (18) să fie efectiv soluţia problemei, trebuie să se demonstreze că ea converge şi că suma ei este de clasă C^2, rezultat fără de care algoritmul de mai sus rămîne formal. Problema este similară celei din § 6.14, pp. 442 – 445.

Convergenţa seriei din (12) este aci asigurată dacă $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\theta, \varphi)$ satisface condiţiile din § 7.2, pag. 522. Aceasta asigură mai departe convergenţa primei serii din (18) pentru $R \leqslant R_0$. Dar pentru a demonstra convergenţa celei de a doua, sînt necesare noi condiţii pentru vectorul $\boldsymbol{g}$, de unde să urmeze evaluări analoge cu (6.14.42) – (6.14.49). Chestiunea nu e încă elucidată.

Merită totuşi de remarcat că metoda conduce la o soluţie convergentă chiar pentru date la limită ce nu satisfac nici pe departe astfel de condiţii de regularitate. (Vezi de ex. A. Lurie [4], §§ 6.7 şi 6.8 ; compară mai sus cu observaţia din § 6.14, pag. 444.)

OBSERVAŢIA 2. Odată demonstrată convergenţa seriei de mai sus, orice sumă parţială a ei poate fi privită ca soluţie aproximativă a aceleiaşi probleme.

OBSERVAŢIA 3. În § 7.2 am văzut că aceeaşi funcţie Y_k permite să construim *două* funcţii armonice : $R^k Y_k$ şi $R^{-k-1} Y_k$, dintre care a doua este analitică în exteriorul oricărei sfere cu centrul în origine. Aceasta permite rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru spaţiul elastic cu o cavitate sferică, prin simpla înlocuire a lui k prin $-k-1$ în toate relaţiile de mai sus. Pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice S_0, S_1, rămîne de suprapus o soluţie corespunzînd exteriorului sferei interioare S_1 şi una care corespunde interiorului sferei exterioare S_0 ; coeficienţii se determină din cele două condiţii la limită, scrise pe S_0 şi S_1.

§ 4. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU BULA ELASTICĂ

Spre deosebire de cazul plan, problema lui Neumann în $\mathcal{E}_3$ trebuie rezolvată de obicei pe căi deosebite de cele urmate în problema lui Dirichlet. Soluţia lui Lurie în problema pentru bulă prezintă tocmai avantajul unei strînse analogii cu cea din problema lui Dirichlet : şi în acest caz soluţia se caută sub forma (3.1) – (3.4), se separă componenta armonică a expresiei ale cărei valori la limită sînt date, şi aceasta conduce din nou la anumite probleme Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace. Dar această separare nu se mai efectuează în expresia relativ simplă (3.4) : aci trebuie să scriem vectorul tensiune prin intermediul funcţiilor $\boldsymbol{B}$ şi B_0, şi abia în expresia acestuia să izolăm componenta armonică.

Să începem prin a exprima $\boldsymbol{\sigma}_n$ prin intermediul lui $\boldsymbol{B}_k$ şi B^0_{k-1}. Vom face uz de (7.1.9), unde este comod să ţinem seama de (7.2.4) :

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) = 2\mu\left[\nu(1-2\nu)^{-1}\boldsymbol{n}\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\right]. \tag{1}$$

Va fi suficient să calculăm vectorul tensiune *pe o sferă*, aşadar pentru $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/R$, astfel că (1) devine :

$$\frac{1}{2\mu} R\,\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) = \nu(1-2\nu)^{-1}\boldsymbol{x}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{x}\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{u} +$$

$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,. \tag{2}$$

Ţinînd seama de (3.1) — (3.4), ne vom mărgini la a efectua calculele pentru

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{B}_k - \frac{1}{4(1-\nu)}\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k + B^0_{k-1}). \tag{3}$$

Pentru a introduce (3) în (2), vom calcula mai întîi

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}_k = \frac{1}{2}(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}\ \operatorname{div}\boldsymbol{B}_k \tag{4}$$

(unde am ţinut seama de (7.4.9)). Mai departe, din (3) urmează

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_k = \operatorname{rot}\boldsymbol{B}_k\,. \tag{5}$$

Cantitatea $(\boldsymbol{x}\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{u}_k$ se calculează ţinînd seama de (2.9) şi de faptul că primii doi termeni din membrul al doilea din (3) sînt funcţii de grad k, iar al treilea este de grad $k-2$:

$$(\boldsymbol{x}\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{u}_k = k\boldsymbol{B}_k - \frac{1}{4(1-\nu)}k\ \operatorname{grad}\ (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k) -$$

$$-\frac{1}{4(1-\nu)}(k-2)\ \operatorname{grad}\ B^0_{k-1}. \tag{6}$$

Introducînd acum (3) — (6) în (2), obţinem pentru $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/R$:

$$\frac{1}{2\mu}R\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}_k) = \frac{\nu}{2(1-\nu)}\boldsymbol{x}\ \operatorname{div}\boldsymbol{B}_k + k\boldsymbol{B}_k - \frac{1}{4(1-\nu)}k\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k) -$$

$$-\frac{1}{4(1-\nu)}(k-2)\ \operatorname{grad} B^0_{k-1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}\times\operatorname{rot}\ \boldsymbol{B}_k\,. \tag{7}$$

Pentru a izola aci componentele armonice, vom observa că (2.6) duce la

$$\boldsymbol{x} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k = -(2k-1)^{-1} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k) + (2k-1)^{-1} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_k . \tag{8}$$

Mai departe, pentru termenul grad $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k)$ dispunem de relația (3.5). În fine, pentru a calcula ultimul termen din (7), vom ține seama că

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k) = (\boldsymbol{x}\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{B}_k + (\boldsymbol{B}_k\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{B}_k + \boldsymbol{B}_k\times\operatorname{rot}\boldsymbol{x} \tag{9}$$

(vezi de ex. N. Kocin [1], § 17, pct. 1). Or, avem pe rînd

$$(\boldsymbol{x}\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{B}_k = x_i\,\boldsymbol{B}_{k,i} = k\boldsymbol{B}_k , \quad \operatorname{rot}\,\boldsymbol{x} = 0,$$

$$(\boldsymbol{B}_k\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{x} = B_{ki}\,(\boldsymbol{i}_j\,x_j)_{,i} = B_{kj}\,\boldsymbol{i}_j = \boldsymbol{B}_k ,$$

astfel că (9) conduce la

$$\boldsymbol{x}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{B}_k = \operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k) - (k+1)\,\boldsymbol{B}_k . \tag{10}$$

Introducînd acum (8), (10) și (3.5) în (7), obținem

$$\frac{1}{2\mu} R\,\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{H}_k - \frac{1}{4(1-\nu)}(k-2)\,[(2k-1)^{-1}R^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{B}_k + \operatorname{grad} B^0_{k-1}], \tag{11}$$

unde am notat

$$\boldsymbol{H}_k = \frac{1}{2}(k-1)\boldsymbol{B}_k + \frac{k-2+2\nu}{4(1-\nu)(2k+1)}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_k) + \frac{k(1-2\nu)-2+\nu}{2(1-\nu)(4k^2-1)}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k) . \tag{12}$$

Evident, $\boldsymbol{H}_k$ este un vector armonic de grad k, iar descompunerea (11), (12) este analogă cu (3.6), (3.7), și poate fi utilizată în același mod. Mai mult, se vede că paranteza dreaptă din (11) coincide cu cea din (3.6), astfel că toate raționamentele din § 3, pag. 571, relative la determinarea scalarului B^0_{k-1}, rămîn valabile.

Putem face uz acum de datele la limită de care dispunem :

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\,|_{R=R_0} = \boldsymbol{f}(\theta, \varphi). \tag{13}$$

În acest scop, vom dezvolta vectorul $R_0\boldsymbol{f}(\theta, \varphi)/2\mu$ (compară cu primul membru din (11)) în serie de vectori sferici superficiali

$$\frac{1}{2\mu} R_0\boldsymbol{f}(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi). \tag{14}$$

Mai departe, alegînd pe B^0_{k-1} sub forma (3.9), din (11) urmează

$$\frac{1}{2\mu} R\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}_k)\,|_{R=R_0} = \boldsymbol{H}_k\,|_{R=R_0}, \tag{15}$$

astfel că din (3.3) şi (13) — (15) deducem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{H}_k|_{R=R_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi). \tag{16}$$

În deplină analogie cu (3.15), putem scrie $\boldsymbol{H}_k|_{R=R_0} = \boldsymbol{Y}_k$, şi deci :

$$\boldsymbol{H}_k(x_1, x_2, x_3) = (R/R_0)^k \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi). \tag{17}$$

Cu aceasta, componenta armonică $\boldsymbol{H}_k$ a expresiei (11) este determinată. Pentru a o găsi pe cea ne-armonică, este suficient — ca şi în § 3 — să calculăm div $\boldsymbol{B}_k$. În acest scop, vom aplica operatorul div în ambii membri din (12). Ţinînd seama de (2.8) şi (2.10), deducem uşor

$$\text{div } \boldsymbol{B}_k = \{[2(1-\nu)(2k-1)]/[k^2-(1-2\nu)k+1-\nu]\} \text{ div } \boldsymbol{H}_k. \tag{18}$$

Introducînd în fine (3.9), (17) şi (18) în (11), înmulţind cu $2\mu/R$ şi sumînd în raport cu k, obţinem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u}) &= 2\mu R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (R/R_0)^k \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi) - \\ &- \frac{1}{2}\mu(R^2 - R_0^2) \sum_{k=0}^{\infty} \{[k-2]/[k^2-(1-2\nu)k+1-\nu]\}\times \\ &\times \text{grad div } [(R/R_0)^k \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi)]. \end{aligned} \tag{19}$$

Cu aceasta, dispunem deci de valorile $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})$ *pentru* $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/R$, aşadar *numai* pe sfere concentrice de raze $R \leqslant R_0$. Cunoaşterea componentelor tensiunii nu rezultă de aci, astfel că ecuaţiile fizico-geometrice nu pot fi integrate.

De aceea, vectorul armonic $\boldsymbol{H}_k$ odată determinat în (17), să ne fixăm atenţia asupra rezolvării relaţiei (12), privită ca o ecuaţie în raport cu $\boldsymbol{B}_k$.

Formula (18) dă imediat div $\boldsymbol{B}_k$ ca funcţie de $\boldsymbol{H}_k$.

Aplicînd operaţia rot în ambii membri din (12) şi ţinînd seama de (2.7) şi (2.11), căpătăm mai întîi

$$\frac{1}{2}(k-1) \text{ rot } \boldsymbol{B}_k + \frac{k(1-2\nu)-2+\nu}{2(1-\nu)(2k-1)} \boldsymbol{x} \times \text{grad div } \boldsymbol{B}_k = \text{rot } \boldsymbol{H}_k \tag{20}$$

şi mai departe, introducînd aci div $\boldsymbol{B}_k$ din (18) :

$$\text{rot } \boldsymbol{B}_k = \frac{2}{k-1}\left[\text{rot } \boldsymbol{H}_k - \frac{k(1-2\nu)-2+\nu}{k^2-(1-2\nu)k+1-\nu} \boldsymbol{x} \times \text{grad div } \boldsymbol{H}_k\right]. \tag{21}$$

Formulele (18) şi (21) dau divergenţa şi rotaţionalul vectorului $\boldsymbol{B}_k$ prin intermediul vectorului *cunoscut* $\boldsymbol{H}_k$, ceea ce ar permite să se exprime $\boldsymbol{B}_k$ sub forma unei sume de potenţiali newtonieni (vezi de ex. N. Kocin [1], § 19).

În fapt însă, vectorul $\boldsymbol{B}_k$ poate fi obținut fără nici o operație de integrare. În acest scop, să introducem în (12) expresiile $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_k)$ din (2.5) (unde vom fi înlocuit pe grad $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k)$ cu ajutorul formulei (10)), și $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_k)$ din (2.6). În felul acesta, vectorul $\boldsymbol{H}_k$ va apare ca sumă a unor termeni de forma $\boldsymbol{B}_k$, $\boldsymbol{x}\times$ rot $\boldsymbol{B}_k$, $\boldsymbol{x}$ div $\boldsymbol{B}_k$ și R^2 grad div $\boldsymbol{B}_k$. Calculînd al doilea termen $\boldsymbol{x}\times$ rot $\boldsymbol{B}_k$ cu ajutorul relației (21), vor apare mai departe termeni de forma $\boldsymbol{x}\times$ rot $\boldsymbol{H}_k$ și $\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{x}\times$ grad div $\boldsymbol{H}_k)$ ceea ce, după efectuarea dublului produs (vezi de pildă (7.8.30)), conduce la termeni de forma $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\cdot$ grad div $\boldsymbol{H}_k) = (k-1)\,\boldsymbol{x}$ div $\boldsymbol{H}_k$ (întrucît div $\boldsymbol{H}_k$ este un polinom omogen de grad $k-1$), și la termeni de forma R^2 grad div $\boldsymbol{H}_k$. Calculînd al treilea termen $\boldsymbol{x}$ div $\boldsymbol{B}_k$, obținem cu ajutorul relației (18) un termen de forma $\boldsymbol{x}$ div $\boldsymbol{H}_k$. În fine, cel de al patrulea termen R^2 grad div $\boldsymbol{B}_k$ va da, în virtutea aceleiași relații (18), un termen de forma R^2 grad div $\boldsymbol{H}_k$.

În definitiv, relația (12) capătă astfel forma unei expresii liniare de legătură între vectorii

$$\boldsymbol{H}_k,\ \boldsymbol{B}_k,\ \boldsymbol{x}\times \text{rot}\ \boldsymbol{H}_k,\ \boldsymbol{x}\ \text{div}\ \boldsymbol{H}_k,\ \text{și}\ R^2\ \text{grad div}\ \boldsymbol{H}_k.$$

Efectuînd calculele — obositoare, dar elementare — deducem

$$\boldsymbol{B}_k = \frac{2(1-\nu)}{k(3-4\nu-k)}\left[2\boldsymbol{H}_k - \frac{2-2\nu-k}{(1-\nu)(k-1)}\boldsymbol{x}\times\text{rot}\ \boldsymbol{H}_k + \right.$$
$$+\frac{(2k-1)(k-4+4\nu)\nu+(k-2)(2-2\nu-k)}{(1-\nu)\,[k^2-(1-2\nu)k+1-\nu]}\boldsymbol{x}\ \text{div}\ \boldsymbol{H}_k +$$
$$\left.+\frac{(k\nu-1+\nu)(k-2)+(2k-1)(2-2\nu-k)\nu}{(1-\nu)(k-1)\,[k^2-(1-2\nu)k+1-\nu]}R^2\ \text{grad div}\ \boldsymbol{H}_k\right]. \tag{22}$$

Dat fiind că vectorii $\boldsymbol{H}_k$ sînt cunoscuți sub forma (17), am obținut — fără nici o operație de integrare în plus — vectorii $\boldsymbol{B}_k$.

Introducînd acum (3.9) în (3.4) vom avea (compară cu (3.10)!)

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{B}_k - \frac{1}{4(1-\nu)}\text{grad}\ (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k) + \frac{1}{4(1-\nu)}(2k-1)^{-1}R_0^2\ \text{grad div}\ \boldsymbol{B}_k. \tag{23}$$

Să punem aci termenul grad $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_k)$ sub forma ce rezultă din (10), așadar conținînd un termen de forma $\boldsymbol{x}\times$ rot $\boldsymbol{B}_k$ și un altul de forma $\boldsymbol{B}_k$. Mai departe, să introducem în (23) vectorul $\boldsymbol{B}_k$ din (22), vectorul $\boldsymbol{x}\times$ rot $\boldsymbol{B}_k$ rezultînd din (21), și grad div $\boldsymbol{B}_k$ ce decurge din (18). În expresia finală a vectorului $\boldsymbol{u}_k$ vor apare deci aceiași termeni ca cei din expresia lui $\boldsymbol{B}_k$, plus un termen de forma R_0^2 grad div $\boldsymbol{H}_k$, provenit din ultimul termen din

(23). Calculînd coeficienții cu care toți acești termeni intervin în expresia finală a vectorului $\boldsymbol{u}_k$, se obține

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{1}{k}\boldsymbol{H}_k - \frac{1}{k(k-1)}\boldsymbol{x}\times \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_k + \frac{(1-4\nu)k-2(1-\nu)}{k[k^2-(1-2\nu)k+1-\nu]}\boldsymbol{x}\operatorname{div}\boldsymbol{H}_k +$$
$$+\frac{2k\nu-\nu+1}{k(k-1)[k^2-(1-2\nu)k+1-\nu]}R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H}_k -$$
$$-\frac{R^2-R_0^2}{2[k^2-(1-2\nu)k+1-\nu]}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H}_k. \quad (24)$$

Cu aceasta, soluția este efectiv cunoscută sub forma

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{u}_k, \quad (25)$$

unde $\boldsymbol{H}_k$ sînt dați de (17), iar Y_k — de (14). Singurele operații de integrare sînt cele necesare pentru dezvoltarea în serie a datelor la limită.

OBSERVAȚIE. Ca și pentru problema lui Dirichlet, chestiunea convergenței rămîne deschisă. Reținînd în (25) un număr finit de termeni, se obține și aci o soluție aproximativă a problemei lui Neumann.

Aceeași tehnică poate fi folosită pentru a rezolva problema lui Neumann pentru spațiul elastic cu o cavitate sferică (pentru aceasta, trebuie să înlocuim peste tot indicele k cu $-k-1$), precum și pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice (așa numita „problemă a lui Lamé", a cărei variantă plană a fost examinată la finele § 6.14).

Făcînd raza sferei interioare să tindă la zero, și a celei exterioare, la infinit, se pot obține soluții ale problemei spațiului elastic supus unor acțiuni mecanice concentrate de natură mai complicată decît forța concentrată. (Vezi de ex. A. Lurie [4], finele cap. 8.)

Aceeași soluție rezolvă și problema concentrării tensiunilor în vecinătatea unei cavități sferice (vezi § 6, exemplul ***b***).

Analogia dintre modul de rezolvare al problemei lui Dirichlet și al problemei lui Neumann este evidentă; totuși ea nu merge atît de departe ca în cazul problemei plane, pentru a permite studiul de probleme mixte cu date de tip Dirichlet pe una din sfere, și de tip Neumann pe cealaltă.

§ 5. CONDIȚII NECESARE DE EXISTENȚĂ A SOLUȚIEI PROBLEMEI LUI NEUMANN

a) Condiții de existență

Aparent, formulele (4.24), (4.25) determină pe deplin vectorul deplasare $\boldsymbol{u}$. Dar soluția problemei lui Neumann este cunoscută numai abstracție făcînd de o roto-translație rigidă; iar pentru ca această soluție

să existe, trebuie ca (dacă $\boldsymbol{F} = 0$) forțele superficiale să formeze un sistem static echivalent cu zero. (Vezi § 4.4.)

Să examinăm condițiile impuse datelor la limită (deci funcțiilor Y_k) pentru ca soluția să aibă sens, şi să găsim acele componente ale deplasării pe care relațiile din § 4 *nu le determină*.

Pentru $\boldsymbol{F} = 0$, condițiile necesare de existență au forma

$$\iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}S = 0, \tag{1}$$

$$\iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}S = 0. \tag{2}$$

Întrucît din (4.13) şi (4.14) urmează

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\,|_{R=R_0} = 2\mu R_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi), \tag{3}$$

relația (1) devine

$$2\mu R_0^{-1} \iint_{\mathscr{S}} \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi)\, \mathrm{d}S = 2\mu R_0 \iint_{S_1} \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi)\, \mathrm{d}S_1 = 0, \tag{4}$$

unde S_1 este sfera unitate $S(0,1)$. Datorită ortogonalității sistemului funcțiilor sferice superficiale, şi întrucît $\boldsymbol{Y}_0(\theta, \varphi) = \text{const.}$, putem scrie

$$\iint_{S_1} Y_{ki}(\theta, \varphi)\, \mathrm{d}S_1 = 1/Y_{0j}(\theta, \varphi) \iint_{S_1} Y_{ki}(\theta, \varphi)\, Y_{0j}(\theta, \varphi)\, \mathrm{d}S_1 = 0 \tag{5}$$

pentru orice $k \neq 0$, şi $i, j = 1,2,3$. Prin urmare, (4) se reduce la

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{Y}_0(\theta, \varphi)\, \mathrm{d}S_1 = 0, \tag{6}$$

de unde, întrucît integrandul este constant, urmează

$$\boldsymbol{Y}_0(\theta, \varphi) = 0. \tag{7}$$

Această relație are o primă consecință importantă: introducînd (7) în (4.19), se vede că componentele tensiunii rămîn mărginite în origine.

Mai departe, introducînd (3) în (2), obținem

$$2\mu R_0^{-1} \iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{x} \times \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi)\, \mathrm{d}S = 2\mu R_0^2 \iint_{S_1} \boldsymbol{x} \times \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_k(\theta, \varphi)\, \mathrm{d}S_1 = 0. \tag{8}$$

Dar pe sfera S_1 vectorul $\boldsymbol{x}$ este, evident, un vector sferic superficial de ordinul 1, astfel că (8) se reduce la

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{Y}_1(\theta, \varphi)\,\mathrm{d}S_1 = 0. \tag{9}$$

Mai departe, întrucît pe S_1 avem $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n}$, din (7.2.9) urmează :

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{Y}_1 \mathrm{d}S_1 = \iint_{S_1} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{Y}_1\,\mathrm{d}S_1 = \iiint_{B_1} \mathrm{rot}\,[(R/R_0)\,\boldsymbol{Y}_1]\,\mathrm{d}V = 0, \tag{10}$$

unde $(R/R_0)\,\boldsymbol{Y}_1$ este *una* dintre funcțiile regulate în bula unitate $\boldsymbol{B}_1$ și care iau pe frontiera acesteia valoarea $\boldsymbol{Y}_1$. Întrucît din (4.17) avem

$$\boldsymbol{H}_1 = (R/R_0)\,\boldsymbol{Y}_1, \tag{11}$$

relația (10) conduce la condiția

$$\iiint_{B_1} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_1\,\mathrm{d}V = 0. \tag{12}$$

Or, vectorul $\boldsymbol{H}_1$ este un vector omogen de grad 1, așadar de rotațional constant, astfel că (12) conduce la

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_1 = 0, \tag{13}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\boldsymbol{H}_1 = \mathrm{grad}\,h(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{14}$$

unde h trebuie să fie un polinom omogen de gradul al doilea :

$$h(x_1,\ x_2,\ x_3) = \frac{1}{2}\,h_{ij}\,x_i x_j,\quad h_{ij} = h_{ji}. \tag{15}$$

Relațiile (7), (11) și (14) arată astfel că datele la limită trebuie să satisfacă condițiile

$$\boldsymbol{Y}_0 = 0,\quad \boldsymbol{Y}_1 = (R_0/R)\,\mathrm{grad}\,h|_{R=R_0}. \tag{16}$$

Orice vector $\boldsymbol{Y}_k$ fiind definit de $3(2k+1)$ constante, urmează că prima relație (16) este o condiție de anulare a trei constante; polinomul h fiind la rîndul său definit de 6 coeficienți, a doua relație (16) revine la a reduce cele 9 constante ce definesc pe $\boldsymbol{Y}_1$, la numai 6. Relațiile (16) reprezintă deci 6 condiții impuse coeficienților termenilor constant și liniar ai dezvoltării în serie a datelor la limită.

Să trecem acum la studiul expresiilor (4.22) ce definesc vectorii $\boldsymbol{B}_k$ (L. Solomon [7]). Evident, *ele nu au sens pentru* $k = 0$, $k = 1$. Ne vom opri ulterior asupra determinării vectorilor $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{B}_1$.

Pentru $k > 1$, dacă am avea $k^2 - (1 - 2\nu)\, k + 1 - \nu = 0$, ar urma $\nu = -(k^2 - k + 1)/(2k - 1)$, ceea ce ar conduce la valori $\nu < 0$ lipsite de sens. Pe de altă parte, dacă am avea $3 - 4\nu - k = 0$, am obține $\nu = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} k$, unde singura valoare posiblă este $\nu = 0{,}25$, corespunzătoare lui $k = 2$. Prin urmare, în acest caz vectorul $\boldsymbol{B}_2$ nu poate fi determinat.

Aceasta nu este o nedeterminare aparentă în (4.22) : factorul $(3 - 4\nu - k)$ apare la numitorul *întregii* expresii din membrul al doilea, așadar el este coeficientul lui $\boldsymbol{B}_k$ în expresia liniară despre care am vorbit înainte de (4.22), expresie din care $\boldsymbol{B}_2$ *lipsește* dacă $\nu = 0{,}25$. Întrucît paranteza dreaptă din (4.22) *nu e* identic nulă pentru $\nu = 0{,}25$ și $k = 2$, rezultă că este imposibil de a găsi soluția *pe această cale*. Faptul nu e surprinzător : teorema lui Eubanks și Sternberg își pierde valabilitatea pentru $\nu = 0{,}25$, și nu mai garantează posibilitatea de a reduce numărul funcțiilor lui Grodskii de la 4 la 3 — reducere admisă odată cu (3.9).

Fie acum $\nu \neq 0{,}25$. În acest caz relația (4.22) are sens pentru toți $k \geqslant 2$, și ne rămîne să găsim $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{B}_1$. Scriind (2.5), (2.6) pentru $k = 0$, $k = 1$, găsim

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_0) = -\operatorname{grad}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}_0) = -\boldsymbol{B}_0, \\ &\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_1) = -3\operatorname{grad}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}_1) + 2\boldsymbol{x}\operatorname{div}\boldsymbol{B}_1, \\ &\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_0) = 0, \quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_1) = -\boldsymbol{x}\operatorname{div}\boldsymbol{B}_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Introducînd aceste valori în expresia (4.12) scrisă de asemenea pentru $k = 0$, $k = 1$, obținem

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_0) = \boldsymbol{H}_0, \tag{18}$$

$$-[(1 - 2\nu)/12\,(1 - \nu)]\,\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B}_1) - [(1 + \nu)/6\,(1 - \nu)]\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}_1) = \boldsymbol{H}_1. \tag{19}$$

Ținînd seama de relațiile (4.17) și (7), avem desigur

$$\boldsymbol{H}_0 = 0\,; \tag{20}$$

introducînd acum prima relație (17) și valoarea (20) în (18), obținem identitatea $0 \equiv 0$. Prin urmare, vectorul $\boldsymbol{B}_0$ *nu poate fi determinat* din cunoașterea lui $\boldsymbol{H}_0 = 0$, corespunzător la rîndul său condițiilor necesare de existență a soluției. Altfel spus, oricare ar fi datele la limită în tensiuni, vectorul $\boldsymbol{B}_0$ nu intervine în aceste date, și deci *el poate fi ales arbitrar.*

Pentru a determina vectorul $\boldsymbol{B}_1$, să introducem a doua și a patra relație (17) în (19); ținînd seama aci de (4.18) și de (14), deducem

$$[(1 - 2\nu)/4\,(1 - \nu)]\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_1) = \operatorname{grad} h - [\nu/(1 + \nu)]\,\boldsymbol{x}\operatorname{div}\operatorname{grad} h. \tag{21}$$

Întrucît vectorul $\boldsymbol{B}_1$ este cunoscut (ca și $\boldsymbol{Y}_1$) prin darea a 9 constante, iar în membrul al doilea din (21) apar numai 6 constante cunoscute, rezultă că $\boldsymbol{B}_1$ nu poate fi determinat pe deplin.

Într-adevăr, din (15) avem

$$\text{grad } h = h_{ij}\, x_i\, \boldsymbol{i}_j, \qquad \text{div grad } h = h_{ii}. \tag{22}$$

Pe de altă parte, vectorul $\boldsymbol{B}_1$ are forma

$$\boldsymbol{B}_1 = b_{ij}\, x_i\, \boldsymbol{i}_j \tag{23}$$

(coeficienții b_{ij} nu sînt simetrici). Obținem deci pe rînd

$$\text{grad } (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}_1) = \boldsymbol{i}_l\,(b_{ij}\, x_i\, x_j)_{,l} = (b_{il} + b_{li})\, x_i\, \boldsymbol{i}_l, \tag{24}$$

astfel că ecuația (21) devine

$$(b_{ij} + b_{ji})\, x_i\, \boldsymbol{i}_j = [4(1-\nu)/(1-2\nu)]\,[h_{ij}\, x_i\, \boldsymbol{i}_j - \nu\,(1+\nu)^{-1}\, h_{ii}\, x_j\, \boldsymbol{i}_j], \tag{25}$$

ceea ce dă imediat cele 6 sume $b_{ij} + b_{ji}$. Acestea sînt *singurele* relații între $\boldsymbol{B}_1$ și $\boldsymbol{H}_1$. Prin urmare, constantele b_{ij} sînt determinate numai pentru $i = j$; constantele $b_{ij}\,(i \neq j)$ rămîn necunoscute, și supuse numai condiției ca sumele $b_{ij} + b_{ji}$ să aibă valori date. Acestea din urmă nu se schimbă dacă adăugăm lui $\boldsymbol{B}_1$ un vector $\boldsymbol{B}_1'$ de componente

$$B_{11}' = -\, q_3 x_2 + q_2 x_3, \quad B_{12}' = q_3 x_1 - q_1 x_3, \quad B_{13}' = -\, q_2 x_1 + q_1 x_2, \tag{26}$$

ceea ce, notînd cu $\boldsymbol{q}$ vectorul de componente (q_1, q_2, q_3), se scrie

$$\boldsymbol{B}_1' = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{x}. \tag{27}$$

Prin urmare, $\boldsymbol{B}_1$ poate fi determinat numai abstracție făcînd de un termen $\boldsymbol{B}_1'$, care poate fi adăugat lui $\boldsymbol{B}_1$, fără a altera datele la limită. Mai remarcăm că cunoașterea sumelor $b_{ij} + b_{ji}$ fără cunoașterea termenilor b_{ij} în parte, face imposibilă calcularea expresiei rot $\boldsymbol{B}_1$ — ceea ce era de prevăzut, întrucît (4.21) nu are sens pentru $k = 1$.

Să facem acum uz de expresiile lui $\boldsymbol{B}_0$ și $\boldsymbol{B}_1$ pentru a determina $\boldsymbol{u}_0$ și $\boldsymbol{u}_1$. Se înțelege că trebuie să revenim acum la (4.23). Întrucît $\boldsymbol{B}_0$ este constant, deducem mai întîi

$$\boldsymbol{u}_0 = [(3-4\nu)/4(1-\nu)]\,\boldsymbol{B}_0, \tag{28}$$

astfel că $\boldsymbol{u}_0$ rezultă a fi un vector constant *arbitrar*.

Pentru $k = 1$, vom calcula aci numai componenta corespunzătoare vectorului $\boldsymbol{B}_1'$. (Componenta care rămîne efectiv în expresia finală $\boldsymbol{u}_1$ se găsește pornind de la formula (23) pentru $\boldsymbol{B}_1$, unde sumele $b_{ij} + b_{ji}$ decurg din (25).) Din (4.23) și (27) obținem deci

$$\boldsymbol{u}_1' = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{x} - \frac{1}{4(1-\nu)}\,\text{grad }[\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{x}) + \text{grad div } \boldsymbol{B}_1'];$$

întrucît produsul $[\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{x})]$ și scalarul div $\boldsymbol{B}_1'$ sînt nuli, deducem

$$\boldsymbol{u}_1' = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{x}. \tag{29}$$

Dacă $\nu \neq 0{,}25$, soluția este deci determinată abstracție făcînd de o roto-translație rigidă.

b) *Gradul de arbitrar al funcțiilor lui Grodskii*

Cele de mai sus clarifică chestiunea gradului de determinare a celor 3 funcții ale lui Grodskii într-un corp mărginit $\mathscr{V}$, pentru $\nu \neq 0{,}25$ (compară cu § 6.9). Anume, fie că în $\mathscr{V}$ este realizată starea de tensiune nulă. Considerînd o bulă cu centrul în $\boldsymbol{x}$ și conținută în $\mathscr{V}$, și rezolvînd pentru ea problema lui Neumann cu date la limită nule, conchidem că $\boldsymbol{B}$ este suma unui vector constant $\boldsymbol{B}_0$ cu un vector $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{x}$, unde $\boldsymbol{q}$ este constant. Alegînd o altă bulă conținută în $\mathscr{V}$ și avînd puncte în comun cu cea dintîi, rezultă că vectorii $\boldsymbol{B}_0$ și $\boldsymbol{q}$ sînt *aceiași* pentru ambele bule. Întrucît în virtutea teoremei lui Borel și Lebesgue (vezi § A.3, pag. 694) putem întotdeauna uni două puncte interioare ale oricărui domeniu $\mathscr{V}$, situate la distanță finită, printr-un lanț *finit* de asemenea bule, rezultă că vectorii $\boldsymbol{B}_0$ și $\boldsymbol{q}$ sînt aceiași peste tot în $\mathscr{V}$, așadar vectorul $\boldsymbol{B}$ care realizează starea de tensiune nulă are forma prescrisă mai sus.

Vectorii ce realizează starea de deplasare nulă trebuie aleși evident printre cei de mai înainte, așadar printre vectorii ce caracterizează roto-translații rigide. De aci rezultă că ei sînt nuli.

Prin urmare, în cazul $\nu \neq 0{,}25$, vectorul lui Grodskii $\boldsymbol{A}$ ce realizează reprezentarea (7.5.3) prin trei funcții armonice este determinat în cazul problemei lui Neumann numai abstracție făcînd de o componentă $\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{x}$. În cazul problemei lui Dirichlet, el este deplin determinat.

Deosebirea față de cele spuse relativ la gradul de determinare al funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili se explică prin deosebirea de structură dintre reprezentările deplasărilor (7.5.3) și (6.7.12). În particular, gradul de arbitrar de care dispunem în această din urmă formulă se datorează prezenței a *două* funcții complexe sub formă nediferențială, de unde rezultă apariția a 4 constante reale disponibile, pentru numai 2 componente ale deplasării.

§ 6. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU DOMENII MĂRGINITE DE O SFERĂ. EXEMPLE

Întrucît calculele efective, după formulele din §§ 3—5, sînt în general voluminoase, ne vom mărgini la a prezenta două exemple simple, suficiente totuși pentru a clarifica rezultatele generale. Pentru mai multe detalii și pentru alte exemple, de natură mai complexă, vezi A. Lurie [4], capitolele 6 și 8.

a) *Bula elastică supusă la presiune normală pe frontieră*

Condiția la limită a problemei este evident

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})\big|_{R=R_0} = -P\boldsymbol{n} = -P(\boldsymbol{x}/R_0)\big|_{R=R_0}. \tag{1}$$

Din formulele (4.13) — (4.17) avem mai întîi

$$\frac{1}{2\mu} R_0 \, \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{R=R_0} = -\frac{1}{2\mu} P \, R_0 \, (\boldsymbol{x}/R_0)|_{R=R_0}, \tag{2}$$

astfel că datele la limită se reduc la un singur termen de forma $\boldsymbol{Y}_1(\theta, \varphi)$. Prin urmare, avem

$$\boldsymbol{H}_1 = (R/R_0) \, \boldsymbol{Y}_1 = -\frac{1}{2\mu} P\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

Întrucît din (5.14) rezultă că $\boldsymbol{H}_1 = \text{grad } h$, și ținînd seama că $2\boldsymbol{x} = \text{grad } (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})$, deducem

$$h = -\frac{1}{4\mu} P \, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \tag{4}$$

de unde, în notațiile din (5.15):

$$h_{ij} = -\frac{1}{2\mu} P \, \delta_{ij}. \tag{5}$$

Introducînd aceste valori în (5.25), obținem

$$(b_{ij} + b_{ji}) \, x_i \, \boldsymbol{i}_j = -2 \, [(1-\nu)/(1+\nu) \, \mu] \, P \, x_j \, \boldsymbol{i}_j,$$

de unde

$$b_{ij} = -[(1-\nu)/(1+\nu) \, \mu] \, P \, \delta_{ij}, \tag{6}$$

astfel că vectorul $\boldsymbol{B}_1$ se scrie sub forma (5.23):

$$\boldsymbol{B}_1 = -[(1-\nu)/(1+\nu)\mu] \, P \, \boldsymbol{x}. \tag{7}$$

Introducînd această expresie în (4.23), obținem soluția

$$\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}_1 = -[(1-2\nu)/2(1+\nu) \, \mu] \, P \, \boldsymbol{x}. \tag{8}$$

Dacă — cu titlu de verificare — introducem (8) în (4.1), căpătăm — pentru $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/R_0$ — tocmai valoarea din (1).

Remarcăm că utilizarea formulei (4.24) — valabilă numai pentru $k \geqslant 2$ — ar duce la un rezultat greșit, independent de faptul că din (3) urmează rot $\boldsymbol{H}_1 = 0$.

b) Spațiul elastic cu o cavitate sferică cu frontiera liberă. Concentrarea tensiunilor

Acesta este analogul tridimensional al problemei din § 6.16, exemplul *f*. Ne vom mărgini la un singur caz de solicitare la infinit, de pildă cazul $\sigma_{11}^{\infty} = P$.

După cum am arătat la finele §§ 3 și 4, soluția problemei exterioare se obține direct din cea a problemei interioare, înlocuind indicele k prin $-k-1$, și ținînd seama că $\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{Y}_{-k-1}$.

În absența cavității, starea de tensiune inițială în $\mathscr{E}_3$ este dată evident de componentele (notate cu un indice (i))

$$\sigma_{11}^{(i)} = P\,, \quad \sigma_{22}^{(i)} = \sigma_{33}^{(i)} = \sigma_{12}^{(i)} = \sigma_{23}^{(i)} = \sigma_{31}^{(i)} = 0. \tag{9}$$

Pe frontiera cavității de rază $R = R_1$, avem $\sigma_{ni}^{(i)} = \sigma_{ij}^{(i)}\, n_j$, de unde

$$\sigma_{n1}^{(i)}\big|_{R=R_1} = P\, n_1 = P\,(x_1/R_1)\big|_{R=R_1}, \quad \sigma_{n2}^{(i)}\big|_{R=R_1} = \sigma_{n3}^{(i)}\big|_{R=R_1} = 0. \tag{10}$$

Pentru ca această frontieră să fie liberă, trebuie deci să rezolvăm problema spațiului nemărginit cu o cavitate sferică de rază $R = R_1$, solicitat de sarcina

$$\boldsymbol{\sigma}_n\big|_{R=R_1} = -\,P(x/R_1)\big|_{R=R_1}\, \boldsymbol{i}_1 = -\,P\, \boldsymbol{i}_1 \sin\theta\cos\varphi, \tag{11}$$

și să adăugăm soluția corespunzătoare acestei stări perturbatoare, notată cu un indice (p), la soluția (9).

Ca și în exemplul precedent, al doilea membru din (11) conține numai funcția $\boldsymbol{Y}_1$, astfel că soluția va depinde de determinarea funcției $\boldsymbol{H}_{-2}$. Avem mai întîi

$$\frac{1}{2\mu}\, R\, \boldsymbol{\sigma}_n^{(p)}\big|_{R=R_1} = -\,\frac{1}{2\mu}\, P\, R_1\, \boldsymbol{i}_1 \sin\theta\cos\varphi = \boldsymbol{Y}_1, \tag{12}$$

de unde, folosind formula (4.17) (în care am înlocuit k prin $-k-1$ și am luat apoi $k = 1$), obținem

$$\boldsymbol{H}_{-2} = (R_1^2/R^2)\left[-\,\frac{1}{2\mu}\, P R_1\, \boldsymbol{i}_1 \sin\theta\cos\varphi\right] = -\,\frac{1}{2\mu}\, P\,(R_1^3/R^3)\, \boldsymbol{i}_1\, x_1,$$

ceea ce se va nota

$$\boldsymbol{H}_{-2} = -\,\frac{1}{2\mu}\, P\, R_1^3\, \boldsymbol{q}\,, \quad \boldsymbol{q} = (x_1/R^3)\, \boldsymbol{i}_1. \tag{13}$$

În felul acesta, formula (4.24) (unde k este înlocuit prin $-k-1$, pentru $k = 1$) devine

$$\boldsymbol{u}^{(p)} \equiv \boldsymbol{u}_{-2}^{(p)} = \frac{1}{4\mu}\, P R_1^3 \left[\boldsymbol{q} + \frac{1}{3}\, \boldsymbol{x} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{q} - (4 - 10\nu)\,(7 - 5\nu)^{-1}\, \boldsymbol{x} \operatorname{div} \boldsymbol{q} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\,(5\nu - 1)\,(7 - 5\nu)^{-1}\, R^2 \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{q} + (7 - 5\nu)^{-1}\,(R^2 - R_1^2)\, \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{q}\right]. \tag{14}$$

Pentru a efectua calculele, din (13) obținem pe rînd

$$\operatorname{div} \boldsymbol{q} = R^{-3} - 3x_1^2\, R^{-5}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{q} = -\,3R^{-5}\,(x_1 x_3\, \boldsymbol{i}_2 - x_1 x_2\, \boldsymbol{i}_3),$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{q} = 3R^{-7}\,\left[(2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2)\, x_1\, \boldsymbol{i}_1 + (4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)\,(x_2\, \boldsymbol{i}_2 + x_3\, \boldsymbol{i}_3)\right], \tag{15}$$

$$\boldsymbol{x} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{q} = 3R^{-5}\,[x_1\,(x_2^2 + x_3^2)\, \boldsymbol{i}_1 - x_1^2\, x_2\, \boldsymbol{i}_2 - x_1^2\, x_3\, \boldsymbol{i}_3],$$

ceea ce conduce la soluția

$$\boldsymbol{u}^{(p)} = \frac{1}{4\mu} P R_1^3 \{R^{-3} x_1 \boldsymbol{i}_1 + R^{-5} [x_1 (x_2^2 + x_3^2) \boldsymbol{i}_1 - x_1^2 x_2 \boldsymbol{i}_2 - x_1^2 x_3 \boldsymbol{i}_3] -$$
$$- (4 - 10\nu)(7 - 5\nu)^{-1} (R^{-3} - 3R^{-5} x_1^2)(x_1 \boldsymbol{i}_1 + x_2 \boldsymbol{i}_2 + x_3 \boldsymbol{i}_3) +$$
$$+ [(5\nu - 1)(7 - 5\nu)^{-1} R^{-5} + 3(7 - 5\nu)^{-1} R^{-7} (R^2 - R_1^2)] [(2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2) x_1 \boldsymbol{i}_1 +$$
$$+ (4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)(x_2 \boldsymbol{i}_2 + x_3 \boldsymbol{i}_3)] \}. \tag{16}$$

Separînd componentele după direcțiile $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$, se obțin deplasările $u_1^{(p)}, u_2^{(p)}, u_3^{(p)}$.

Să calculăm acum componentele tensiunii, mărginindu-ne pentru simplitate la a determina componenta $\sigma_{11}^{(p)}$ în punctele $x_1 = x_3 = 0$, așadar în punctele situate pe axa Ox_2, care este intersecția planului orizontal (ecuatorial) cu planul perpendicular pe direcția sarcinii la infinit (Compară cu § 6.16, pag. 458). În acest scop, vom calcula cu ajutorul formulei (7.1.9) vectorul tensiune pentru un element de normală $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_1$. Formulele (4.4) și (4.5) rămîn valabile, astfel că avem

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{-2}^{(p)} = \frac{1}{2}(1 - 2\nu)(1 - \nu)^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{B}_{-2}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_{-2}^{(p)} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}_{-2}. \tag{17}$$

Mai departe, făcînd uz de formulele (4.18), (4.21) (pentru k înlocuit prin $-k-1$ și unde luăm $k = 1$), obținem

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}_{-2} = -10(1 - \nu)(7 - 5\nu)^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{H}_{-2},$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}_{-2} = -\frac{2}{3} [\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_{-2} + (4 - 5\nu)(7 - 5\nu)^{-1} \boldsymbol{x} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{H}_{-2}], \tag{18}$$

astfel că (17) devine

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{-2}^{(p)} = -5(1 - 2\nu)(7 - 5\nu)^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{H}_{-2}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_{-2}^{(p)} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}_{-2}. \tag{19}$$

Rămîne de calculat derivata normală $\boldsymbol{u}_{,n}^{(p)}$, așadar derivata $\boldsymbol{u}_{,1}^{(p)}$ în punctele $x_1 = x_3 = 0$. Toți termenii din (16) ce conțin x_1^2 sau x_3 în factor dispar aci, astfel că, ținînd seama că acum avem $x_2 = R$, căpătăm

$$\boldsymbol{u}_{,1}^{(p)}|_{x_1 = x_3 = 0} = \frac{1}{4\mu}(7 - 5\nu)^{-1} P (R_1^3/R_3) [(4 - 15\nu) + 9(R_1^2/R^2)] \boldsymbol{i}_1. \tag{20}$$

Introducînd (13), (15), (19) și (20) în (7.1.9) scris pentru $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_1$, avem în definitiv

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{u}_{-2}^{(p)})|_{x_1 = x_3 = 0} = P (R_1^3/R^3) \left[\frac{1}{2}(4 - 5\nu)(7 - 5\nu)^{-1} + \frac{9}{2}(7 - 5\nu)^{-1}(R_1^2/R^2)\right] \boldsymbol{i}_1, \tag{21}$$

ceea ce dă imediat pe $\sigma_{11}^{(p)}$ (și desigur și valorile $\sigma_{12}^{(p)} = \sigma_{13}^{(p)} = 0$).

Tensiunea σ_{11} *totală* care apare în punctele axei Ox_2 se obține prin suprapunerea valorilor inițiale din (9) și a celor perturbatoare din (21):

$$\sigma_{11} = P \left\{1 + (R_1^3/R^3) \left[\frac{1}{2}(4 - 5\nu)(7 - 5\nu)^{-1} + \frac{9}{2}(7 - 5\nu)^{-1}(R_1^2/R^2)\right]\right\}. \tag{22}$$

Calculind valorile raportului σ_{11}/P în diferite puncte ale axei Ox_2, obținem (pentru $\nu = 1/3$) tabelul :

R/R_1	1,0	1,5	2,0	3,0
σ_{11}/P	2,06	1,18	1,06	1,01

Comparind acest tabel cu cel din § 6.16, pag. 459, vedem că coeficientul de concentrare al tensiunilor este mai mic, iar fenomenul are un caracter mai localizat decit în analogul bidimensional al aceleiași probleme. Acest din urmă fapt rezultă și din compararea formulelor (22) și (6.16.38) : termenul perturbator scade cu puterea a *treia* a razei în $\mathcal{E}_3$ și numai cu puterea a *doua* în $\mathcal{E}_2$. (Vezi și § 7.1, pag. 512)

CAPITOLUL 9

PROBLEMA SEMISPAŢIULUI ELASTIC

§ 1. GENERALITĂŢI

Problema *echilibrului* semispaţiului solicitat de o sarcină aplicată pe planul său frontieră are o mare importanţă practică, ca punct de pornire în studiul fundaţiilor, în problema contactului corpurilor elastice şi altele. O primă soluţie (prin dezvoltări în serie) a acestei probleme a fost dată încă în 1828 de către G. Lamé şi B. Clapeyron. La finele secolului XIX, ea a fost reluată de către J. Boussinesq [2] (vezi şi A. Clebsch şi B. de Saint-Venant [1], nota finală la § 46), V. Cerruti [1] şi H. Hertz [1]. Au fost astfel obţinute soluţii pentru sarcini concentrate şi repartizate, normale sau nu la frontieră, pentru diferite tipuri de domenii de solicitare. G. Lauricella [2] a studiat în detaliu problemele la limită fundamentale, inclusiv două variante ale celei de a patra probleme fundamentale. V. Cerruti [2] a considerat chestiuni similare pentru domenii infinite a căror frontieră este o suprafaţă deschisă, dar nu un plan. (Pentru transmiterea forţelor concentrate pe frontiera unor astfel de domenii, vezi lucrările citate la finele §2.1, pag. 65). Metoda lui C. Somigliana [5] a permis să se treacă la studiul problemei semispaţiului solicitat în puncte interioare. Pentru generalizarea la cazul semispaţiului a unor anumite metode utilizate în problema plană, vezi E. Obolaşvili [1].

În ce priveşte chestiunile de *dinamică*, menţionăm aci problema deosebit de importantă a propagării undelor care se amortizează spre interiorul semispaţiului (unde Rayleigh). Asupra acestui subiect, vezi de exemplu W. Nowacki [1], capitolul 11; C. Pearson [2], capitolul 9; vezi încă indicaţiile din § 4.12, pag. 163–164.

În cele ce urmează vom prezenta pe scurt problema (teoretic simplă, şi de mai redusă importanţă) a lui Dirichlet pentru semispaţiul elastic, unde soluţia se obţine cu ajutorul reprezentării lui Trefftz. Vom trece apoi la studiul problemei lui Neumann, unde această reprezentare a fost împinsă pe al doilea plan de către cea a lui Grodskii. (Vezi A. Lurie [4], cap. 2.)

Nu putem decît să menţionăm aci rezultatele importante obţinute datorită metodelor operaţionale (vezi I. Sneddon [1], cap. 9 şi 10; I. Sneddon şi D. Berry [1], §§ 64–66 – pentru variantele plane şi axial-simetrice ale chestiunii; vezi şi R. Muki [1], [2] pentru cazuri în care simetria axială este absentă).

Amintim încă problema *stratului* elastic (domeniu mărginit de două plane paralele), care foloseşte ca punct de plecare rezultatele din problema semispaţiului, şi conduce la studiul importantei probleme a *plăcilor groase*. (Vezi A. Lurie [4], cap. 3 şi 4; vezi de asemenea I. Ufliand

[2], cap. 7 şi 8 pentru stratul elastic, şi cap. 9–15 pentru semispaţiu, cu utilizare sistematică a transformărilor integrale ale lui Hankel şi Meller-Fock.)

§ 2. PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU SEMISPAŢIUL ELASTIC

Ţinînd seama de rolul special al uneia din coordonate, vom folosi în general pentru coordonate notaţiile x, y, z, iar pentru versorii axelor, notaţiile $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (Vezi şi § 1.1, pag. 33).

Să căutăm soluţia regulată a problemei lui Dirichlet pentru semispaţiul $z > 0$, pentru $\boldsymbol{F} = 0$, sub forma ce rezultă din (7.4.18) :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} + z \operatorname{grad} h, \tag{1}$$

unde, după cum urmează din (7.4.3) şi (7.4.20), avem

$$\Delta \boldsymbol{B} = 0, \tag{2}$$

$$\Delta h = 0, \quad h_{,3} = -\varkappa^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{B}, \quad \varkappa = 3 - 4\nu, \tag{3}$$

iar vectorul deplasare ia valori cunoscute pe planul frontieră $z = 0$:

$$\boldsymbol{u}(x, y, 0) = \boldsymbol{g}(x, y). \tag{4}$$

Analiticitatea soluţiei impune continuitatea funcţiei $\boldsymbol{g}$. Pentru ca relaţiile de regularitate (7.6.18) să fie verificate, componentele lui $\boldsymbol{g}$, precum şi ale derivatelor sale cu ajutorul cărora se construiesc componentele tensiunii pe frontieră, trebuie să le verifice de asemenea.

Introducînd expresia (1) în condiţia (4), obţinem

$$\boldsymbol{B}(x, y, 0) = \boldsymbol{g}(x, y), \tag{5}$$

astfel că fiecare din componentele lui $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ este soluţia cîte unei probleme Dirichlet *pentru ecuaţia lui Laplace*. Acest mod de a aborda problema justifică alegerea făcută în § 7.4, pag. 527, pentru vectorul de corecţie.

Pentru ca soluţiile problemelor (2), (5) să existe, este suficient ca funcţiile g_1, g_2, g_3 să fie continue şi absolut integrabile pe planul frontieră. Vectorul $\boldsymbol{B}$ poate fi considerat deci cunoscut.

Mai departe, ecuaţiile (3) conduc la problema determinării unei funcţii armonice h dacă valoarea derivatei sale $h_{,3}$ este cunoscută. Calea cea mai simplă de urmat constă în a scrie div $\boldsymbol{B}$ sub forma derivatei în raport cu z a unei funcţii armonice, după care funcţia h se obţine imediat. Aceasta este principial posibil numai pentru anumite tipuri de domenii, printre care însă şi semispaţiul. (Vezi M. Slobodianskii [1].)

Să căutăm deci soluţia regulată (în sensul din (7.2.13)) a unei probleme Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace în semispaţiul $z > 0$, sub forma unui potenţial de dublu strat (7.2.38) :

$$B(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} (\cos \varphi / R^2)\, H(\xi, \eta)\, \mathrm{d}D. \tag{6}$$

Amintim că $\boldsymbol{x}$ este punctul de observație, aparținînd semispațiului $z > 0$ iar $\boldsymbol{\xi}$ și $\boldsymbol{x}_0$ sînt puncte aparținînd frontierei sale $z = 0$. Normala *exterioară* $\boldsymbol{n}$ coincide aci cu sensul *negativ* ale axei Oz. Mai departe, avem din (7.2.14):

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2, \quad \varphi = (\widehat{\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{R}}),$$

$$\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\xi}, \quad R_0^2 = (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2, \quad \varphi_0 = (\widehat{\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{R}_0}) = \frac{1}{2}\pi. \tag{7}$$

Întrucît avem $\cos\varphi_0 = 0$, ecuația integrală (7.2.40) se reduce la

$$2\pi\, H(x_0, y_0) = g(x_0, y_0), \tag{8}$$

astfel că soluția (6) se scrie

$$B(x, y, z) = (1/2\pi)\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\cos\varphi/R^2)\, g(\xi, \eta)\, \mathrm{d}D. \tag{9}$$

Remarcînd că avem

$$z = R\cos\varphi, \tag{10}$$

(vezi și ultima relație (7.2.23) pentru $\xi_3 \equiv \zeta = 0$), expresia (9) devine

$$B(x, y, z) = (1/2\pi)\iint\limits_{-\infty}^{\infty} [z\, g(\xi, \eta)/R^3]\, \mathrm{d}D. \tag{11}$$

Soluția are desigur același aspect pentru toate cele trei componente ale vectorului $\boldsymbol{B}$, astfel că, ținînd seama de (5), căpătăm

$$\boldsymbol{B}(x, y, z) = (1/2\pi)\iint\limits_{-\infty}^{\infty} [z\, \boldsymbol{g}(\xi, \eta)/R^3]\, \mathrm{d}D, \tag{12}$$

ceea ce se poate scrie și sub forma

$$\boldsymbol{B}(x, y, z) = -(1/2\pi)\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} [\boldsymbol{g}(\xi, \eta)/R]\, \mathrm{dD}. \tag{13}$$

Pentru a determina $h(x, y, z)$ ne rămîne să introducem (13) în (3), de unde

$$h(x, y, z) = (1/2\,\pi\varkappa)\, \mathrm{div}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} [\boldsymbol{g}(\xi, \eta)/R]\, \mathrm{d}D. \tag{14}$$

Integrala (14) are forma (7.2.20) a unui potențial de simplu strat, de densitate continuă și absolut integrabilă pe frontieră. Prin urmare, h este cu siguranță armonică.

Problema este deci rezolvată. Soluția (1) ia în fapt forma (7.12.9) pentru $\boldsymbol{F} = 0$.

Dacă s-ar căuta soluția problemei (2), (5) cu ajutorul funcției lui Green, s-ar ajunge la aceleași expresii. Într-adevăr, funcția lui Green pentru operatorul lui Laplace pentru semispațiu este

$$G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right] \tag{15}$$

(vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.4). Ținînd seama că pe frontieră avem $G(x, y, z; \xi, \eta, 0) = 0$, calculînd derivata normală în punctul de sursă $\partial G/\partial n = -\partial G/\partial \zeta$ pe frontieră (așadar pentru $\zeta = 0$), și introducînd în (7.2.37), obținem din nou expresia (12).

Din punctul de vedere al teoriei elasticității, problema este deci rezolvată. Dificultatea e redusă la a se calcula efectiv potențialul din (12) — ceea ce nu se poate realiza însă sub o formă simplă decît în unele cazuri particulare.

§ 3. PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU SEMISPAȚIUL ELASTIC. METODA INTEGRALELOR FOURIER

Vom expune aci o a doua soluție a problemei, care permite scrierea funcțiilor $\boldsymbol{B}$ și h prin intermediul unor integrale Fourier. Ideea de bază (vezi de ex. E. Trefftz [3], § 33) stă în a găsi vectorul armonic $\boldsymbol{B}$ cu ajutorul formulei de inversiune a integralei duble Fourier (vezi (A.9.61)):

$$f(x, y) = (1/4\pi^2)\iiiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \exp\left[\mathrm{i}\alpha(\xi - x) + \mathrm{i}\beta(\eta - y)\right] \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{1}$$

Vectorul $\boldsymbol{B}$ se caută sub forma

$$\boldsymbol{B}(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\boldsymbol{b}}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \exp(\widetilde{\alpha}x + \widetilde{\beta}y + \widetilde{\gamma}z)\, \mathrm{d}\widetilde{\alpha}\, \mathrm{d}\widetilde{\beta}, \tag{2}$$

unde funcțiile $\widetilde{b}_j(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, $(j = 1, 2, 3)$, sînt integrabile în orice porțiune mărginită a planului, și absolut integrabile pe tot planul. Un calcul simplu dă

$$B_{j,11} = \widetilde{\alpha}^2 B_j, \quad B_{j,22} = \widetilde{\beta}^2 B_j, \quad B_{j,33} = \widetilde{\gamma}^2 B_j. \tag{3}$$

Pentru ca B_j să fie armonică, e deci suficient să avem

$$\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2 + \widetilde{\gamma}^2 = 0. \tag{4}$$

Alegînd (pentru α, β reali)

$$\tilde{\alpha} = \mathrm{i}\alpha \quad , \quad \tilde{\beta} = \mathrm{i}\beta \quad , \quad \tilde{\gamma} = \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \tag{5}$$

condiţia (4) este automat satisfăcută, iar (2) devine

$$\boldsymbol{B}(x, y, z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{b}(\alpha, \beta) \exp\left[\mathrm{i}(\alpha x + \beta y) + \gamma z\right] \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta, \tag{6}$$

unde vectorul $\boldsymbol{B}$ este armonic, oricare ar fi $\boldsymbol{b}(\alpha, \beta) \equiv \tilde{\boldsymbol{b}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Condiţia la limită de tip Dirichlet (2.4) se scrie acum

$$\boldsymbol{g}(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{b}(\alpha, \beta) \exp(\mathrm{i}\alpha x + \mathrm{i}\beta y)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta. \tag{7}$$

Întrucît (6) determină pe deplin vectorul $\boldsymbol{B}$ prin intermediul lui $\boldsymbol{b}$, aflarea acestuia din urmă din relaţiile (7) rezolvă problema.

Înmulţind ambii membri din (7) cu $\exp(-\mathrm{i}\lambda x - \mathrm{i}\mu y)$ şi integrînd în raport cu x, y între limitele $-\infty$, $+\infty$, obţinem

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(x, y) \exp(-\mathrm{i}\lambda x - \mathrm{i}\mu y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{b}(\alpha, \beta) \exp\left[\mathrm{i}x(\alpha - \lambda) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{i}y(\beta - \mu)\right] \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{8}$$

Ţinînd seama de (1), membrul al doilea din (8) rezultă egal cu $4\pi^2 \boldsymbol{b}(\lambda, \mu)$. Schimbînd acum variabilele λ, μ cu α, β, şi x, y cu ξ, η, deducem

$$\boldsymbol{b}(\alpha, \beta) = (1/4\pi^2) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{g}(\xi, \eta) \exp(-\mathrm{i}\alpha\xi - \mathrm{i}\beta\eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{9}$$

Introducînd (9) în (6) şi schimbînd apoi α cu $-\alpha$ şi β cu $-\beta$, obţinem în definitiv vectorul armonic (vezi (5))

$$\boldsymbol{B}(x, y, z) = (1/4\pi^2) \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(\xi, \eta) \exp\left[\mathrm{i}\alpha(\xi - x) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{i}\beta(\eta - y) + \gamma z\right] \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{10}$$

Ţinînd seama de (1), se vede imediat că, pentru $z = 0$, condiţia (6) este verificată.

Să trecem la determinarea funcției armonice $h(x, y, z)$ din ecuațiile (2.3). Pentru aceasta avem mai întîi din (10)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = -(\mathrm{i}/4\pi^2)\iiiint_{-\infty}^{+\infty} g_0(\xi, \eta) \exp[\mathrm{i}\alpha(\xi - x) + \mathrm{i}\beta(\eta - y) + \gamma z]\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta, \tag{11}$$

unde am notat

$$g_0(\xi, \eta) = \alpha g_1(\xi, \eta) + \beta g_2(\xi, \eta) + \mathrm{i}\gamma g_3(\xi, \eta). \tag{12}$$

Introducînd (11) în (2.3), avem

$$h_{,3} = (\mathrm{i}/4\pi^2 \varkappa)\iiiint_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) \exp[\mathrm{i}\alpha(\xi - x) + \mathrm{i}\beta(\eta - y) + \gamma z]\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta, \tag{13}$$

de unde, integrînd în raport cu parametrul z în membrul al doilea :

$$h(x, y, z) = (\mathrm{i}/4\pi^2 \varkappa\gamma)\iiiint_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) \exp[\mathrm{i}\alpha(\xi - x) + \mathrm{i}\beta(\eta - y) + \gamma z]\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{14}$$

Orice eventuală funcție de x, y ce ar apare după integrarea relației (13), este nulă, întrucît numai așa se asigură regularitatea funcției h pentru x, y finiți, și $z \to \infty$.

Ținînd seama de relațiile (5) se vede ușor că funcția h este armonică. Date fiind proprietățile lui $\boldsymbol{g}$, se poate demonstra și că h este regulată la infinit. Vectorul grad h se calculează atunci din (14) : anume, avem

$$\frac{h_{,1}}{\alpha} = \frac{h_{,2}}{\beta} = \frac{1}{4\pi^2 \varkappa\gamma}\iiiint_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) \exp[\mathrm{i}\alpha(\xi - x) + \mathrm{i}\beta(\eta - y) + \gamma z]\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta, \tag{15}$$

în timp ce pentru $h_{,3}$ dispunem de (13). În definitiv, reprezentarea (2.1) dă acum soluția problemei sub forma

$$u_j(x, y, z) = (1/4\pi^2)\iiiint_{-\infty}^{\infty} G_j(\xi, \eta; z) \exp[\mathrm{i}\alpha(\xi - x) + \mathrm{i}\beta(\eta - y) + \gamma z]\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta, \tag{16}$$

unde

$$\begin{aligned} G_1(\xi, \eta;\, z) &= g_1(\xi, \eta) + (\alpha/\varkappa\gamma)\, z\, g_0(\xi, \eta), \\ G_2(\xi, \eta;\, z) &= g_2(\xi, \eta) + (\beta/\varkappa\gamma)\, z\, g_0(\xi, \eta), \\ G_3(\xi, \eta;\, z) &= g_3(\xi, \eta) + (i/\varkappa)\, z\, g_0(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{17}$$

Problema e deci explicit rezolvată în funcție de datele la limită $\boldsymbol{g}(\xi, \eta)$. (La fel ca în (1), partea pur imaginară a tuturor acestor expresii e nulă.) Totuși, integralele ce intervin în (16) nu pot fi decît arareori calculate sub formă finită.

§ 4. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU SEMISPAȚIUL ELASTIC (I)

Problema lui Neumann pentru semispațiu poate fi abordată cu ajutorul unor soluții cu singularități.

Calcule similare celor din § 7.8 permit să se determine o astfel de soluție care să descrie acțiunea unei forțe concentrate aplicate în origine, normal pe frontiera semispațiului. Aceasta, numită *soluția de al doilea tip a lui Boussinesq*, introduce încă și o anumită repartiție de sarcini pe planul-frontieră. Din fericire, se constată că aceasta din urmă este proporțională cu cea corespunzătoare soluției lui Kelvin și Somigliana, privită ca soluție pentru *semi*spațiu (vezi § 7.8, observația 2, pag. 548). Se poate deci construi o combinație liniară a celor două soluții care să lase planul frontieră liber de orice sarcină, cu excepția unei forțe *concentrate* unitare aplicate în origine normal pe planul-frontieră. Un procedeu de suprapunere similar celui din § 7.9, pag. 551, conduce la soluția problemei pentru o sarcină normală *repartizată*, exprimată prin integrale în care intervine soluția corespunzătoare sarcinii normale unitare concentrate, și densitatea sarcinii reale considerate.

Modul acesta clasic de a raționa prezintă însă dezavantajul de a lăsa fără răspuns întrebările dacă soluția obținută verifică ecuațiile lui Lamé, satisface condițiile la limită, și este regulată. De aceea este preferabil punctul de vedere al lui A. Lurie [2] (vezi și [4], § 2.5), care construiește *direct* soluția corespunzătoare sarcinii normale repartizate. Cu ajutorul funcției δ a lui Dirac, se poate obține de aci și soluția problemei semispațiului supus unei forțe concentrate.

a) Sarcină normală repartizată

Fie deci semispațiul $z > 0$ supus unei sarcini normale $p(\xi, \eta)$ repartizate pe o porțiune $\mathscr{D}$ a frontierei sale $z = 0$. Considerente de ordin mecanic impun să admitem că $\mathscr{D}$ este *mărginit*. Se presupune că $p(\xi, \eta) \in C^0(\mathscr{D})$, ceea ce asigură existența potențialului de simplu strat corespunzător, și verificarea proprietăților enumerate în § 7.2 (inclusiv regularitatea). Este de presupus că deplasările și tensiunile ce corespund unei astfel de

solicitări sînt nule la infinit, ceea ce impune căutarea numai de soluții regulate în sensul din (7.6.18).

Întrucît normala exterioară $\boldsymbol{n}$ este paralelă cu axa Oz și dirijată în sensul valorilor z negative, condiția la limită în tensiuni se scrie

$$\boldsymbol{\sigma}_{-3}|_{z=0} = \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

unde $\boldsymbol{f}$ este sarcina efectiv aplicată. Întrucît sarcina este normală, (1) se mai poate scrie (*reținînd pentru j numai valorile* 1 *și* 2) :

$$\sigma_{3j}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = -p(\xi, \eta), \tag{2}$$

cu $p(\xi, \eta)$ definită *pe tot planul frontieră*, și identic nulă în afara lui $\mathscr{D}$.

Soluția se caută sub forma reprezentării lui Grodskii.

Primele două condiții la limită (2) ($j = 1, 2$) se scriu

$$(u_{j,3} + u_{3,j})|_{z=0} = 0, \ j = 1, 2. \tag{3}$$

Introducînd aci (7.4.16), avem de calculat cantitățile

$$u_{j,3} + u_{3,j} = B_{j,3} + [(1-2\nu)/2(1-\nu)]\, B_{3,j} - \\ - [1/2(1-\nu)]\,(x\, B_{1,3} + y\, B_{2,3} + z\, B_{3,3} + B_{0,3})_{,j}. \tag{4}$$

Luînd acum $z = 0$, obținem din (3) și (4) :

$$\left[B_{j,3} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\, B_{3,j}\right]\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{2(1-\nu)}\,(x\, B_{1,3} + y\, B_{2,3} + B_{0,3})_{,j}\Bigg|_{z=0}, \tag{5}$$

ceea ce va fi cu siguranță îndeplinit dacă vom cere verificarea relațiilor

$$B_{j,3}|_{z=0} = -[(1-2\nu)/(2(1-\nu)]\, B_{3,j}|_{z=0}, \quad j = 1, 2; \tag{6}$$

$$B_{0,3}|_{z=0} = -[x\, B_{1,3} + y\, B_{2,3}]|_{z=0}. \tag{7}$$

Cele două relații (6) sînt egalități între valorile *la limită* ale unor funcții armonice în $z > 0$, și — prin ipoteză — regulate la infinit. În virtutea teoremei de unicitate pentru soluția – regulată la infinit – a problemei lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace în semispațiu (vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.2), egalitatea se păstrează și *în interiorul* semispațiului :

$$B_{j,3} = -[(1-2\nu)/2(1-\nu)]\, B_{3,j}, \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

Relația (7) poate fi pusă acum sub forma

$$B_{0,3}|_{z=0} = [(1-2\nu)/2(1-\nu)]\,[x\, B_{3,1} + y\, B_{3,2}]|_{z=0}. \tag{9}$$

Membrul întîi din (9) este valoarea la limită a unei funcții armonice în $z > 0$. Scriind paranteza din membrul al doilea sub forma

$$[x\, B_{3,1} + y\, B_{3,2} + z\, B_{3,3}]|_{z=0} = [\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{grad}\ B_3]|_{z=0},$$

(ceea ce desigur nu-i schimbă valoarea), și ținînd seama (vezi (7.4.9)) că

$$\Delta(\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{grad}\ B_3) = 2\ \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ B_3 = 2\,\Delta B_3 = 0,$$

urmează că şi m?mbrul al doilea din (9) este valoarea la limită a unei funcţii armonice. Aceeaşi teoremă de unicitate conduce astfel la relaţia

$$B_{0,3} = [(1-2\nu)/2(1-\nu)]\,(x\,B_{3,1} + y\,B_{3,2} + z\,B_{3,3}). \qquad (10)$$

Derivatele funcţiilor B_0, B_1, B_2 în raport cu z se exprimă deci prin intermediul *unei singure* funcţii, armonice şi regulate la infinit : funcţia B_3.

Să notăm provizoriu

$$B_3 = c\,\Omega\,, \qquad (11)$$

(unde Ω este o funcţie armonică, iar c este o constantă) şi să introducem şi funcţia armonică ω care verifică relaţia

$$\omega_{,3} = \Omega, \qquad (12)$$

Orice eventuale funcţii de x, y care ar apare în integrarea impusă de (12), se vor determina din condiţia ca funcţia ω să fie armonică, şi comportarea ei la infinit să decurgă într-un anumit mod din comportarea la infinit a funcţiei Ω.

Ţinînd seama de (11), (12), relaţiile (8) şi (10) devin

$$B_{j,3} = -[(1-2\nu)/2\,(1-\nu)]\,c\,\Omega_{,j} = -[(1-2\nu)/2\,(1-\nu)]\,c\,\omega_{,3j},$$
$$B_{0,3} = [(1-2\nu)/2(1-\nu)]\,c(x\,\omega_{,31} + y\,\omega_{,32} + z\,\omega_{,33}). \qquad (13)$$

Pentru a satisface aceste egalităţi, este suficient să luăm

$$B_j = -[(1-2\nu)/2\,(1-\nu)]\,c\,\omega_{,j}, \qquad j = 1, 2,$$
$$B_0 = [(1-2\nu)/2(1-\nu)]\,c(x\,\omega_{,1} + y\,\omega_{,2} + z\,\omega_{,3} - \omega). \qquad (14)$$

Mai rămîne acum să determinăm funcţia Ω din ultima condiţie (2). În acest scop, amintim mai întîi relaţia

$$\sigma_{33} = \lambda\,\theta + 2\,\mu\,u_{3,3}. \qquad (15)$$

Din ultima relaţie (7.4.17) urmează

$$\theta = \operatorname{div}\boldsymbol{u} = [(1-2\nu)/2(1-\nu)]\operatorname{div}\boldsymbol{B}. \qquad (16)$$

Or, ţinînd seama de (11), (12), de primele două relaţii (14), precum şi de faptul că $\Delta\omega = 0$, obţinem

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = [(3-4\nu)/2\,(1-\nu)]\;c\,\omega_{,33}. \qquad (17)$$

Pe de altă parte, din (7.4.16) şi folosind (11)—(13), căpătăm

$$u_{3,3} = c\,\Omega_{,3} - [1/4(1-\nu)]\,c\,\{\Omega + [(3-4\nu)/2\,(1-\nu)]\,z\Omega_{,3}\}_{,3}. \qquad (18)$$

Introducînd acum (16) — (18) în (15), și ținînd seama că $\lambda/\mu = 2\nu/(1-2\nu)$ (vezi (3.4.16)), căpătăm

$$\sigma_{33} = [(3-4\nu)/4(1-\nu)^2]\,\mu\, c(\Omega_{,3} - z\,\Omega_{,33}). \tag{19}$$

Luînd aci $z = 0$, obținem valoarea la limită

$$\sigma_{33}|_{z=0} = \mu\, c\,[(3-4\nu)/4(1-\nu)^2]\,\Omega_{,3}|_{z=0}. \tag{20}$$

Prin urmare, funcția Ω trebuie găsită ca soluție (regulată) a unei probleme Neumann pentru ecuația lui Laplace în semispațiul $z > 0$. Scriind ultima condiție (2) sub forma

$$\sigma_{33}(\xi, \eta, +0) = -\,p(\xi, \eta), \tag{21}$$

(vezi și (1.1.6.)—(1.1.8)), obținem din (20) condiția la limită

$$[(3-4\nu)/4(1-\nu)^2]\,\mu\, c\,\Omega_{,3}|_{z=+0} = -\,p(\xi, \eta). \tag{22}$$

Soluția acestei probleme se caută sub forma unui potențial de simplu strat, de densitate $-(1/4\pi\mu)\,q(\xi,\eta)$, repartizată pe un domeniu $\mathscr{D}'$:

$$V(x, y, z) = -\,(1/4\,\pi\,\mu)\iint\limits_{\mathscr{D}'}[q(\xi, \eta)/R]\,\mathrm{d}D. \tag{23}$$

Scriind relațiile (7.2.31) și (7.2.32) pentru acest potențial, remarcăm că avem $\cos\psi_0 = 0$. Comparînd (23) cu (7.2.20) și atribuind desigur indicele + valorilor la limită pentru $z \to +0$, obținem :

$$V_{+,n} = -\,V_{-,n} = 2\,\pi\, G(\boldsymbol{x}_0) = -\,(1/2\,\mu)\, q(\xi, \eta), \tag{24}$$

(unde $q(\xi, \eta) \equiv 0$ înafara domeniului $\mathscr{D}'$). Întrucît normala exterioară la semispațiu coincide cu sensul negativ al axei Oz, putem scrie (24) sub forma

$$V_{,3}|_{z=+0} = (1/2\,\mu)\, q(\xi, \eta). \tag{25}$$

Luînd $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$ și $\Omega = V$, și introducînd (25) în (22), avem

$$[(3-4\nu)/4(1-\nu)^2]\,\mu c(1/2\,\mu)\, q(\xi,\eta) = -\,p(\xi,\eta),$$

ceea ce se reduce la egalitatea

$$p(\xi, \eta) = q(\xi, \eta), \tag{26}$$

dacă pentru constanta c alegem valoarea

$$c = -\,8(1-\nu)^2/(3-4\nu). \tag{27}$$

Prin urmare, soluția problemei este dată de cunoașterea funcției Ω dată la rîndul ei sub forma potențialului de simplu strat

$$\Omega(x, y, z) = -\,(1/4\,\pi\,\mu)\iint\limits_{\mathscr{D}}[p(\xi, \eta)/R]\,\mathrm{d}D. \tag{28}$$

În ce priveşte funcţia ω din (12), trebuie să luăm evident

$$\omega(x, y, z) = -(1/4\pi\mu)\iint_{\mathscr{D}} p(\xi, \eta) \ln(R + z)\, dD; \tag{29}$$

acesta este un potenţial logaritmic, evident funcţie armonică ($\ln(R + z)$ este primitiva în raport cu z a funcţiei armonice $1/R$).

Notînd aci $R' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se poate arăta că pentru $R' \to \infty$, mărimile $\Omega, \omega_{,1}, \omega_{,2}$ tind spre zero ca $1/R'$, iar mărimile $\Omega_{,1}, \Omega_{,2}, \Omega_{,3}$ tind spre zero ca $1/R'^2$. Notînd cu P rezultanta sarcinii $p(\xi, \eta)$ pe $\mathscr{D}$, se poate demonstra (similar cu L. Sretenskii [1], § 1.9) că funcţia ω tinde la infinit pentru $R' \to \infty$ ca funcţia $-(P/4\pi\mu)\ln(R + z)$.

Funcţiile (28), (29) se numesc *potenţialii lui Hertz*. Raţionamentul precedent asigură dinainte verificarea atît a ecuaţiilor lui Lamé, cît şi a condiţiilor la limită şi a celor de regularitate.

b) Formulele lui Hertz

Ne rămîne să punem soluţia sub forma cea mai simplă posibilă. Pentru aceasta, ţinînd seama de (11), (12), (14) şi (27), obţinem

$$B_j = \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{3-4\nu}\omega_{,j}, \quad j = 1, 2; \quad B_3 = -\frac{8(1-\nu)^2}{3-4\nu}\omega_{,3};$$

$$B_0 = -\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{3-4\nu}(x\omega_{,1} + y\omega_{,2} + z\omega_{,3} - \omega). \tag{30}$$

Izolînd în B_3 un termen similar celor din B_1, B_2, avem

$$B_3 = [4(1-\nu)(1-2\nu)/(3-4\nu)]\,\omega_{,3} - 4(1-\nu)\,\omega_{,3}, \tag{31}$$

ceea ce permite să scriem vectorul $\boldsymbol{B}$ sub forma

$$\boldsymbol{B} = -4(1-\nu)\boldsymbol{k}\Omega + [4(1-\nu)(1-2\nu)/(3-4\nu)]\,\mathrm{grad}\,\omega. \tag{32}$$

Pe de altă parte, B_0 se scrie sub forma

$$B_0 = -[4(1-\nu)(1-2\nu)/(3-4\nu)](\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{grad}\,\omega - \omega). \tag{33}$$

Introducînd acum (32) şi (33) în (7.4.14), căpătăm uşor expresia

$$\boldsymbol{u} = -4(1-\nu)\boldsymbol{k}\Omega + \mathrm{grad}\,[z\Omega + (1-2\nu)\,\omega], \tag{34}$$

de unde, separînd componentele:

$$\begin{aligned} u_1 &= z\,\Omega_{,1} + (1-2\nu)\,\omega_{,1}, \\ u_2 &= z\,\Omega_{,2} + (1-2\nu)\,\omega_{,2}, \\ u_3 &= z\,\Omega_{,3} - 2(1-\nu)\,\Omega. \end{aligned} \tag{35}$$

Aceste relații — numite curent *formulele lui Hertz* — au fost obținute concomitent de către H. Hertz [1], și J. Boussinesq (publicate în A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], nota finală la § 46, formulele (17)). Rezultatul poate fi extins și la cazul unui domeniu de încărcare $\mathscr{D}$ nemărginit.

OBSERVAȚIA 1. Relația (34) permite să revenim asupra formulelor (32), (33); anume, putem lua acum cu aceeași îndreptățire

$$\boldsymbol{B} = -4(1-\nu)\,\boldsymbol{k}\,\Omega\,, \quad B_0 = -4(1-\nu)(1-2\nu)\,\omega\,. \tag{36}$$

OBSERVAȚIA 2. Expresia (35) a lui u_3 este principial mai simplă decît cele ale lui u_1 și u_2, întrucît nu conține decît pe Ω. Acest fapt joacă un rol esențial în problema contactului.

c) *Aplicații*

Pentru determinarea vectorului tensiune, se poate face uz de formula (7.1.9), în care avem de introdus (34). Din (7.4.17) și (36) deducem

$$\theta = \operatorname{div}\boldsymbol{u} = -2(1-2\nu)\,\Omega_{,3}\,, \tag{37}$$

iar din (34) urmează

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = -4(1-\nu)(\boldsymbol{i}\,\Omega_{,2} - \boldsymbol{j}\,\Omega_{,1})\,. \tag{38}$$

Dacă dorim să determinăm de pildă vectorul-tensiune pe elemente de normală $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$ (elemente paralele cu planul-frontieră), atunci avem:

$$\boldsymbol{u}_{,n} = -\boldsymbol{u}_{,3}\,, \quad \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 2(1-\nu)(\boldsymbol{i}\,\Omega_{,1} + \boldsymbol{j}\,\Omega_{,2})\,, \tag{39}$$

și, după calcule elementare, deducem

$$\boldsymbol{\sigma}_{-3}(\boldsymbol{u}) = 2\mu\,(\boldsymbol{k}\,\Omega_{,3} - z\,\operatorname{grad}\Omega_{,3})\,. \tag{40}$$

Să remarcăm că din (37), (3.3.22) și (3.4.16) avem pe rînd

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu)\,\theta = -2E\,\Omega_{,3}\,. \tag{41}$$

Ținînd seama de condiția la limită (25), căpătăm pe frontieră

$$\theta|_{z=+0} = -[(1-2\nu)/\mu]\,p(\xi,\eta)\,, \quad \Theta|_{z=+0} = -2(1+\nu)\,p(\xi,\eta). \tag{42}$$

Cea de-a treia din formulele (35) devine pe frontieră

$$u_3|_{z=+0} = [(1-\nu)/2\pi\mu]\iint_{\mathscr{D}} [p(\xi,\eta)/\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,\mathrm{d}D \tag{43}$$

sau încă, trecînd la coordonate polare (R,χ) cu polul în punctul de observație $(x,y,0)$ și păstrînd pentru $p(\xi,\eta)$ în noile coordonate notația $p(R,\chi)$:

$$u_3|_{z=+0} = [(1-\nu)/2\pi\mu]\iint_{\mathscr{D}} p(R,\chi)\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\chi\,. \tag{44}$$

Aceste relaţii se dovedesc utile pentru a clarifica caracterul stării elastice în vecinătatea frontierei. Astfel de pildă, fie că într-un punct al frontierei avem $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ (cum e cazul în centrul de simetrie pentru o problemă cu simetrie axială). A doua relaţie (42) devine atunci

$$2\,\sigma_{11}\big|_{z=+0} + \sigma_{33}\big|_{z=+0} = -\,2\,(1+\nu)\,p\,(\xi,\,\eta)\,. \qquad (45)$$

Ţinînd seama aci de ultima condiţie (2), deducem

$$\sigma_{11}\big|_{z=0} = \sigma_{22}\big|_{z=0} = -\left(\frac{1}{2} + \nu\right) p\,(\xi,\,\eta)\,. \qquad (46)$$

Prin urmare, tensiunea tangenţială maximală în acest punct (vezi (2.6.11)) este

$$T_{\max} = \pm\,\frac{1}{2}\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)p - p\right] = \pm\,\frac{1}{2}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)p\,(\xi,\,\eta)\,. \qquad (47)$$

Întrucît foarte des avem $\nu \cong \frac{1}{3}$, rezultă că $T_{\max}$ este foarte mică în raport cu tensiunea normală $\sigma_{33}\big|_{z=0} = -\,p\,(\xi,\,\eta)$, şi prin urmare semispaţiul poate suporta pe frontieră *sarcini ce depăşesc cu mult limita de rezistenţă*. (Vezi şi mai departe § 10.11, pag. 666.)

§ 5. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU SEMISPAŢIUL ELASTIC (II)

a) Generalizarea formulelor lui Hertz

Formulele (4.35) au fost stabilite pentru sarcini $p\,(\xi,\,\eta)$ suficient de regulate pentru ca potenţialii (4.28), (4.29) să existe. Dar aceste formule pot fi înţelese şi într-un sens generalizat, făcînd uz de produsul de convoluţie (compară cu (7.9.13)). Pentru aceasta, vom scrie potenţialii lui Hertz sub forma

$$\Omega = -\,(1/4\,\pi\mu)\,p * R^{-1}, \quad \omega = -\,(1/4\,\pi\mu)\,p * \ln\,(R + z)\,, \qquad (1)$$

unde $p = p\,(\xi,\,\eta,\,0)$, iar $R = R\,(x,\,y,\,z\,;\,\xi,\,\eta,\,0)$. Astfel privită, teoria lui Hertz îşi păstrează valabilitatea chiar pentru sarcini normale care pot fi exprimate nu prin funcţii, ci prin distribuţii; formulele clasice pot fi regăsite pas cu pas, înlocuind sistematic semnul integrării prin cel al produsului de convoluţie. (Pentru unele lucrări pe această linie, vezi G. Verma [1]; W. Kees [1] — afară de rezultatele privind momentele concentrate.) În principiu, o reconstrucţie coerentă a întregii teorii poate fi efectuată cu ajutorul noţiunii de distribuţie al cărei suport este o suprafaţă — în cazul nostru, planul frontieră. (Vezi I. Ghelfand şi G. Şilov [1], vol. 1, § 3.1.)

b) *Sarcină normală concentrată*

Să ne oprim la cazul $p(\xi, \eta) = \delta(\xi, \eta)$ care descrie acțiunea unei forțe unitare concentrate aplicate normal în origine. Ținînd seama în (1) de formula (A.2.10) și atribuind semnul „$\sim$" potențialilor lui Hertz corespunzători acestui caz particular, căpătăm imediat expresiile

$$\widetilde{\Omega} = -(1/4\,\pi\mu)\,R^{-1}, \quad \widetilde{\omega} = -(1/4\,\pi\mu)\ln(R + z)\,, \tag{2}$$

legate între ele prin relația analogă cu (4.12):

$$\widetilde{\omega}_{,3} = \widetilde{\Omega}\,. \tag{3}$$

Este evident că principiul superpoziției permite revenirea de la (2) la (4.28), (4.29). Formulele (4.25) își păstrează valabilitatea, și astfel problema menționată în § 4, pag. 594, e rezolvată. Calculînd componentele tensiunii și efectuînd un raționament similar celui din § 7.8, constatăm că soluția obținută verifică într-adevăr condițiile impuse atît în origine, cît și pe restul frontierei (care e liberă). Ne vom limita aci la a explicita componentele deplasării. Din (4.35) și (2) obținem ușor

$$\begin{aligned} u_1 &= (1/4\,\pi\mu)\,[zR^{-3} - (1 - 2\nu)\,R^{-1}(R + z)^{-1}]\,x\,, \\ u_2 &= (1/4\,\pi\mu)\,[zR^{-3} - (1 - 2\nu)\,R^{-1}(R + z)^{-1}]\,y\,, \\ u_3 &= (1/4\,\pi\mu)\,[z^2R^{-3} + 2\,(1 - \nu)\,R^{-1}]\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Deplasînd punctul de aplicare al forței normale concentrate (ceea ce revine la a înlocui $\delta(\xi, \eta)$ prin $\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$), ajungem la relații ce se obțin din (2), (4) prin simpla înlocuire a vectorului de poziție, cu vectorul ce unește punctul de sursă (de pe frontieră) cu cel de observație.

Să precizăm tabloul repartiției tensiunilor și deplasărilor în starea considerată. Introducînd $\widetilde{\Omega}$ în locul lui Ω în (4.40), obținem

$$\boldsymbol{\sigma}_{-3} = (3\,/\,2\,\pi)\,z^2\,R^{-5}\,\boldsymbol{x}\,. \tag{5}$$

Vectorul tensiune pe elemente paralele cu planul frontieră este deci dirijat întotdeauna în lungul vectorului $\boldsymbol{x}$ ce unește punctul considerat, cu originea (adică cu punctul de sursă). Din această cauză se spune că avem de a face cu o *repartiție radială simplă de tensiuni*. Modulul vectorului (5) este

$$|\,\boldsymbol{\sigma}_{-3}\,| = (3\,/\,2\,\pi)\,R^{-4}\,z^2\,. \tag{6}$$

Notînd cu φ unghiul format de vectorul $\boldsymbol{x}$ cu axa Oz, (vezi și (7.2.14) și (2.10)), avem evident $\cos\varphi = z/R$, astfel că (6) devine

$$|\,\boldsymbol{\sigma}_{-3}\,| = (3/2\,\pi)\,(\cos^2\varphi)\,/\,R^2\,. \tag{7}$$

Modulul vectorului tensiune pe un element paralel cu planul frontieră descreşte deci rapid atît pe măsura îndepărtării de acest plan, cît şi de linia de acţiune a forţei. Construind o sferă cu axa Oz ca direcţie a diametrului, şi care e tangentă în origine la planul frontieră, se vede că diametrul ei este

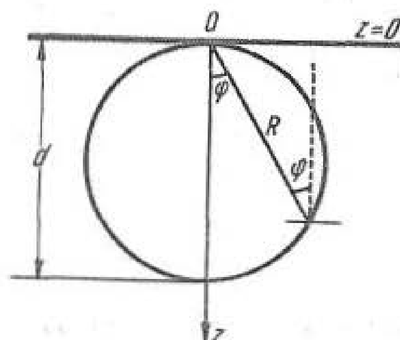


Fig. 9.5.1

$$d = R / \cos \varphi , \quad (8)$$

astfel că (7) devine încă

$$|\sigma_{-3}| = 3 / 2 \pi d^2 . \quad (9)$$

În toate punctele situate pe o astfel de sferă, modulul tensiunii pe elementele orizontale este deci constant.

A treia relaţie (4.35) scrisă pentru Ω înlocuit cu $\widehat{\Omega}$ dă aci

$$u_3|_{z=0} = [(1 - \nu) / 2 \pi\mu] \; R^{-1} , \quad (10$$

ceea ce arată că produsul $u_3 R$ rămîne constant pe $z = 0$. Prin urmare, dreptele din planul-frontieră ce trec prin origine se transformă în hiperbole echilatere, avînd drept asimptote axa Oz (în lungul căreia e aplicată sarcina), şi propria lor direcţie înainte de deformaţie.

Soluţia îşi pierde sensul în imediata vecinătate a punctului de sursă. (Vezi şi G. Savin şi V. Rvacev [1].) În practică, în vecinătatea unui astfel de punct are loc o redistribuire locală a tensiunilor, datorită apariţiei stării de deformare plastică sau a unor fisuri.

c) *Exemplu*

Fie că planul $z = 0$ este solicitat de o sarcină normală, de intensitate *constantă* p, acţionînd pe un disc circular de rază a şi cu centrul în origine. Potenţialii (4.28), (4.29) devin

$$\Omega (x, y, z) = - (1/4 \pi\mu) p \iint_{\mathscr{D}} R^{-1} \, \mathrm{d}D , \quad \omega (x, y, z) = - (1/4 \pi\mu) p \iint_{\mathscr{D}} \ln (R + z) \, \mathrm{d}D . \quad (11)$$

Să ne limităm la calculul deplasării normale *în interiorul domeniului solicitat* $\mathscr{D}$. Pentru aceasta, să alegem punctul de observaţie $(x, y, 0) \in \mathscr{D}$ drept origine a unui sistem de coordonate polare R, χ în planul $z = 0$. Deplasarea normală a acestui punct sub acţiunea sarcinii $pR \, \mathrm{d}R \, \mathrm{d}\chi$ ce acţionează pe un element de suprafaţă oarecare are — după cum rezultă din (4) — valoarea

$$u_3|_{z=0} = (1/4 \pi\mu) \, pR \, [z^2 R^{-3} + 2 (1 - \nu) R^{-1}]|_{z=0} \, \mathrm{d}R \, \mathrm{d}\chi = [(1 - \nu) / 2 \pi\mu] \, p \, \mathrm{d}R \, \mathrm{d}\chi . \quad (12)$$

Prin urmare, deplasarea punctului $(x, y, 0)$ sub acţiunea *tuturor* sarcinilor elementare repartizate în $\mathscr{D}$ va fi egală cu

$$u_3|_{z=0} = [(1 - \nu)/ 2 \pi\mu] \, p \iint_{\mathscr{D}} \mathrm{d}R \, \mathrm{d}\chi = [(1 - \nu)/ 2 \pi\mu] \, p \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\chi \int_0^{R_0(\chi)} \mathrm{d}R , \quad (13)$$

unde $R_0(\chi)$ este distanţa de la $(x, y, 0)$ la frontiera domeniului $\mathscr{D}$.

Întrucît problema este cu simetrie centrală, putem lua axele Oxy în așa fel încît una din ele să treacă prin punctul de observație. Prin urmare, acesta are coordonatele $(x, 0, 0)$.

După cum se vede pe figură, segmentul AB are lungimea

$$|AB| = 2\sqrt{a^2 - x^2 \sin^2\chi}. \tag{14}$$

Aceasta este suma segmentelor de lungimi $R_0(\chi)$ și $R_0(\pi + \chi)$, astfel că (13) devine

$$u_3|_{z=0} = [(1-\nu)/\pi\mu]\, p \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - x^2 \sin^2\chi}\, d\chi. \tag{15}$$

Notînd aci $x/a = t$ obținem deci:

$$u_3|_{z=0} = 2\,[(1-\nu)/\pi\mu]\, ap\, \mathrm{E}(t), \tag{16}$$

unde

$$E(t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - t^2 \sin^2\chi}\, d\chi \tag{17}$$

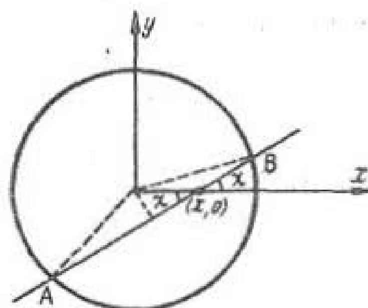


Fig. 9.5.2

este integrala eliptică completă de a doua speță, de modul t. Această integrală nu poate fi calculată cu mijloace elementare, dar valorile ei sînt tabulate. Vom reveni asupra ei în (10.5.18).

În particular, pentru $x = 0$ și $x = a$, așadar pentru $t = 0$, respectiv $t = 1$, obținem din (17): $\mathrm{E}(0) = \pi/2$, $\mathrm{E}(1) = 1$, astfel că din (16) urmează

$$u_3(0,0,0) = [(1-\nu)/\mu]\, a\, p, \qquad u_3(a,0,0) = [2(1-\nu)/\pi\mu]\, a\, p. \tag{18}$$

Ținînd seama de simetria centrală a problemei, urmează că deplasarea pe frontiera domeniului solicitat este de 1,57 ori mai mică decît în centrul discului $\mathscr{D}$. La o repartiție uniformă de presiuni pe frontieră, corespunde deci o repartiție cu totul neuniformă a deplasărilor.

Aceeași tehnică a suprapunerii soluțiilor de tip (4) poate fi utilizată în vederea determinării deplasărilor și tensiunilor în interiorul semispațiului $z > 0$. Pentru alte exemple, vezi de pildă A. Lurie [4], § 2.6.

§ 6. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU SEMISPAȚIUL ELASTIC (III)

a) Sarcina tangențială repartizată

Pentru simplitate, să ne mărginim la cazul unei sarcini dirijate după Ox, cel corespunzător sarcinii dirijate după Oy putînd fi studiat în mod similar. Cu aceasta, condiția (4.1) devine

$$\sigma_{31}|_{z=0} = -p_1(\xi, \eta), \quad \sigma_{32}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = 0 \tag{1}$$

(compară cu (4.2)). Funcția $p_1(\xi, \eta)$ este presupusă continuă într-o porțiune mărginită $\mathscr{D}$ a frontierei, și identic nulă în afara acesteia.

Ca și în § 4, soluția se caută sub forma reprezentării lui Grodskii, cu ajutorul unor potențiali de densitate $p_1(\xi, \eta)$. Prin analogie cu (4.28), se consideră mai întîi potențialul de simplu strat

$$\Omega^1(x, y, z) = -(1/4\,\pi\mu) \iint_{\mathscr{D}} p_1(\xi, \eta)\, R^{-1}\, \mathrm{d}D\,. \tag{2}$$

Amintind că pentru derivata normală pe frontieră a potențialului (4.23) am obținut valoarea (4.25), deducem că

$$\Omega^1_{,3}|_{z=+0} = (1/2\,\mu)\, p_1(\xi, \eta)\,. \tag{3}$$

Să considerăm de asemenea potențialul logaritmic analog cu (4.29), așadar

$$\omega^1(x, y, z) = -(1/4\,\pi\mu) \iint_{\mathscr{D}} p_1(\xi, \eta) \ln(R + z)\, \mathrm{d}D\,, \tag{4}$$

legat de cel precedent prin relația

$$\omega^1_{,3} = \Omega^1\,. \tag{5}$$

În fine, să introducem și funcția

$$\varpi^1(x, y, z) = -(1/4\,\pi\mu) \iint_{\mathscr{D}} p_1(\xi, \eta)\, [z \ln(R + z) - R]\, \mathrm{d}D\,, \tag{6}$$

legată de ω^1 prin relația

$$\varpi^1_{,3} = \omega^1. \tag{7}$$

Integralele definite în (2), (4) și (6) sînt evident funcții armonice în semispațiul $z > 0$. Ultimele două din ele *nu sînt* regulate la infinit — ceea ce nu va influența însă regularitatea soluției însăși. Indicele superior „1'' este un indice de numerotare, care pentru o sarcină dirijată în lungul axei Oy va fi înlocuit cu „2''.

Pentru început, să căutăm o eventuală componentă *armonică* $\boldsymbol{u}_0$ a soluției, urmînd a o corecta ulterior în așa fel, încît toate ecuațiile și condițiile la limită să fie în definitiv verificate.

Dacă avem $\Delta \boldsymbol{u}_0 = 0$, din ecuațiile lui Lamé urmează și grad div $\boldsymbol{u}_0 = 0$, astfel că $\theta_0 = \text{const}$. Vom presupune pentru început $\theta_0 = 0$, astfel că:

$$\Delta\, \boldsymbol{u}_0 = 0\,, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_0 = 0\,. \tag{8}$$

Construind componentele σ_{31} și σ_{32}, obținem din (1), ținînd seama de (3):

$$(u^0_{1,3} + u^0_{3,1})|_{z=+0} = -2\,\Omega^1_{,3}|_{z=+0}\,, \quad (u^0_{2,3} + u^0_{3,2})|_{z=+0} = 0\,. \tag{9}$$

Întrucît în ambii membri ai ambelor relații (9) intervin valori la limită ale unor funcții armonice și regulate, deducem

$$u^0_{1,3} + u^0_{3,1} = -2\,\Omega^1_{.3}\,, \quad u^0_{2,3} + u^0_{3,2} = 0\,,$$

sau încă, prin integrare în raport cu z:

$$u^0_1 = -2\,\Omega^1 - \int_a^z u^0_{3,1}\,\mathrm{d}z\,, \quad u^0_2 = -\int_b^z u^0_{3,2}\,\mathrm{d}z\,, \tag{10}$$

unde orice eventuale funcții arbitrare de x, y în membrul al doilea sînt nule, în virtutea regularității soluției căutate. Pentru ca deplasările să se anuleze la infinit ca $1/R$, este suficient să luăm $a = b = \infty$ în (10), astfel că

$$u^0_1 = -2\,\Omega^1 + \int_z^\infty u^0_{3,1}\,\mathrm{d}z\,, \quad u^0_2 = \int_z^\infty u^0_{3,2}\,\mathrm{d}z\,. \tag{11}$$

Ținînd seama de a doua relație (8), găsim acum

$$-2\,\Omega^1_{.1} + u^0_{3,3} + \int_z^\infty (u^0_{3,11} + u^0_{3,22})\,\mathrm{d}z = 0\,. \tag{12}$$

Ținînd seama aci de prima relație (8) precum și de faptul că, în virtutea regularității, trebuie să avem $\lim\limits_{z\to\infty} u^0_{3,3} = 0$, (12) se reduce la

$$u^0_{3,3} = \Omega^1_{.1}\,, \tag{13}$$

de unde, ținînd seama de (5) și integrînd în raport cu z:

$$u^0_3 = \omega^1_{.1}\,. \tag{14}$$

Introducînd (14) în (11) și făcînd uz și de (7), obținem de pildă:

$$u^0_1 = -2\,\Omega^1 + \int_z^\infty \varpi^1_{.113}\,\mathrm{d}z = -2\,\Omega^1 - \varpi^1_{.11}\,. \tag{15}$$

(Desigur, funcția ϖ^1 tinde la infinit pentru $R \to \infty$, dar derivata ce apare în (15) e nulă la infinit.) Raționînd la fel pentru toate componentele din (11), avem deci

$$u^0_1 = -2\,\Omega^1 - \varpi^1_{.11}\,, \quad u^0_2 = -\varpi^1_{.12}\,, \quad u^0_3 = \varpi^1_{.13}\,. \tag{16}$$

Prin construcție, vectorul $\boldsymbol{u}_0$ verifică ecuațiile Lamé omogene, condițiile de regularitate, și primele două condiții (1). Pentru a ține seama și de a treia condiție (1), vom calcula componenta σ^0_{33} care — întrucît $\theta_0 = 0$ — are forma

$$\sigma^0_{33} = 2\,\mu\, u^0_{3,3} = 2\,\mu\Omega^1_{.1}\,, \tag{17}$$

astfel că în general avem desigur $\sigma^0_{33}|_{z=+0} \neq 0$.

Formulele (16) descriu deci o stare în care tensiunile tangențiale la limită sînt cele date, dar în care apare și o componentă normală „parazitară", a tensiunii pe frontieră. Pentru a o elimina, trebuie să suprapunem soluției $\boldsymbol{u}_0$ o altă soluție de corecție $\boldsymbol{u}_c$ a ecuațiilor Lamé omogene, care să nu altereze primele două condiții (1) deja satisfăcute, dar să conducă la anularea componentei normale a tensiunii *totale* pe frontieră. Prin urmare, $\boldsymbol{u}_c$ este soluția problemei la limită

$$\sigma^c_{31}|_{z=+0} = \sigma^c_{32}|_{z=+0} = 0\,, \quad \sigma^c_{33}|_{z=+0} = -2\,\mu\Omega^1_{,1}|_{z=+0}\,, \tag{18}$$

— așadar a unei probleme Neumann pentru semispațiul solicitat de o sarcină *normală* repartizată (și cunoscută, întrucît Ω^1 este cunoscut o dată cu $p_1(\xi, \eta)$). Soluția corespunzătoare are deci forma (4.35). Potențialul de corecție Ω trebuie determinat din relația ce decurge din (4.25), așadar din

$$\Omega_{,3}|_{z=+0} = (1/2\mu)\, q(\xi, \eta)\,, \tag{19}$$

unde $q(\xi, \eta)$ coincide cu sarcina normală pe frontieră (vezi (4.2) și (4.26)). Avem deci mai întîi relația de tip (4.2):

$$\sigma^c_{33}|_{z=+0} = -\,q(\xi, \eta)\,; \tag{20}$$

apoi, relația ce decurge din (19):

$$-\,q(\xi, \eta) = -\,2\,\mu\Omega_{,3}|_{z=+0}\,; \tag{21}$$

și în fine și ultima relație (18). De aci deducem mai întîi, utilizînd și (5), că

$$\Omega_{,3}|_{z=+0} = \omega^1_{,31}|_{z=+0}\,. \tag{22}$$

În virtutea teoremei de unicitate, de repetate ori folosită, egalitatea se păstrează și pentru $z > 0$, și, după integrare în raport cu z, conduce la valoarea

$$\Omega = \omega^1_{,1}\,. \tag{23}$$

Mai departe, potențialul logaritmic ω este dat de expresia

$$\omega = \int_a^z \Omega\, dz = \int_a^z \omega^1_{,1}\, dz\,,$$

unde trebuie să luăm $a = \infty$; ținînd seama de (7), obținem de aci

$$\omega = \varpi^1_{,1}\,. \tag{24}$$

b) Formulele lui Cerruti

Componentele vectorului $\boldsymbol{u}_c$ pot fi scrise acum efectiv, introducînd (23), (24) în (4.35) și ținînd seama de (5) și (7):

$$\begin{aligned} u^c_1 &= z\,\omega^1_{,11} + (1-2\nu)\,\varpi^1_{,11}\,,\\ u^c_2 &= z\,\omega^1_{,12} + (1-2\nu)\,\varpi^1_{,12}\,,\\ u^c_3 &= z\,\Omega^1_{,1} - 2\,(1-\nu)\,\omega^1_{,1}\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Adunînd acum componentele deplasării u_0 din (16) cu cele ale deplasării u_c din (25), se obține soluția căutată :

$$\begin{aligned} u_1 &= -2\,\Omega^1 + z\,\omega^1_{.11} - 2\nu\,\varpi^1_{.11}, \\ u_2 &= \qquad\quad z\,\omega^1_{.12} - 2\nu\,\varpi^1_{.12}, \\ u_3 &= \qquad\quad z\,\Omega^1_{.1} - (1-2\nu)\,\omega^1_{.1}. \end{aligned} \tag{26}$$

Formulele (26)— datorate lui V. Cerruti [1] și regăsite pe calea de mai sus de către A. Lurie [4], § 2.8 — constituie analogul formulelor lui Hertz (4.35). Ca și în cazul sarcinii normale, componenta u_3 are o structură mai simplă.

Potențialul de simplu strat Ω^1 este regulat la infinit. Pentru $R' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$, derivatele $\Omega^1_{.k}$ tind spre zero ca $1/R'^2$; derivatele $\omega^1_{.k}$ tind spre zero ca $1/R'$; derivatele $\omega^1_{.hk}$ tind spre zero ca $1/R'^2$; în fine, derivatele $\varpi^1_{.hk}$ tind spre zero ca $1/R'$. Prin urmare, deși integralele (4) și (6) nu sînt mărginite în semispațiul $z > 0$, formulele (26) dau o soluție regulată a problemei. În fond, aceste integrale pot fi privite numai ca o notație comodă pentru anumite funcții de construit prin intermediul lor.

Soluția corespunzătoare unei sarcini $p_2(\xi, \eta)$ dirijate după Oy se obține definind niște funcții Ω^2, ω^2, ϖ^2 prin relații analoge cu (2), (4), (6), înlocuind în (26) potențialii de indice 1 cu cei de indice 2, și intervertind variabilele x, y, precum și componentele u_1, u_2.

§ 7. SEMISPAȚIUL SOLICITAT DE O SARCINĂ OARECARE PE FRONTIERĂ

a) Forță concentrată oarecare

Raționamentele de la începutul § 5 pot fi repetate cuvînt cu cuvînt. Potențialii (6.2), (6.4), (6.6) pot fi scriși sub forma unor produse de convoluție, și formulele lui Cerruti rămîn valabile chiar pentru sarcini tangențiale care nu sînt reprezentabile decît prin distribuții. În particular se pot considera forțe concentrate tangențiale, generînd stări elastice descrise prin potențiali similari cu (5.2) :

$$\widetilde{\Omega}^1 = -(1/4\,\pi\mu)\,R^{-1}, \tag{1}$$

$$\widetilde{\omega}^1 = -(1/4\,\pi\mu)\ln(R+z), \tag{2}$$

$$\widetilde{\varpi}^1 = -(1/4\,\pi\mu)\,[z\ln(R+z) - R], \tag{3}$$

legați între ei prin relații analoge cu (6.5) și (6.7) :

$$\widetilde{\omega}^1_{.3} = \widetilde{\Omega}^1, \tag{4}$$

$$\widetilde{\varpi}^1_{.3} = \widetilde{\omega}^1. \tag{5}$$

Introducînd deci în (6.26) potențialii (1)—(3), obținem formulele

$$\begin{aligned} u_1 &= -2\,\tilde{\Omega}^1 + z\,\tilde{\omega}^1_{.11} - 2\nu\,\tilde{\varpi}^1_{.11}, \\ u_2 &= \qquad\quad z\,\tilde{\omega}^1_{.12} - 2\nu\,\tilde{\varpi}^1_{.12}, \\ u_3 &= \qquad\quad z\,\tilde{\Omega}^1_{.1} - (1-2\nu)\,\tilde{\omega}^1_{.1}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Pornind de la (1)—(6), regăsim, prin suprapunere, tocmai soluția (6.26).

Să explicităm formulele de mai sus. Avem pe rînd

$$\tilde{\Omega}^1_{.1} = (1/4\,\pi\mu)\,x R^{-3}, \tag{7}$$

$$\tilde{\omega}^1_{.1} = -(1/4\,\pi\mu)\,x\,R^{-1}\,(R+z)^{-1}, \tag{8}$$

$$\tilde{\omega}^1_{.11} = (1/4\,\pi\mu)\,[x^2(2R+z)\,R^{-3}\,(R+z)^{-2} - R^{-1}\,(R+z)^{-1}], \tag{9}$$

$$\tilde{\omega}^1_{.12} = (1/4\,\pi\mu)\,xy\,(2R+z)\,R^{-3}\,(R+z)^{-2}, \tag{10}$$

$$\tilde{\varpi}^1_{.1} = (1/4\,\pi\mu)\,x\,(R+z)^{-1}, \tag{11}$$

$$\tilde{\varpi}^1_{.11} = (1/4\,\pi\mu)\,[(R+z)^{-1} - x^2\,R^{-1}\,(R+z)^{-2}], \tag{12}$$

$$\tilde{\varpi}^1_{.12} = -(1/4\,\pi\mu)\,xy\,R^{-1}\,(R+z)^{-2}. \tag{13}$$

Introducînd acum (1), (9) și (12) în expresia componentei u_1 din (6), obținem mai întîi

$$u_1 = \frac{1}{2\,\pi\mu}\,\frac{1}{R} - \frac{1}{4\,\pi\mu}\,z\left[\frac{1}{R(R+z)} - x^2\,\frac{2R+z}{R^3(R+z)^2}\right] - \frac{\nu}{2\,\pi\mu}\left[\frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2}\right]. \tag{14}$$

Ținînd seama însă de relațiile

$$\frac{z}{R(R+z)} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R+z}, \qquad \frac{z(2R+z)}{R^3(R+z)^2} = \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)^2}, \tag{15}$$

deducem din (14)

$$u_1 = \frac{1}{4\,\pi\mu}\left[\frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} + (1-2\nu)\left(\frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2}\right)\right]. \tag{16}$$

Mai departe, introducînd (10) și (13) în u_2 din (6), obținem

$$u_2 = \frac{1}{4\,\pi\mu}\,\frac{xyz}{R^3}\,\frac{(2R+z)}{(R+z)^2} + \frac{2\nu}{4\,\pi\mu}\,\frac{xy}{R(R+z)^2}, \tag{17}$$

sau încă, ținînd seama de a doua relație (15) :

$$u_2 = \frac{1}{4\,\pi\mu}\,xy\left[\frac{1}{R^3} - (1-2\nu)\,\frac{1}{R(R+z)^2}\right]. \tag{18}$$

În fine, introducînd (7), (8) în expresia lui u_3 din (6), găsim

$$u_3 = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{xz}{R^3} + (1-2\nu)\frac{x}{R(R+z)}\right]. \tag{19}$$

Expresiile (16), (18) și (19) (analoge cu (5.4)) rezolvă problema acțiunii unei forțe concentrate unitare *tangențiale*, dirijate după direcția pozitivă a axei Ox. Schimbînd între ele în aceste relații coordonatele x, y, precum și deplasările u_1, u_2, obținem soluția corespunzătoare unei sarcini de același tip, dirijate însă după Oy.

Prin suprapunere, putem scrie acum soluția problemei semispațiului solicitat în origine de o forță concentrată $\boldsymbol{p}$, de componente p_1, p_2, p_3. Făcînd uz de (16), (18), (19) și de (5.4), căpătăm în definitiv:

$$\begin{aligned}
4\pi\mu\, u_1 = {} & p_1\left\{R^{-1} + x^2 R^{-3} + (1-2\nu)\left[(R+z)^{-1} - x^2 R^{-1}(R+z)^{-2}\right]\right\} + \\
& + p_2\left\{xyR^{-3} + (1-2\nu)\left[- xyR^{-1}(R+z)^{-2}\right]\right\} + \\
& + p_3\left\{xzR^{-3} + (1-2\nu)\left[- xR^{-1}(R+z)^{-1}\right]\right\}, \\
4\pi\mu\, u_2 = {} & p_1\left\{xyR^{-3} + (1-2\nu)\left[- xyR^{-1}(R+z)^{-2}\right]\right\} + \\
& + p_2\left\{R^{-1} + y^2 R^{-3} + (1-2\nu)\left[(R+z)^{-1} - y^2 R^{-1}(R+z)^{-2}\right]\right\} + \\
& + p_3\left\{yz R^{-3} + (1-2\nu)\left[- yR^{-1}(R+z)^{-1}\right]\right\}, \\
4\pi\mu\, u_3 = {} & p_1\left\{xz R^{-3} + (1-2\nu)\left[x R^{-1}(R+z)^{-1}\right]\right\} + \\
& + p_2\left\{yz R^{-3} + (1-2\nu)\left[y R^{-1}(R+z)^{-1}\right]\right\} + \\
& + p_3\left\{R^{-1} + z^2 R^{-3} + (1-2\nu)\left[R^{-1}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Grupînd acum cîte două coloanele din (20), vom scrie

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{u}^2. \tag{21}$$

Pentru $\boldsymbol{u}^1$ avem evident

$$4\pi\mu\, \boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{p}/R + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}/R^3), \tag{22}$$

așadar o expresie de același tip (deși nu identică) cu soluția (7.8.4) corespunzătoare acțiunii unei forțe concentrate $\boldsymbol{Q}$ în originea *spațiului* elastic. (Amintim că acolo avem $A = 1/4\pi\mu$.)

Pentru a simplifica aspectul lui $\boldsymbol{u}^2$, vom folosi relațiile

$$\begin{aligned}
&[x(R+z)^{-1}]_{,1} = (R+z)^{-1} - x^2 R^{-1}(R+z)^{-2}, \\
&[x(R+z)^{-1}]_{,2} = - xy\, R^{-1}(R+z)^{-2}, \\
&[x(R+z)^{-1}]_{,3} = - x\, R^{-1}(R+z)^{-1},
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&[\ln(R+z)]_{,1} = x\, R^{-1}(R+z)^{-1}, \\
&[\ln(R+z)]_{,2} = y\, R^{-1}(R+z)^{-1}, \\
&[\ln(R+z)]_{,3} = R^{-1},
\end{aligned} \tag{24}$$

precum și cele ce se obțin de aci dacă intervertim variabilele x și y.

Cu aceasta, avem pe rînd

$$[4\pi\mu/(1-2\nu)]\, u_1^2 = \boldsymbol{p}\cdot \operatorname{grad}\,[x(R+z)^{-1}],$$
$$[4\pi\mu/(1-2\nu)]\, u_2^2 = \boldsymbol{p}\cdot \operatorname{grad}\,[y(R+z)^{-1}], \tag{25}$$
$$[4\pi\mu/(1-2\nu)]\, u_3^2 = \boldsymbol{p}\cdot \operatorname{grad}\ln(R+z).$$

Introducînd acum (22) şi (25) în (21), obţinem în definitiv

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\frac{\boldsymbol{p}}{R} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}{R^3}\boldsymbol{x} + (1-2\nu)(\boldsymbol{p}\cdot\operatorname{grad})\left[\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{R+z} + \boldsymbol{k}\ln(R+z)\right]\right\}. \tag{26}$$

Relaţia (26) constituie analogul relaţiei (7.8.4), dar e lipsită atît de simplitatea, cît şi de simetria ei.

b) *Sarcină repartizată oarecare*

Soluţia (26) rămîne valabilă pentru o forţă $\boldsymbol{p}$ aplicată în $(\xi, \eta, 0)$, dacă înlocuim peste tot (inclusiv în R) vectorul $\boldsymbol{x}$ prin $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}$. Pentru un număr finit de astfel de forţe, trebuie să sumăm soluţiile corespunzătoare. În fine, în cazul unei sarcini continuu repartizate $\boldsymbol{p}(\xi, \eta)$, obţinem prin integrare

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{4\pi\mu}\iint_{\mathscr{D}}\left\{\frac{\boldsymbol{p}}{R} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}\boldsymbol{R} + (1-2\nu)(\boldsymbol{p}\cdot\operatorname{grad})\left[\frac{\boldsymbol{i}(x-\xi)+\boldsymbol{j}(y-\eta)}{R+z} + \boldsymbol{k}\ln(R+z)\right]\right\}\mathrm{d}D. \tag{27}$$

Desigur, acelaşi rezultat se capătă dacă înlocuim în (20) variabilele x, y prin $x-\xi$, $y-\eta$, şi integrăm pe frontieră. Este vizibil că (27) este de forma (7.12.13) (pentru $\boldsymbol{F} = 0$).

Aceeaşi formulă (27) se poate căpăta şi prin suprapunere de soluţii (4.35), (6.26), şi a soluţiei similare cu (6.26) pentru sarcina dirijată după Oy, fiecare înmulţită cu componenta corespunzătoare a lui $\boldsymbol{p}(\xi, \eta)$. Tot astfel, ca şi în § 5 şi la începutul paragrafului de faţă, integrala din (27) poate fi privită ca înlocuită printr-un produs de convoluţie.

În definitiv, fiind dată sarcina $\boldsymbol{p}(\xi, \eta)$ de componente $p_i(\xi, \eta)$ *unde indicele i are acum valorile* 1, 2, 3, se consideră funcţiile

$$\Omega^i(x, y, z) = -(1/4\pi\mu)\iint_{\mathscr{D}} p_i(\xi, \eta)\, R^{-1}\,\mathrm{d}D, \tag{28}$$

$$\omega^i(x, y, z) = -(1/4\pi\mu)\iint_{\mathscr{D}} p_i(\xi, \eta)\ln(R+z)\,\mathrm{d}D, \tag{29}$$

$$\varpi^i(x, y, z) = -(1/4\pi\mu)\iint_{\mathscr{D}} p_i(\xi, \eta)\,[z\ln(R+z) - R]\,\mathrm{d}D, \tag{30}$$

unde

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}. \tag{31}$$

După cum se vede, potențialii lui Hertz Ω, ω se notează acum cu Ω^3, ω^3. Funcțiile considerate sînt legate între ele prin relațiile

$$\omega^i_{.3} = \Omega^i, \tag{32}$$

$$\bar{\omega}^i_{.3} = \omega^i. \tag{33}$$

Utilizînd din nou (6.26) și (4.35), precum și (32) și (33) — inclusiv în formulele lui Hertz unde funcția $\bar{\omega}^3$ e introdusă numai pentru simetrizarea notației — obținem

$$\begin{aligned} u_1 &= -2\Omega^1 + \omega^3_{.1} + z(\omega^1_{.1} + \omega^2_{.2} + \omega^3_{.3})_{.1} - \\ &\qquad - 2\nu(\bar{\omega}^1_{.1} + \bar{\omega}^2_{.2} + \bar{\omega}^3_{.3})_{.1}, \\ u_2 &= -2\Omega^2 + \omega^3_{.2} + z(\omega^1_{.1} + \omega^2_{.2} + \omega^3_{.3})_{.2} - \\ &\qquad - 2\nu(\bar{\omega}^1_{.1} + \bar{\omega}^2_{.2} + \bar{\omega}^3_{.3})_{.2}, \\ u_3 &= -2\Omega^3 + \omega^3_{.3} + z(\Omega^1_{.1} + \Omega^2_{.2} + \Omega^3_{.3}) - \\ &\qquad - (1-2\nu)(\omega^1_{.1} + \omega^2_{.2} + \omega^3_{.3}). \end{aligned} \tag{34}$$

Pentru simetrizarea formulelor, cele două paranteze din expresia u_3 pot fi înlocuite cu aceleași paranteze ce apar și în u_1 și u_2, derivate însă în raport cu z. Formulele astfel modificate se scriu împreună ca

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= -2\boldsymbol{\omega}_{,33} + \text{grad}\ \omega^3 + z\ \text{grad div}\ \boldsymbol{\omega}_{,3} - \\ &\quad - 2\nu\ \text{grad div}\ \boldsymbol{\omega} - (1-4\nu)\boldsymbol{k}\ \text{div}\ \boldsymbol{\omega}_{,3}, \end{aligned} \tag{35}$$

unde am notat cu $\boldsymbol{\omega}$ vectorul de componente $\bar{\omega}^1$, $\bar{\omega}^2$, $\bar{\omega}^3$.

§ 8. PROBLEMA SEMISPAȚIULUI ELASTIC CU FRONTIERA LIBERĂ, SOLICITAT DE SARCINI APLICATE ÎN PUNCTE INTERIOARE

Să presupunem că într-un punct interior al semispațiului $z > 0$ acționează o forță concentrată $\boldsymbol{p}$. Cazul frontierei *fixe* a fost studiat de L. Rongved [1], N. Șandru [1]. Aci, vom examina cazul frontierei *libere* (R. Mindlin [1], [4]; A. Lurie [4], § 2.9.)

Soluția trebuie căutată ca sumă a soluției pentru spațiul *nemărginit* solicitat de aceeași forță, și a unui vector de corecție care trebuie să fie regulat pentru $z > 0$, și să genereze pe frontieră tensiuni egale și opuse celor provenite din soluția pentru spațiul nemărginit. Ideea raționamentului este, din acest punct de vedere, analogă celei din § 6.

În terminologia din § 7.12, ne propunem să găsim matricea lui Green pentru problema lui Neumann pentru semispațiul elastic. Dificultățile din § 7.12 nu mai apar, întrucît un corp

nemărginit se poate afla în echilibru sub acțiunea *unei singure* forțe aplicate asupra sa. Rezolvînd problema și făcînd apoi ca punctul de aplicare al forței să tindă spre frontieră, obținem din nou valoarea la limită a matricii lui Green, deja întîlnită în § 7.

Este firesc să abordăm problema prin acea metodă (frecvent folosită în hidrodinamică) care permite și obținerea funcției lui Green pentru ecuația lui Laplace pentru semispațiu : *metoda reflectării*, introdusă în teoria elasticității de C. Somigliana [5].

a) Forța concentrată dirijată după normala la frontieră

Fie pentru început că în punctul $(0, 0, +h)$ acționează o forță unitară concentrată dirijată în sensul pozitiv al axei Oz. Soluția corespunzătoare — notată $\boldsymbol{u}_+$ — se obține din (7.8.43) dacă luăm drept punct de sursă punctul $(0, 0, h)$ și alegem $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{k}$. Prin urmare avem

$$\boldsymbol{u}_+ = [1/16\,\pi\mu\,(1-\nu)]\,[(3-4\nu)\,R_+^{-1}\,\boldsymbol{k} + (z-h)\,R_+^{-3}\,\boldsymbol{R}_+]\,, \tag{1}$$

unde am notat

$$\boldsymbol{R} = (x,\,y,\,z-h)\,,\quad R_+ = \sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}\,. \tag{2}$$

Starea elastică (1) nu lasă desigur planul $z = 0$ liber. Pentru a obține eliberarea lui de tensiuni, trebuie să suprapunem soluției (1), alte soluții ale ecuațiilor lui Lamé omogene, *regulate în* $z>0$, și care generează pe $z = 0$ tensiuni opuse celor generate de (1). Cea mai simplă acțiune mecanică cu un astfel de efect compensator este desigur cea a unei forțe egale și opuse celei date, aplicate în punctul $(0,0,-h)$.

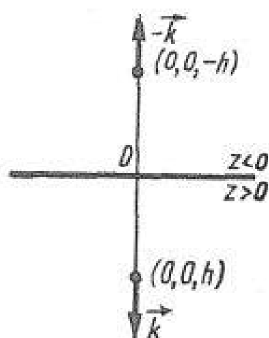


Fig. 9.8.1

Termenul corespunzător acestei forțe fictive este o soluție a ecuațiilor lui Lamé omogene, regulată în $z > 0$, și care nu implică deci apariția vreunei acțiuni mecanice concentrate în semi-spațiul $z > 0$. Acest termen — fie el $\boldsymbol{u}_-$ — se obține din (7.8.43) dacă luăm drept punct de sursă punctul $(0, 0, -h)$ și alegem $\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{u}_- = -\,[1/16\pi\mu\,(1-\nu)]\,[(3-4\nu)\,R_-^{-1}\,\boldsymbol{k} + (z+h)\,R_-^{-3}\,\boldsymbol{R}_-], \tag{3}$$

unde am notat

$$\boldsymbol{R}_- = (x,\,y,\,z+h),\qquad R_- = \sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}. \tag{4}$$

Pentru a calcula *suma* tensiunilor generate pe planul $z = 0$ de deplasările (1) și (3), vom face uz de expresia (7.8.44) a vectorului $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})$, luînd *pentru ambele soluții* aceeași normală $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$ (normala exterioară la

semispațiul $z > 0$), ținînd seama în prima soluție de (2) și luînd $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{k}$, iar în cea de a doua, utilizînd (4) și punînd $\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{k}$. Obținem astfel

$$\boldsymbol{\sigma}_{-k}(\boldsymbol{u}_+) = -[(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)]\, R_+^{-3}\, [(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_+)\, \boldsymbol{k} + (-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_+)\, \boldsymbol{k} + \\ + (-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{R}_+ + 3\,(1-2\nu)^{-1}\, R_+^{-2}(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_+)\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_+)\,\boldsymbol{R}_+],$$

de unde, efectuînd calculele,

$$\boldsymbol{\sigma}^{+}_{-k} = +[(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)]\,(\boldsymbol{R}_+/R_+^3)\,[1 + 3(1-2\nu)^{-1}(z-h)^2 R_+^{-2}], \quad (5)$$

și în mod analog

$$\boldsymbol{\sigma}^{-}_{-k} = -[(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)]\,(\boldsymbol{R}_-/R_-^3)\,[1 + 3\,(1-2\nu)^{-1}(z+h)^2 R_-^{-2}]. \quad (6)$$

Luînd în (5) și (6) $z = 0$, și notînd

$$R_+|_{z=0} = R_-|_{z=0} = \sqrt{x^2+y^2+h^2} = r, \quad (7)$$

obținem pentru suma tensiunilor (5) și (6) pe frontieră:

$$(\boldsymbol{\sigma}^{+}_{-k} + \boldsymbol{\sigma}^{-}_{-k})|_{z=0} = -[(1-2\nu)/4\pi(1-\nu)]\, hr^{-3}\,[1 + 3\,(1-2\nu)^{-1}h^2r^{-2}]\,\boldsymbol{k}. \quad (8)$$

Tensiunile generate de forțele $\boldsymbol{k}$ și $-\boldsymbol{k}$ lasă deci planul frontieră *liber de tensiuni tangențiale.*

Pentru a înțelege acest fapt, să ne imaginăm planul $z=0$ ca avînd două fețe ($z=+0$ și $z=-0$). Fiecare față este solicitată *în același fel* de forțele acționînd în semispațiile corespunzătoare (și care produc de ex. o alunecare *spre* origine pentru forțele din fig. 9.8.1). În virtutea principiului acțiunii și reacțiunii, fața $z=-0$ transmite feței $z=+0$ o acțiune egală și de sens opus, ceea ce explică anularea *sumei* acțiunilor tangențiale corspunzătoare pentru o *anumită* față, fie ca $z=+0$.

Să notăm cu σ_{ij}^{m} componentele stării de tensiune obținute prin suprapunerea efectelor acestor două forțe concentrate. (Semnul „terț" se referă la faptul că sarcina al cărei efect îl studiem e dirijată după Oz.) Din (8) urmează așadar

$$-\sigma_{33}^{m}|_{z=0} = \sigma^{m}_{-3;3}|_{z=0} = -[h/4\pi(1-\nu)]\,[(1-2\nu)\,r^{-3} + 3\,h^2\,r^{-5}]. \quad (9)$$

Pentru a elibera frontiera, trebuie să adăugăm deci stării obținute prin sumare din (1) și (3), acea stare elastică, regulată pentru $z > 0$, și care corespunde acțiunii pe frontieră a unei sarcini *normale, egale și de semn opus* cu (9), ceea ce conduce la găsirea unui potențial Ω^{m} care să verifice condiția (4.25), așadar

$$\Omega^{m}_{,3}|_{z=+0} = (1/2\mu)\, q(\xi,\eta), \quad (10)$$

unde $q(\xi,\eta)$ este o sarcină normală fictivă pe frontieră. Ținînd seama de legătura (4.2) între componenta σ_{33} și sarcina normală, trebuie să avem deci

$$q(\xi,\eta) = +\sigma_{33}^{m}|_{z=0} = [h/4\pi(1-\nu)]\,[(1-2\nu)\,r^{-3} + 3h^2\,r^{-5}], \quad (11)$$

astfel încît condiţia la limită (10) devine

$$\Omega'''_{,3}|_{z=0} = [h/8\pi\mu(1-\nu)]\,[(1-2\nu)r^{-3} + 3h^2 r^{-5}]. \tag{12}$$

Ca şi în § 4, soluţia acestei probleme poate fi căutată sub forma unui potenţial newtonian de simplu strat, de densitate dată prin intermediul lui (12). Dar acest potenţial poate fi găsit şi sub formă finită.

Anume, să ţinem seama că funcţia Ω''' trebuie să fie armonică şi regulată pentru $z > 0$. Întrucît în (12) apare funcţia r, vom căuta potenţialul Ω''' ca funcţie de R_-: într-adevăr, valoarea la limită a lui R_- este chiar r, iar R_- nu se anulează în semispaţiul $z > 0$, astfel că Ω''' poate fi construit cu ajutorul funcţiei $1/R_-$ şi al derivatelor acesteia. Să presupunem deci că avem

$$\Omega'''(x, y, z) = A\,R_-^{-1} + B\,(R_-^{-1})_{,3}. \tag{13}$$

Un calcul simplu dă de aci

$$\Omega'''_{,3} = -A\,(z+h)\,R_-^{-3} + 3\,B\,(z+h)^2\,R_-^{-5} - B\,R_-^{-3},$$

şi deci

$$\Omega'''_{,3}|_{z=0} = -(Ah + B)\,r^{-3} + 3B\,h^2\,r^{-5}. \tag{14}$$

Prin comparaţie cu (12), căpătăm valorile coeficienţilor

$$A = -1/4\pi\mu, \quad B = h/8\pi\mu(1-\nu),$$

astfel că potenţialul de simplu strat de determinat are expresia

$$\Omega''' = -(1/4\pi\mu)\,\{R_-^{-1} + [h/2\,(1-\nu)]\,(z+h)\,R_-^{-3}\}. \tag{15}$$

Potenţialul ω''' se obţine din (15) prin integrare în raport cu $Z = z + h$:

$$\omega''' = -(1/4\pi\mu)\,\{\ln\,(R_- + z + h) - [h/2\,(1-\nu)]\,R_-^{-1}\}. \tag{16}$$

Soluţia în deplasări a problemei acţiunii unei forţe concentrate unitare, aplicate în interiorul semispaţiului şi *dirijate paralel cu* Oz, se capătă deci însumînd (1), (3) şi (4.34), unde Ω şi ω sînt daţi de (15), (16):

$$\boldsymbol{u} = [1/16\pi\mu(1-\nu)]\,\{(3-4\nu)(R_+^{-1}+R_-^{-1})\boldsymbol{k} + [(z-h)R_+^{-3}\boldsymbol{R}_+ - (z+h)R_-^{-3}\boldsymbol{R}_-]\} + \\ + \operatorname{grad}\,[z\,\Omega''' + (1-2\nu)\,\omega'''] - 4\,(1-\nu)\,\boldsymbol{k}\,\Omega'''. \tag{17}$$

b) Forţă concentrată dirijată paralel la frontieră

Să presupunem acum că în punctul $(0,0,h)$ acţionează o forţă unitară *dirijată în sensul pozitiv al axei* Ox. Raţionînd ca în cazul precedent, vom aplica în punctul $(0,0,-h)$ o sarcină de aceeaşi intensitate, direcţie şi sens. Întrucît efectul acestor două sarcini este identic pentru feţele

$z = +0$, respectiv $z = -0$, e de așteptat ca tensiunile tangențiale *totale* generate pe elementul de frontieră de normală exterioară $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$, să fie nule.

Vectorul deplasare corespunzător acțiunii forței $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{i}$ aplicate în punctul $(0,0, h)$ se va scrie, după (7.8.43) :

$$\boldsymbol{u}_+ = [1/16\pi\mu(1-\nu)]\,[(3-4\nu)\, R_+^{-1}\boldsymbol{i} + x\, R_+^{-3}\boldsymbol{R}_+]. \tag{18}$$

Vectorul deplasare corespunzător acțiunii forței fictive $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{i}$ aplicate în punctul $(0,0, -h)$ se va scrie la rîndul său

$$\boldsymbol{u}_- = [1/16\pi\mu(1-\nu)]\,[(3-4\nu)\, R_-^{-1}\boldsymbol{i} + x\, R_-^{-3}\boldsymbol{R}_-]. \tag{19}$$

Pentru vectorul tensiune corespunzător deplasării (18) obținem din (7.8.44) (pentru $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{i}$ și $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$, vectorul de poziție $\boldsymbol{x}$ fiind înlocuit cu $\boldsymbol{R}_+$) :

$$\boldsymbol{\sigma}_{-k}(\boldsymbol{u}_+) = -[(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)]\, R_+^{-3}\, [(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{R}_+)\,\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_+)\,\boldsymbol{i} - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{R}_+ + $$
$$+ 3\,(1-2\nu)^{-1}\, R_+^{-2}\,(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_+)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{R}_+)\,\boldsymbol{R}_+],$$

sau încă

$$\boldsymbol{\sigma}^{+}_{-k} = [(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)]R_+^{-3}[-x\boldsymbol{k} + (z-h)\,\boldsymbol{i} + 3(1-2\nu)^{-1}x(z-h)R_+^{-2}\boldsymbol{R}_+]. \tag{20}$$

Pentru vectorul tensiune corespunzător lui (19) obținem în mod analog

$$\boldsymbol{\sigma}^{-}_{-k} = [(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)]R_-^{-3}[-x\boldsymbol{k} + (z+h)\,\boldsymbol{i} + 3(1-2\nu)^{-1}x(z+h)R_-^{-2}\boldsymbol{R}_-]. \tag{21}$$

Calculînd acum suma tensiunilor aplicate pe planul $z = 0$ obținem — ținînd din nou seama de notația (7) — :

$$(\boldsymbol{\sigma}^{+}_{-k} + \boldsymbol{\sigma}^{-}_{-k})|_{z=0} = -\,[1/4\pi(1-\nu)]\, x\, r^{-3}\,[(1-2\nu) - 3h^2 r^{-2}]\,\boldsymbol{k}. \tag{22}$$

Ca și în cazul sarcinii concentrate dirijate după Oz, va trebui să găsim o a treia soluție a ecuațiilor Lamé omogene, corespunzătoare unei sarcini normale distribuite pe frontieră. În acest scop, va trebui să determinăm potențialul de simplu strat Ω' (unde semnul „prim" se referă la faptul că sarcina de studiat acționează după Ox), din condiția la limită

$$\Omega'_{,3}|_{z=+0} = (1/2\mu)\, q'(\xi, \eta). \tag{23}$$

Raționînd ca în (10) — (12) și ținînd seama de (22), se găsește condiția

$$\Omega'_{,3}|_{z=+0} = (1/2\mu)\,(\sigma_{33}^{+} + \sigma_{33}^{-})|_{z=+0} =$$
$$= [1/8\pi\mu(1-\nu)]\,[(1-2\nu)\, xr^{-3} - 3h^2\, x\, r^{-5}]. \tag{24}$$

Potențialul Ω' poate fi obținut printr-un procedeu analog celui folosit pentru determinarea lui Ω'''. Pentru aceasta, se observă că avem

$$[\ln(R_- + z + h)]_{,3} = R_-^{-1},\ (R_-^{-1})_{,1} = -\,xR_-^{-3},\ (R_-^{-1})_{,13} = 3\,(z+h)\, xR_-^{-5}, \tag{25}$$

astfel că cei doi termeni ce apar în (24) pot fi puși sub forma

$$xr^{-3} = -\,(R_-^{-1})_{,1}|_{z=0}, \qquad -\,3h^2\, xr^{-5} = -\,h\,(R_-^{-1})_{,13}|_{z=0}. \tag{26}$$

Ținînd seama de (25) și (26), condiția la limită (24) devine

$$\Omega'_{,3}|_{z=0} = [1/8\pi\mu(1-\nu)]\{-(1-2\nu)[\ln(R_-+z+h)]_{,13} - h(R_-^{-1})_{,13}\}|_{z=0} \quad (27)$$

de unde, pentru motive de repetate ori expuse, urmează

$$\Omega' = -[1/8\pi\mu(1-\nu)][(1-2\nu)\ln(R_- + z + h) + h R_-^{-1}]_{,1}. \quad (28)$$

Ținînd seama de prima relație (25), precum și de faptul că

$$[(z+h)\ln(R_- + z + h) - R_-]_{,3} = \ln(R_- + z + h), \quad (29)$$

deducem prin integrarea în raport cu z a expresiei (28):

$$\omega' = -[1/8\pi\mu(1-\nu)]\{(1-2\nu)[(z+h)\ln(R_- + z + h) - R_-] + \\ + h\ln(R_- + z + h)\}_{,1}. \quad (30)$$

Soluția în deplasări a problemei semispațiului solicitat de o forță unitară concentrată aplicată în interiorul semispațiului și dirijată paralel cu Ox se obține deci sumînd soluțiile (18), (19) și (4.34), unde Ω, ω sînt dați de (28) și (30):

$$\boldsymbol{u} = [1/16\pi\mu(1-\nu)][(3-4\nu)(R_+^{-1} + R_-^{-1})\boldsymbol{i} + x(R_+^{-3}\boldsymbol{R}_+ + R_-^{-3}\boldsymbol{R}_-)] + \\ + \operatorname{grad}[z\Omega' + (1-2\nu)\omega'] - 4(1-\nu)\boldsymbol{k}\Omega'. \quad (31)$$

Pentru o forță aplicată în $(0,0,h)$ și dirijată după Oy, soluția rezultă tot sub forma (31), intervertind rolurile lui x, u, $\boldsymbol{i}$ cu y, v, $\boldsymbol{j}$, și înlocuind potențialii Ω', ω' prin potențiali Ω'', ω'' ce se deduc în același mod din (28), (30).

c) *Cazul unei sarcini oarecare*

Soluția problemei semispațiului solicitat de o forță concentrată $\boldsymbol{p}$ de componente p_1, p_2, p_3 aplicată într-un punct $(0,0,h)$ se capătă acum prin suprapunere. Expresia finală corespunzătoare este greoaie, dar elementară.

OBSERVAȚIE. În rezolvarea acestei probleme nu intervin funcții mai complicate decît în problema semispațiului solicitat pe frontieră: peste cele două soluții Kelvin-Somigliana, avem de suprapus cîte o soluție corespunzătoare unei sarcini *normale* pe frontieră, în determinarea căreia intervin numai potențiali de tipul (7.28), (7.29).

Componentele vectorului (31), ale analogului său pentru direcția Oy, și ale vectorului (17), sînt componentele matricii lui Green în problema lui Neumann pentru semispațiul elastic. Comparația dintre calculele ce au dus la determinarea lor, și felul aproape elementar în care se obține funcția lui Green pentru ecuația lui Laplace pentru același domeniu (vezi (2.15)) arată încă odată treapta considerabil mai înaltă de dificultate la care se află studiul ecuațiilor lui Lamé.

Deplasînd punctul de aplicare al forței ; sumînd efectele unor sisteme finite de asemenea forțe; în fine, în cazul unor sarcini continue, integrînd expresiile mai sus obținute (înmulțite cu factori ce carcterizează sarcina) — se poate ajunge la rezolvarea de probleme variate relative la semispațiul solicitat în interiorul său.

Calculele de efectuat nu sînt principial mai dificile decît cele din § 7. Într-adevăr, dat fiind că cea mai complicată funcție ce intervine în problema de față este cea din primul membru din (29), rezultă că soluția pentru cazul unor sarcini continue depinde de funcții de același tip cu funcțiile (7.28), (7.30) — cu deosebirea că integrarea (în sens propriu, sau înlocuită printr-o convoluție) se efectuează pe curbe, suprafețe, sau domenii de măsură spațială ne-nulă, conținute în semispațiul $z>0$. (Vezi de ex. W. Dean et al. [1].)

CAPITOLUL 10

PROBLEMA CONTACTULUI ELASTIC

§ 1. GENERALITĂȚI

Problema contactului corpurilor elastice are o importanță practică deosebită : transmiterea forțelor se realizează cel mai adesea prin contactul unor corpuri solide, în primă aproximație, elastice.

Integrarea ecuațiilor problemei contactului (varianta tridimensională) e complicată, și pretinde totuși o asemenea schematizare a fenomenului real, încît ne putem face o idee precisă numai despre ceea ce se petrece în vecinătatea imediată a zonei de contact. Îmbinată cu utilizarea principiului lui Saint-Venant, ea dă însă răspuns la numeroase probleme importante.

Problema contactului elastic a fost abordată corect pentru prima dată de către H. Hertz [1]. Mare parte din rezultatele sale, inclusiv soluția problemei ștanței cu bază plană eliptică, precum și sugestia de a folosi această soluție în problema contactului fără frecare, au fost obținute concomitent și de către J. Boussinesq (vezi A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], nota finală la §46).

Ideea de bază stă în asimilarea corpurilor în contact, cu niște semispații : aceasta îngăduie cercetarea comportării lor în vecinătatea zonei de contact cu ajutorul rezultatelor cunoscute din studiul problemei lui Neumann pentru semispațiul elastic. În particular, se presupune că corpurile în contact sînt perfect lucii, (sau, ceea ce este același lucru, separate de un strat de lubrefiant) ; nu există deci motive care să împiedice alunecarea lor locală unul pe celălalt în procesul contactului, astfel încît componentele tangențiale ale tensiunii la limită în zona de contact sînt nule. Problema este astfel redusă la o problemă de transmitere a unei sarcini *normale*, însă necunoscute, și repartizate pe un domeniu de asemenea necunoscut.

Cercetările lui Hertz și Boussinesq au fost urmate de studiile lui A. Dinnik [1] și N. Beliaev [3]. Lucrările lui N. Mushelișvili [5], capitolul 6, și L. Galin [4], capitolul 1 — în problema plană a contactului — precum și cele ale lui A. Lurie [2] (vezi și [4], cap. 5), I. Ștaerman [1] și L.Galin [4], capitolul 2 în problema tridimensională, au adus metode și rezultate esențial noi. În aceeași perioadă, I. Sneddon [1], [3] a deschis drumul utilizării metodei transformatei Fourier, cu deosebire în problemele de contact plane și cu simetrie axială.

Ca articole de sinteză în problema contactului, vezi J. Goodier [4], § 9 ; N. Kilcevski [3] (incluzînd și probleme dinamice de contact) ; B.

Korenev [1]; G. Popov şi N. Rostovţev [1]; D. Şerman [6], capitolul 2, şi [8], § 3.2. Vezi încă indicaţiile din § 14.

Ne vom limita aci la problema contactului *tridimensional fără frecare* a două corpuri elastice perfect lucii. Toate raţionamentele vor fi valabile numai dacă, prin natura însăşi a problemei, avem de-a face cu deformaţii şi deplasări suficient de mici. Cazul în care, dimpotrivă, sînt de dorit deformaţii şi deplasări cît mai mari — ca de pildă în diferite procese de prelucrare a metalelor — necesită desigur cu totul alt punct de vedere.

Dintre diferitele posibilităţi: contact într-un punct, contact în lungul unei drepte sau curbe, contact pe o porţiune de arie nenulă a frontierei — ne vom limita la *cazul contactului iniţial într-un punct*, sau *pe o porţiune plană eliptică* (*eventual circulară*) *a frontierei*. (Unele soluţii aproximative vor fi considerate şi pentru alte domenii.)

Vom începe prin a presupune că unul din corpurile în contact este un semispaţiu elastic, iar celălalt este un corp rigid, de formă dată, numit *ştanţă*.

§ 2. PROBLEMA ŞTANŢEI CA PROBLEMĂ MIXTĂ

Să presupunem că unul din corpurile în contact este semispaţiul *elastic* $z>0$, iar celălalt este o ştanţă (*rigidă*). Să presupunem că, înainte de a intra în acţiune forţele care vor face ca ştanţa *să pătrundă* în semispaţiu, aceste două corpuri au fie un singur punct-frontieră comun, fie se află în contact pe o porţiune de arie nenulă a frontierelor lor.

Vom alege punctul comun drept origine O, comună la *două* sisteme de coordonate carteziene: sistemul $Oxyz$ legat de semispaţiu, şi un sistem $OXYZ$ legat de ştanţă. Axele Oz şi OZ sînt dirijate după normala *interioară* la semispaţiu, respectiva la ştanţă, în O. Prin urmare, sensul pozitiv pe OZ coincide cu cel negativ pe Oz. Axele Ox, Oy coincid cu OX, respectiv cu OY. Sistemul $Oxyz$ este drept.

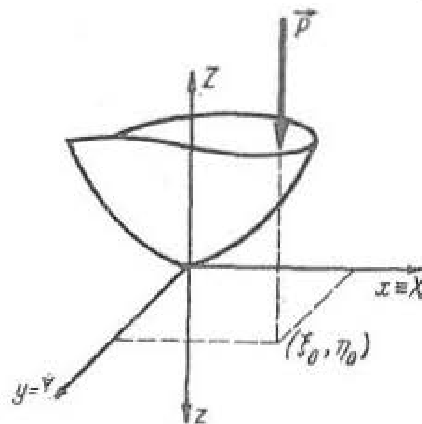


Fig. 10.2.1

Notînd cu $z = \varphi(X, Y)$ ecuaţia frontierei ştanţei, vom presupune că funcţia φ este de clasă cel puţin C^2 pe porţiuni. Problema are sens, numai dacă ştanţa este „exterioară" semispaţiului. Dacă contactul iniţial se face într-un singur punct, acesta trebuie să fie deci un punct *eliptic* al suprafeţei $Z = \varphi(X, Y)$ (vezi de ex. G. Vrănceanu [1], vol. 2, § 15.1; V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 132). Alegînd planul tangent în O la suprafaţa ştanţei drept plan OXY, avem

$$\varphi(0, 0) = \varphi_{.1}|_{X=Y=0} = \varphi_{.2}|_{X=Y=0} = 0. \tag{1}$$

În cazul contactului inițial pe o porțiune a planului frontieră, ecuația frontierei ștanței în această porțiune este pur și simplu $Z = 0$. (Exemplu frecvent : un cilindru cu bază plană.)

a) Condițiile la limită ale problemei

Vom începe prin examinarea cazului contactului într-un *punct* inițial ; cele ce urmează se transferă, cu unele modificări ușor de înțeles, la cazul contactului inițial pe un *domeniu plan*.

Să presupunem că ștanța e supusă acțiunii unui sistem de forțe (reductibil, întrucît ștanța e rigidă, la o forță și un cuplu), care o fac să pătrundă în semispațiu. Echilibrul sistemului [ștanță + semispațiu] se va stabili cînd ștanța va fi pătruns la o anumită adîncime (necunoscută !), cînd punctul inițial de contact va fi fost înlocuit cu un *domeniu de contact* (de asemenea necunoscut !) pe care ștanța vine acum în atingere cu frontiera deformată a semispațiului, și cînd tensiunile (tot necunoscute !) ce iau naștere pe acest domeniu, vor face echilibru forțelor aplicate asupra ștanței.

Să presupunem că deplasările și deformațiile ce apar sînt destul de mici pentru a îngădui utilizarea teoriei liniare. În acest caz, condițiile la limită pot fi formulate pe frontiera *nedeformată* a semispațiului. Prin urmare, deși domeniul de contact *real* are, evident, forma ,,bazei'' ștanței, se numește domeniu de contact acel domeniu $\mathscr{D}$ al planului $z = 0$ care *după* deformație intră în contact, punct cu punct, cu frontiera ștanței. O astfel de înlocuire cere desigur ca deplasările și deformațiile să fie suficient de mici pentru ca și dimensiunile liniare ale lui $\mathscr{D}$ să fie mici în raport cu razele principale de curbură ale suprafeței $Z = \varphi(X, Y)$ în origine.

Mai departe, să presupunem că suprafețele în contact sînt *perfect lucii*, așadar nu pot transmite sarcini tangențiale pe planul frontieră :

$$\sigma_{31}|_{z=0} = \sigma_{32}|_{z=0} = 0. \tag{2}$$

În afara domeniului de contact, avem desigur și

$$\sigma_{33}|_{z=0} = 0, \qquad \boldsymbol{\xi} \equiv (\xi, \eta) \notin \mathscr{D}. \tag{3}$$

Dar în *interiorul* său, tensiunea normală la limită va fi o funcție *necunoscută* :

$$\sigma_{33}|_{z=0} = -\,p\,(\xi, \eta), \qquad \boldsymbol{\xi} \equiv (\xi, \eta) \in \mathscr{D}. \tag{4}$$

Raționamentul clasic constă în a determina funcția $p\,(\xi, \eta)$, ceea ce reduce chestiunea la o problemă deja studiată în § 9.4, întrucît odată cu $p(\xi,\eta)$ sînt cunoscuți în principiu și potențialii lui Hertz de care depinde soluția (9.4.35). (Subliniem aci avantajele considerabile ale metodei lui A. Lurie [2], care conduce la determinarea *directă* a potențialilor lui Hertz.)

Întrucît $p(\xi,\eta)$ nu e cunoscută, condiţia (4) este lipsită de conţinut şi trebuie căutată o altă condiţie în $\mathscr{D}$, independentă (explicit) de tensiunea normală la limită — aşadar obligatoriu o condiţie *în deplasări*.

Problema este deci o problemă mixtă, de tipul celei de *a patra probleme fundamentale:* pe o porţiune $\mathscr{D}$ a frontierei, datele sînt formulate parţial în tensiuni, şi parţial în deplasări — ceea ce corespunde unei anumite alegeri a coeficienţilor a_{ij}, b_{ij}, c_i din (4.2.4). Lucrurile sînt în fapt încă mai complicate, pentru că în cazul ştanţei cu un punct iniţial de contact, însuşi domeniul $\mathscr{D}$ pe care se formulează aceste condiţii la limită este necunoscut.

Să presupunem aşadar că ştanţa pătrunde în semispaţiul elastic sub acţiunea unei forţe $\mathscr{R}$ şi a unui cuplu de moment $\mathscr{M}$. *După* stabilirea echilibrului, ştanţa însăşi se află în echilibru sub acţiunea forţei $\mathscr{R}$, a momentului $\mathscr{M}$, şi a reacţiunilor ce apar pe $\mathscr{D}$. În virtutea condiţiilor (2), aceste reacţiuni sînt paralele cu OZ, şi deci avem $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2 = 0$. Prin urmare, în absenţa frecării, putem considera că ştanţa este supusă acţiunii unei forţe *verticale* P, al cărei suport trece printr-un punct $(\xi_0, \eta_0, 0)$ din planul $z=0$ (diferit în general de O, şi nu necesarmente situat în $\mathscr{D}$). Condiţiile de echilibru a ştanţei se scriu deci :

$$\iint_{\mathscr{D}} p\,(\xi,\,\eta)\,\mathrm{d}D = P, \tag{5}$$

$$\iint_{\mathscr{D}} p\,(\xi,\,\eta)\,\xi\,\mathrm{d}D = P\xi_0\,,\quad \iint_{\mathscr{D}} p\,(\xi,\,\eta)\,\eta\,\mathrm{d}D = P\eta_0\,. \tag{6}$$

De îndată ce sarcina totală P, domeniul de contact $\mathscr{D}$ şi presiunile $p(\xi,\eta)$ sînt cunoscute, coordonatele ξ_0, η_0 pot fi şi ele calculate.

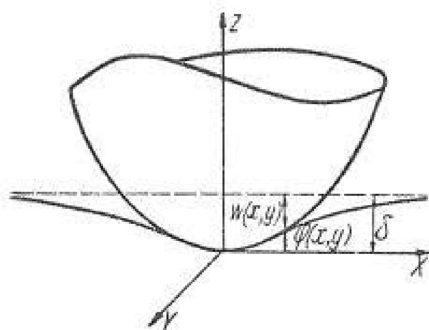


Fig. 10.2.2

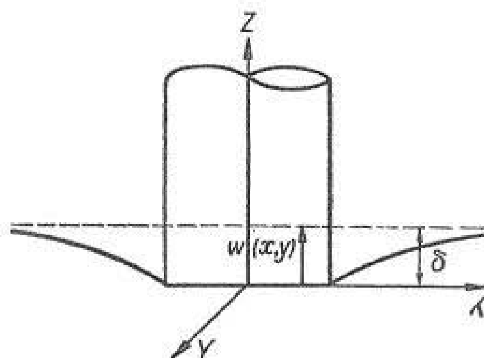


Fig. 10.2.3

În cele ce urmează ne vom limita la cazul unei ştanţe solicitate de un sistem static echivalent cu o forţă verticală unică P, *a cărei linie de acţiune trece prin* O. În acest caz, vom spune că *ştanţa este acţionată* (*solicitată*) *central*. Dacă originea este punct de intersecţie al unor eventuale axe de

simetrie ale domeniului de contact, e firesc ca presiunea $p(\xi, \eta)$ să posede și ea proprietățile de simetrie corespunzătoare. În acest caz, vom avea $\xi_0 = \eta_0 = 0$ și relațiile (6) vor fi identic verificate.

În mișcarea sa sub acțiunea forței P, ștanța coboară în semispațiu pînă la o anumită adîncime δ, care se va numi *penetrația* sa. Să presupunem acum că deplasările tangențiale u_1, u_2 sînt neglijabile în comparație cu $u_3 \equiv w$ pe domeniul de contact. Pentru orice punct din $\mathscr{D}$, este limpede că adîncimea pînă la care coboară punctul inițial de contact va fi egală cu suma cotei $\varphi > 0$ a unui punct oarecare de pe frontiera ștanței, cu deplasarea $w > 0$, căreia îi este supusă frontiera semispațiului în punctul corespunzător. Deducem de aci (vezi fig. 10.2.2) relația

$$w = \delta - \varphi(\xi, \eta) \quad \text{în } \mathscr{D}. \tag{7}$$

Toate considerațiile mecanice de mai sus rămîn valabile pentru o ștanță cu bază plană : în acest caz este suficient să luăm $\varphi(X, Y) \equiv 0$, și (7) se reduce la

$$w = \delta \quad \text{în } \mathscr{D}, \tag{8}$$

ceea ce exprimă pur și simplu faptul că toate punctele domeniului de contact se deplasează vertical cu o *aceeași* cantitate δ (vezi fig. 10.2.3).

Evident, relațiile (7) și (8) *nu au nici un sens* în afara lui $\mathscr{D}$. Se vede că în timp ce domeniul $\mathscr{D}$ este cunoscut în (8), el este în schimb necunoscut în (7). În fine, penetrația δ e necunoscută în ambele relații.

În ce privește forma lui $\mathscr{D}$, trebuie să subliniem că frontiera $\mathscr{L}$ a acestuia *nu se obține* prin simpla secționare a suprafeței $\varphi(X,Y)$ prin planul $Z = \delta$. Într-adevăr, contactul real între ștanță și frontiera semispațiului încetează la un nivel situat *sub* acest plan de secțiune, dat fiind că frontiera semispațiului se deformează, așa cum se vede în figurile 10.2.2 și 10.2.3.

Din condițiile mecanice ale problemei rezultă că în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$, trebuie să avem $p(\xi,\eta) \geqslant 0$, căci numai în acest fel punctele celor două frontiere intră în contact. Dimpotrivă, în afara curbei $\mathscr{L}$ trebuie să avem $p(\xi, \eta) \equiv 0$. Prin urmare, dacă curba $\mathscr{L}$ *nu este* o linie singulară din punct de vedere geometric pe suprafața $Z = \varphi(X,Y)$, atunci trecerea de la presiunile pozitive din $\mathscr{D}$ la cele nule din exterior trebuie să se efectueze continuu, și deci

$$p(\xi, \eta)\big|_{\mathscr{L}} = 0. \tag{9}$$

Această condiție poate fi înțeleasă, imaginîndu-ne procesul de pătrundere a ștanței cu un punct inițial de contact în semispațiu, cu extinderea în timp a domeniului $\mathscr{D}$, și trecerea funcției $p(\xi, \eta)$ într-un punct dat de la valori nule, la valori pozitive tot mai mari, pe măsură ce sarcina crește.

Dimpotrivă, dacă $\mathscr{L}$ este o linie singulară pe suprafața ștanței (de ex. : pe o ștanță cilindrică cu baza plană), ne putem aștepta la apariția de discontinuități ale tensiunii normale la traversarea acestei curbe. Vom reveni asupra acestor chestiuni în § 9.

b) *Ecuaţia integrală a problemei ştanţei*

Putem trece acum la formularea problemei relative la $p(\xi,\eta)$. Întrucît semispaţiul este solicitat numai de sarcini normale, starea sa elastică este caracterizată de formulele (9.4.35). De aci deducem (folosind notaţia w pentru u_3; vezi şi pag. 589):

$$w = z\Omega_{,3} - 2(1-\nu)\Omega, \tag{10}$$

unde potenţialul de simplu strat Ω e dat de (9.4.28):

$$\Omega(x, y, z) = -(1/4\pi\mu)\iint\limits_{\mathscr{D}}\left[p(\xi,\eta)/\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}\right]\mathrm{d}D. \tag{11}$$

Introducînd această expresie în (10) şi luînd $z = 0$, căpătăm deplasarea w pe planul-frontieră. Introducînd mai departe această valoare în condiţia (7), obţinem relaţia, *valabilă numai în* $\mathscr{D}$:

$$[(1-\nu)/2\pi\mu]\iint\limits_{\mathscr{D}}\left[p(\xi,\eta)/\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right]\mathrm{d}D = \delta - \varphi(x, y), \tag{12}$$

unde am revenit la notaţia $(x,y,0)$ pentru punctul de observaţie de pe planul-frontieră, rezervînd notaţia $(\xi,\eta,0)$ pentru punctul curent de integrare pe acest plan.

Aceasta este o *ecuaţie integrală de prima speţă* pentru $p(\xi,\eta)$. Rezolvarea problemei ştanţei depinde de posibilitatea de a rezolva această ecuaţie, însoţită de ecuaţia de echilibru (5) şi — dacă este cazul — de condiţia de continuitate (9). Dacă vom determina din (12) funcţia $p(\xi,\eta)$ ca funcţie de δ şi de anumiţi parametri ce caracterizează domeniul (necunoscut) $\mathscr{D}$, condiţia (9) va furniza aceşti din urmă parametri ca funcţii de δ — şi atunci va mai rămîne să ne servim de (5) pentru a găsi penetraţia, şi deci şi forma domeniului şi presiunea.

Pentru $\varphi \equiv 0$, $\mathscr{D}$ este cunoscut, şi acelaşi raţionament se poate repeta, fără a mai avea a ne servi de (9) — care de altfel aci nu mai are sens.

OBSERVAŢIA 1. Pentru cazul unei sarcini excentrice, problema se complică datorită apariţiei unui cuplu care tinde să facă ştanţa *să se rotească*. În ultimă instanţă, aceasta revine la a introduce în (7) un termen liniar în ξ şi η: cei doi coeficienţi suplimentari ce apar astfel se determină ca şi δ, făcînd însă uz şi de relaţiile (6), care nu mai sînt acum identic verificate. Pentru cazul particular al ştanţei cu bază plană, problema a fost abordată iniţial de V. Abramov [1]. În cazul general, termenii din (7) pot fi luaţi în considerare numai făcînd uz de metoda lui Lurie, deja indicată.

Studiul ecuaţiei (12) este o chestiune de o extremă complexitate. Uneori, soluţia acestei ecuaţii este cunoscută dacă cunoaştem soluţia problemei lui Neumann pentru semispaţiul supus unei sarcini normale

repartizate pentru anumite domenii de solicitare şi anumite aspecte ale funcţiei $p(\xi,\eta)$. (Vezi exemplul de la finele § 9.5, pag. 602 : *dacă* baza ştanţei are forma ce rezultă din (9.5.16), putem conchide că sub ştanţă avem $p = \text{const.}$) Un astfel de procedeu de tip invers reuşeşte însă numai rareori.

Problema se simplifică considerabil în variantele sale uni-dimensionale, la care conduce în fond problema contactului plan (cilindri infiniţi în contact în lungul unor generatoare), sau a contactului cu simetrie axială.

Integrala (12) este valoarea potenţialului newtonian de simplu strat, de densitate proporţională cu $p(\xi,\eta)$, repartizată pe domeniul (necunoscut) $\mathscr{D}$. *Valoarea* acestui potenţial în orice punct interior lui $\mathscr{D}$ este dată în (12) prin intermediul funcţiei cunoscute $\varphi(x,y)$ şi al unor constante necunoscute.

Acest fapt arată că pentru studiul *experimental* al problemei, sînt utile orice analogii (în primul rînd, electrice) care conduc la determinarea *densităţii* de potenţial, atunci cînd însuşi potenţialul e dat în domeniul în care densitatea sa e neidentic nulă. (Pentru detalii în acest sens, vezi de ex. L. Niţeţkii [1].)

În cele ce urmează, vom studia ecuaţia (12) tot pe linia unei metode inverse, totuşi suficient de generale şi de sistematice, şi permiţînd abordarea problemei clasice a contactului. Pentru simplitatea scrierii, vom folosi frecvent notaţiile

$$p(\boldsymbol{\xi}) \equiv p(\xi,\eta), \quad v(\boldsymbol{x}) \equiv V(x, y, 0) = \iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{p(\xi, \eta)\,\mathrm{d}D}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}. \qquad (13)$$

Întrucît în (12) constantele μ, ν nu intervin separat, este firească considerarea unei noi constante a materialului[1])

$$\theta = (1-\nu)/2\pi\mu. \qquad (14)$$

Ecuaţia problemei ştanţei solicitate central se va scrie deci

$$\theta \iint\limits_{\mathscr{D}} \left[p(\xi,\eta)/\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right] \mathrm{d}D = \delta - \varphi(x, y) \quad \text{în } \mathscr{D}, \qquad (15)$$

de integrat cu condiţia (5):

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} p(\xi, \eta)\,\mathrm{d}D = P. \qquad (16)$$

---

[1]) A nu se confunda cu dilatarea de volum θ, sau cu unghiul θ.

În cazul unei ştanţe cu bază plană care pătrunde în semispaţiu fără a se roti, ecuaţia (15) se reduce la

$$\theta \iint_{\mathscr{D}} \left[p(\xi, \eta) / \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right] \mathrm{d}D = \delta \quad \text{în } \mathscr{D}, \tag{17}$$

de integrat cu aceeaşi condiţie de echilibru (16).

Observaţia 2. Înaintea studiului exact al problemei contactului, chestiunea a fost abordată cu ajutorul *ipotezei lui Winkler şi Zimmermann*, constînd în presupunerea că există proporţionalitate între sarcina pe frontieră, şi deplasarea normală cauzată de ea. În genere, această ipoteză este foarte departe de a descrie starea reală de lucruri (vezi de ex. finele paragrafului § 9.5). Totuşi, există cazuri particulare în care teoria exactă o confirmă (vezi L. Galin [1]).

c) Indicaţii asupra potenţialilor generalizaţi

Din punctul de vedere al unei teorii generale, problema ştanţei poate fi subordonată *teoriei potenţialilor generalizaţi*. După M. Riesz [1], se numeşte *potenţial generalizat de ordin* α în $\mathscr{E}_m$, integrala

$$V^{\pi}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathscr{E}_m} \mathrm{d}\,\pi(\boldsymbol{\xi}) / [R(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})]^{m-\alpha}, \tag{18}$$

unde $0 < \alpha \leqslant 2$, şi unde $\mathrm{d}\pi(\boldsymbol{\xi})$ este produsul unei anumite funcţii de punct în $\mathscr{E}_m$, cu elementul de volum din $\mathscr{E}_m$. Pentru $m = 3$, $\alpha = 2$, şi pentru integrala din (18) luată pe o *suprafaţă* din $\mathscr{E}_3$, se obţine drept caz-limită potenţialul newtonian de simplu strat.

Întrucît în ecuaţiile (15) sau (17) avem de-a face cu valori la limită ale unor astfel de potenţiali pentru domenii $\mathscr{D}$ din planul $z = 0$, aceasta revine la a considera potenţiali generalizaţi cu $m = 2$, $\alpha = 1$. În acest caz, vom avea

$$\mathrm{d}\,\pi(\boldsymbol{\xi}) \equiv \mathrm{d}\,\pi(\xi, \eta) = p(\xi, \eta)\, \mathrm{d}D. \tag{19}$$

De altfel, integrala (18) are sens chiar dacă $\mathrm{d}(\boldsymbol{\xi})$ nu este introdusă sub forma (19), aşadar chiar dacă nu există o *densitate* a presiunilor $p(\boldsymbol{\xi})$; pentru aceasta, este suficient ca $\mathrm{d}\pi$ să fie definită ca o măsură Radon pozitivă, cu suportul conţinut în $\mathscr{D}$.

Condiţia (16) se scrie — abstracţie făcînd de o constantă multiplicativă P —

$$\pi(\mathscr{D}) = 1, \tag{20}$$

unde $\pi(\mathscr{D})$ este *masa* totală a repartiţiei de presiuni $\mathrm{d}\pi(\boldsymbol{\xi})$.

A rezolva ecuaţiile (15) sau (17), aceasta înseamnă a determina repartiţia de presiuni $\mathrm{d}\pi$ de masă totală unitară, pentru care potenţialul generalizat de ordin 1 ia valoarea $\delta - \varphi$, respectiv δ, în $\mathscr{D}$.

Pentru acest din urmă caz (ţinînd seama şi de (20)) se cunosc rezultate suficient de simple şi de precise. A rezolva ecuaţia (17) cu condiţia (16) (sau — ceea ce revine la acelaşi lucru — (20)) înseamnă a găsi *repartiţia de echilibru* pe $\mathscr{D}$, adică a determina o repartiţie

de presiuni de masă totală unitară şi astfel încît potenţialul generat de ea să fie constant în $\mathscr{D}$. O. Frostmann [1] a demonstrat că există întotdeauna o soluţie a acestei probleme, abstracţie făcînd de o mulţime de capacitate²) nulă. La această concluzie se ajunge demonstrîndu-se că există o măsură astfel încît minimul *integralei energiei*

$$< \pi, \pi > = \iint_{\mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_m} d\pi(x)\, d\pi(\xi) / [R(x;\xi)]^{m-\alpha}, \tag{21}$$

pentru $d\pi$ în clasa măsurilor de masă totală unitară şi avînd suportul conţinut în $\mathscr{D}$, să fie atins. Potenţialul de echilibru pe $\mathscr{D}$ este tocmai potenţialul ce corespunde repartiţiei de energie minimale.

Pentru a se demonstra *unicitatea* soluţiei, se face uz de teorema lui M. Riesz [1], care afirmă că pentru orice potenţial generalizat de ordin α, avem

$$< \pi_1 - \pi_2, \pi_1 - \pi_2 > \; > 0 \tag{22}$$

pentru $\pi_1 \not\equiv \pi_2$, unde π_1, π_2 sînt măsuri pozitive. De aci urmează că măsura care realizează minimul lui (21) este unic determinată, precum şi că ea este *pozitivă*.

Dacă frontiera $\mathscr{L}$ a domeniului $\mathscr{D}$ satisface condiţia lui Poincaré³), atunci potenţialul de echilibru este constant în *toate* punctele din $\mathscr{D} + \mathscr{L}$.

§ 3. POTENŢIALUL DISCULUI ELIPTIC ÎNTR-UN PUNCT INTERIOR. TEOREMA LUI GALIN ŞI ŞTAERMAN

Să presupunem pentru început că domeniul $\mathscr{D}$ este de formă *eliptică*, aşadar deplin caracterizat de cunoaşterea semiaxelor a, b ale frontierei sale $\mathscr{L}$:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \tag{1}$$

Întrucît ecuaţia (2.15) este valabilă în $\mathscr{D}$, ne va interesa expresia potenţialului (2.11) pentru puncte interioare elipsei (1) pe planul $z = 0$. Vom nota

$$v(x) = V(x, y, 0) = -4\pi\mu\, \Omega(x, y, 0) = \iint_{\mathscr{D}} \frac{p(\xi, \eta)\, dD}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad x \in \mathscr{D}. \tag{2}$$

---

²) *Capacitatea* mulţimii compacte $\mathfrak{K}$ este numărul

$$\mathscr{C}(\mathfrak{K}) = \sup \{\pi(\mathfrak{K});\ V^{\pi} \leqslant 1\},$$

adică cea mai mare dintre masele de repartiţii de presiune, definite pe $\mathfrak{K}$, şi astfel încît $V^{\pi}(x)$, $x \in \mathfrak{K}$ să nu depăşească unitatea (sau, abstracţie făcînd de o constantă multiplicativă, să fie mărginită). Dacă o mulţime este de capacitate nulă, aceasta înseamnă că nu este posibil să-i atribuim o repartiţie de presiuni astfel încît potenţialul generalizat corespunzător să rămînă mărginit.

³) Se spune că un domeniu $\mathscr{D}$ satisface condiţia lui Poincaré, dacă în fiecare din punctele sale frontieră se poate construi un con în întregime conţinut în domeniu într-o anumită vecinătate a punctului considerat.

Este firesc să căutăm $p(\xi, \eta)$ sub o formă care să reflecte oarecum proprietăţile geometrice ale lui $\mathscr{D}$. Anume, vom lua

$$p(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{m} a_j (1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2)^{j-1/2}. \tag{3}$$

Calculul integralei (2) pentru expresia (3) a densităţii a fost realizat de către L. Galin [2] (vezi şi [4], § 2.8), şi I. Ştaerman [1], § 4.1. Demonstraţii mai recente sînt date de N. Rostovţev [6] şi I. Zamfirescu [1]. Vom expune aci raţionamentul lui Ştaerman, direct şi elementar.

Să considerăm funcţiile

$$v_j(\boldsymbol{x}) = \iint_{\mathscr{D}} \frac{(1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2)^{j-1/2}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \, \mathrm{d}D. \tag{4}$$

Cu aceasta, (2) se va scrie sub forma sumei

$$v(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{m} a_j v_j(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

Dacă vom trece în (4) la coordonatele polare definite de

$$\begin{aligned} \xi - x &= R \cos \chi, \\ \eta - y &= R \sin \chi, \\ \mathrm{d}D \equiv \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta &= R \,\mathrm{d}R\, \mathrm{d}\chi, \end{aligned} \tag{6}$$

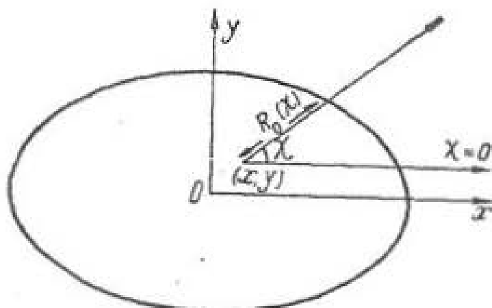


Fig. 10.3.1

radicalul de la numitorul din (4) dispare şi obţinem

$$v_j(\boldsymbol{x}) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\chi \int_0^{R_0(\chi)} [1 - (x + R\cos\chi)^2/a^2 - (y + R\sin\chi)^2/b^2]^{j-1/2}\, \mathrm{d}R, \tag{7}$$

unde $R_0(\chi)$ este distanţa de la punctul (x, y) la punctul (ξ_0, η_0) în care raza polară de unghi χ taie elipsa (1). Întrucît acest punct e situat pe elipsă, avem

$$(x + R_0 \cos \chi)^2/a^2 + (y + R_0 \sin \chi)^2/b^2 = 1. \tag{8}$$

Introducînd notaţiile

$$A(\chi) = \frac{\cos^2\chi}{a^2} + \frac{\sin^2\chi}{b^2}, \quad B(\chi) = \frac{x\cos\chi}{a^2} + \frac{y\sin\chi}{b^2}, \tag{9}$$
$$C = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

vom transcrie (8) sub forma

$$A R_0^2 + 2\,B\,R_0 - C = 0, \tag{10}$$

unde avem întotdeauna

$$A(\chi) > 0, \quad C > 0. \tag{11}$$

(Prima relaţie este evidentă; cea de a doua rezultă din faptul că punctul (x, y) este *interior* elipsei.) Soluţia ecuaţiei (10) este

$$R_0(\chi) = [-B + \sqrt{B^2 + AC}]/A, \tag{12}$$

unde $B^2 + AC > B^2 \geqslant 0$; am ales semnul pozitiv pentru ca să avem $R_0(\chi) > 0$.

Ţinînd seama de notaţiile (9), obţinem acum din (7)

$$v_j(x) = \int_0^{2\pi} I_j(\chi)\,\mathrm{d}\chi, \tag{13}$$

unde

$$I_j(\chi) = \int_0^{R_0(\chi)} A^{1/2-j}\,(AC - 2\,AB\,R - A^2R^2)^{\,j-1/2}\,\mathrm{d}R, \tag{14}$$

sau încă

$$I_j(\chi) = \int_0^{R_0(\chi)} \left(\frac{B^2}{A} + C\right)^{j-1/2} \left[1 - \left(\frac{B + A\,R}{\sqrt{B^2 + AC}}\right)^2\right]^{j-1/2} \mathrm{d}R. \tag{15}$$

Pentru a putea face aci schimbarea evidentă de variabilă

$$\cos\theta = [B(\chi) + R\,A(\chi)]\,/\sqrt{B^2(\chi) + CA(\chi)}, \tag{16}$$

unde χ are rol de parametru, şi unde limităm variaţia lui θ între 0 şi π (pentru ca corespondenţa stabilită între θ şi R să fie biunivocă), trebuie să ne convingem că mărimea din (16) are modulul cel mult egal cu 1. Amintind că avem $0 \leqslant R \leqslant R_0(\chi)$ şi $A > 0$, deducem că $B \leqslant B + AR \leqslant B + AR_0$, de unde

$$B/\sqrt{B^2 + AC} \leqslant (B + AR)\,/\sqrt{B^2 + AC} \leqslant (B + AR_0)/\sqrt{B^2 + AC}. \tag{17}$$

Or, din (12) rezultă că al treilea raport din (17) este egal cu 1; întrucît avem $AC > 0$, urmează că primul raport din (17) este *în modul* cel mult egal cu 1. Schimbarea de variabilă (16) este deci justificată.

Vom nota cu $\theta(\chi)$ acea valoare a lui θ care corespunde valorii $R=0$, astfel că

$$\cos\,\theta(\chi) = B(\chi)\,/\sqrt{B^2(\chi) + CA(\chi)}. \tag{18}$$

Luînd $R = R_0(\chi)$, din (12) şi (16) urmează $\cos\theta[R_0(\chi), \chi] = 1$, şi deci

$$\theta[R_0(\chi),\ \chi] = 0. \tag{19}$$

Relaţiile (18), (19) dau limitele de integrare în raport cu θ.

Prin diferenţierea relaţiei (16), deducem şi

$$dR = -(1/\sqrt{A})\sqrt{B^2/A + C}\,\sin\theta\,d\theta, \tag{20}$$

astfel că după calcule elementare, (15) devine

$$I_j(\chi) = \int_0^{\theta(\chi)} (1/\sqrt{A})\,(B^2/A + C)^j \sin^{2j}\theta\,d\theta. \tag{21}$$

Pasul imediat următor constă în a efectua în (21) o astfel de schimbare de variabilă, încît să obţinem o integrală cu limite fixe. Aceasta se realizează luînd

$$\chi = \pi + \psi. \tag{22}$$

Introducînd (22) în (9), conchidem că

$$A(\chi) = A(\pi + \psi) = A(\psi), \quad B(\chi) = B(\pi + \psi) = -B(\psi). \tag{23}$$

(Amintim că C este independent de χ.) Ţinînd seama de (23) în (18) căpătăm desigur $\cos\theta(\chi) = \cos\theta(\pi + \psi) = -\cos\theta(\psi)$, de unde (întrucît $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) conchidem

$$\theta(\chi) = \pi - \theta(\psi). \tag{24}$$

Să scriem acum integrala (13) sub forma

$$v_j(\boldsymbol{x}) = v_j^1(\boldsymbol{x}) + v_j^2(\boldsymbol{x}), \tag{25}$$

unde v_j^1 este valoarea integralei calculate între limitele 0 şi π, iar v_j^2 este aceeaşi integrală, calculată însă între π şi 2π. Ţinînd seama de (21), obţinem

$$v_j^2(\boldsymbol{x}) = \int_\pi^{2\pi} I_j(\chi)\,d\chi = \int_\pi^{2\pi} d\chi \int_0^{\theta(\chi)} (1/\sqrt{A})\,(B^2/A + C)^j \sin^{2j}\theta\,d\theta. \tag{26}$$

Efectuînd schimbarea (22) şi folosind (23) şi (24), căpătăm de aci

$$v_j^2(\boldsymbol{x}) = \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\pi - \theta(\psi)} [1/\sqrt{A(\psi)}]\,[B^2(\psi)/A(\psi) + C]^j \sin^{2j}\theta\,d\theta, \tag{27}$$

expresie identică cu $v_j^1(\boldsymbol{x})$, abstracţie făcînd numai de limitele de integrare în raport cu θ. Rămîne deci de efectuat o ultimă schimbare de variabilă, care să lase intact integrandul, şi să modifice convenabil limitele de integrare. Luînd

$$\theta = \pi - \theta', \tag{28}$$

limitele 0 şi $\pi - \theta(\psi)$ sînt înlocuite prin limitele π şi $\theta(\psi)$ în raport θ'. Avem desigur $\sin\theta = \sin\theta'$ şi $d\theta = -d\theta'$, astfel că (27) devine

$$v_j^2(\boldsymbol{x}) = -\int_0^{\pi} d\psi \int_\pi^{\theta(\psi)} [1/\sqrt{A(\psi)}][B^2(\psi)/A(\psi) + C]^j \sin^{2j}\theta'\,d\theta'. \tag{29}$$

Adunînd acum integrala $v_j^1(x)$ sub forma ce rezultă din (13) şi (21) (aşadar forma (26), dar cu limitele 0 şi π în integrala în raport cu χ), cu integrala $v_j^2(x)$ din (29), şi notînd variabilele de integrare în ambele integrale cu aceleaşi litere, fie ele din nou χ şi θ, căpătăm

$$v_j(x) = \int_0^\pi d\chi \int_0^\pi [1/\sqrt{A(\chi)}]\,[B^2(\chi)/A(\chi) + C]^j \sin^{2j}\theta\, d\theta, \tag{30}$$

unde limitele sînt *fixe*, şi integrările pot fi efectuate separat.

Să considerăm acum integralele

$$b_j(x) = \int_0^\pi [1/\sqrt{A(\chi)}]\,[B^2(\chi)/A(\chi) + C]^j\, d\chi, \tag{31}$$

$$c_j = \int_0^\pi \sin^{2j}\theta\, d\theta. \tag{32}$$

Introducînd expresiile (9) în (31), căpătăm după calcule elementare

$$b_j(x) = ab \int_0^\pi \left[1 - \frac{(x \sin\chi - y\cos\chi)^2}{a^2 \sin^2\chi + b^2\cos^2\chi}\right]^j \frac{d\chi}{\sqrt{a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi}}. \tag{33}$$

Integrala c_j se calculează prin recurenţă:

$$c_j = -\int_0^\pi \sin^{2j-1}\theta\, d(\cos\theta) = (2j-1)\int_0^\pi \sin^{2(j-1)}\theta \cos^2\theta\, d\theta,$$

de unde urmează $(2j)\, c_j = (2j-1)c_{j-1}$. Dar întrucît din (32) avem evident $c_0 = \pi$, căpătăm în definitiv

$$c_j = [(2j-1)!!/(2j)!!]\,\pi, \quad c_0 = \pi. \tag{34}$$

Introducînd acum (33) şi (34) în (30), iar expresia astfel obţinută, în suma (5), rezultă formula finală

$$v(x) \equiv V(x, y, 0) = \pi ab \int_0^\pi \left\{a_0 + \sum_{j=1}^m \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} a_j \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 - \frac{(x\sin\chi - y\cos\chi)^2}{a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi}\right]^j\right\} \frac{d\chi}{\sqrt{a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi}}. \tag{35}$$

Aceasta este deci valoarea potenţialului newtonian de simplu strat de densitate (3) într-un punct *interior* al discului eliptic de frontieră (1). Semnificaţia acestui rezultat stă în faptul că *expresia* (35) *este un polinom de grad m în raport cu x^2 şi y^2.*

§ 4. PROBLEMA ŞTANŢEI CU BAZĂ PLANĂ ELIPTICĂ, ACŢIONATĂ CENTRAL

a) *Soluţia problemei*

Să presupunem că ştanţa are *baza plană*, mărginită de elipsa (3.1), şi o astfel de configuraţie a suprafeţei, încît domeniul de contact $\mathscr{D}$ coincide cu această bază. (Exemplu : un cilindru de ax Oz şi de curbă directoare (3.1).) În acest caz, $\mathscr{D}$ *este cunoscut*, şi coincide cu baza ştanţei.

Alegînd originea în centrul lui $\mathscr{D}$, şi presupunînd că linia de acţiune a sarcinii P trece prin origine, avem de rezolvat ecuaţia (2.17) cu condiţia (2.16), aşadar

$$\delta/\theta = \iint_{\mathscr{D}} [p(\xi,\eta)/\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}]\,\mathrm{d}D \quad \text{în } \mathscr{D}, \tag{1}$$

$$P = \iint_{\mathscr{D}} p(\xi,\eta)\,\mathrm{d}D. \tag{2}$$

Întrucît $\mathscr{D}$ este cunoscut, dacă vom determina din (1) presiunea $p(\xi,\eta)$ ca funcţie de parametrul (necunoscut) δ, relaţia (2) va permite şi aflarea acestuia din urmă.

Membrul al doilea din (1) este funcţia $V(x,y,0)$ din (3.2), astfel că (1) devine

$$V(x,y,0) = \delta/\theta \qquad \text{în } \mathscr{D}. \tag{3}$$

Întrucît $\mathscr{D}$ este o elipsă, putem folosi rezultatele din § 3. Pentru ca potenţialul (3.35) să se reducă la o constantă, este deci necesar şi suficient ca densitatea să aibă forma (3.3), cu toţi $a_j = 0$, cu excepţia lui a_0. Prin urmare, presiunea are forma

$$p(\xi,\eta) = a_0 : \sqrt{1-\xi^2/a^2-\eta^2/b^2}. \tag{4}$$

Făcînd uz de formula (3.35), putem transcrie acum (3) sub forma

$$\pi\, ab a_0 \int_0^{\pi} \mathrm{d}\chi/\sqrt{a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi} = \delta/\theta, \tag{5}$$

de unde se obţine valoarea lui a_0 sub forma

$$a_0 = (1/DI)\,(\delta/\theta), \tag{6}$$

unde D este aria lui $\mathscr{D}$, iar I este integrala din (5).

Să presupunem axele alese în aşa fel încît $b \leqslant a$, şi să considerăm aria D şi excentricitatea k a elipsei de contact :

$$D = \pi ab, \quad k = \sqrt{1-b^2/a^2}. \tag{7}$$

Pentru integrala din (5) avem pe rînd

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\chi/\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\chi} = (1/a)\int_0^{\pi} \mathrm{d}\chi/\sqrt{1 - k^2\cos^2\chi}. \tag{8}$$

Efectuînd aci schimbarea de variabilă

$$\chi = \frac{1}{2}\pi - \psi, \quad \mathrm{d}\chi = -\,\mathrm{d}\psi, \tag{9}$$

şi remarcînd simetria integrandului, obţinem

$$I = (2/a)\,\mathrm{K}(k), \tag{10}$$

unde

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\psi/\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} \tag{11}$$

este *integrala eliptică completă de prima speţă*, de modul k.

Pentru detalii asupra integralelor eliptice complete, cu aplicaţie specială la problema de contact, vezi de ex. I. Ştaerman [1], anexa 1. Integrala $\mathrm{K}(k)$ este tabulată (vezi de ex. E. Jahnke şi F. Emde [1], partea a 2-a, cap. 5, B; sau H. Dwight [1], pct. 1040). Aceste tabele dau valorile $\mathrm{K}(k)$ în funcţie de $\alpha = \arcsin k$. Tabele detailate pentru integralele eliptice complete şi necomplete de toate trei speţele sînt datorate lui V. Beliakov et al. [1].

Pentru o elipsă de contact dată, mărimea I din (6) este deci cunoscută. Introducînd (10) în (6), şi ţinînd seama de (2.14) şi (7), obţinem

$$a_0 = [\mu/(1-\nu)]\,[\delta/b\,\mathrm{K}(k)]. \tag{12}$$

Să introducem acum expresia (4) în condiţia de echilibru (2):

$$P = a_0 \iint_{\mathscr{D}} \mathrm{d}D/\sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}. \tag{13}$$

Pentru a calcula integrala din (13), fie ea J', vom trece la coordonate polare cu polul în origine:

$$\xi = R\cos\chi, \quad \eta = R\sin\chi, \quad \mathrm{d}D = R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\chi. \tag{14}$$

Notînd şi aci cu $R_0(\chi)$ distanţa la punctele de pe frontieră, căpătăm

$$J' = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\chi \int_0^{R_0(\chi)} R\,\mathrm{d}R/\sqrt{1 - R^2[(\cos^2\chi)/a^2 + (\sin^2\chi)/b^2]}, \tag{15}$$

unde coeficientul lui R^2 este chiar $A(\chi)$ din (3.9). Prin urmare, pe frontiera elipsei avem $R_0^2(\chi)A(\chi) = 1$, astfel că (15) devine

$$J' = -\int_0^{2\pi} [1/A(\chi)]\,\mathrm{d}\chi \int_0^{1/\sqrt{A(\chi)}} \mathrm{d}\left[\sqrt{1 - A(\chi)R^2}\right],$$

de unde

$$J' = -\int_0^{2\pi} [1/A(\chi)] \sqrt{[1 - A(\chi)R^2]}\Big|_0^{1/\sqrt{A(\chi)}} \mathrm{d}\chi = \int_0^{2\pi} [1/A(\chi)]\,\mathrm{d}\chi. \tag{16}$$

Ținînd seama aci de (3.9) și de simetria integrandului, avem

$$J' = 4\,a^2 b^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\chi/(a^2 \sin^2\chi + b^2 \cos^2\chi), \tag{17}$$

și încă, după schimbarea de variabilă tg $\chi = (b/a)\,t$, obținem

$$J' = 4\,a^2 b^2 \int_0^{\pi/2} (\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\chi)/(a^2\,\mathrm{tg}^2\,\chi + b^2) = 4\,ab \int_0^{\infty} \mathrm{d}t/(1 + t^2) =$$

$$= 4\,ab\,\mathrm{arc\,tg}\,t\Big|_0^{\infty} = 2\,\pi\,ab, \tag{18}$$

astfel că (13) se reduce la $P = 2\pi ab\,a_0$, de unde

$$a_0 = \frac{1}{2}\,(\mathrm{P}/\mathrm{D}). \tag{19}$$

Coeficientul a_0 rezultă deci sub o formă elementară, și chiar independentă de δ. Comparînd expresiile (12) și (19) și amintind notațiile (2.14) și (7), urmează

$$\delta = \theta\,P\,[\mathrm{K}(k)/a], \tag{20}$$

unde se separă vizibil un factor funcție de material, unul funcție de sarcină, și unul pur geometric. Introducînd încă (19) în (4), căpătăm

$$p(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(P/\mathrm{D})\big[1/\sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}\big], \tag{21}$$

și problema este complet rezolvată.

b) Despre repartiția presiunilor sub ștanță

Notînd *presiunea medie* sub ștanță cu

$$p_m = P/\mathrm{D}, \tag{22}$$

se vede că presiunea $p(\xi,\eta)$ ia valoarea *minimă* în centrul lui $\mathscr{D}$:

$$p_{\min} = p\,(0{,}0) = 0{,}50\;p_m. \tag{23}$$

Dimpotrivă, ea tinde la infinit în vecinătatea frontierei $\mathscr{L}$ a lui $\mathscr{D}$, frontieră care constituie o linie singulară pe suprafața ștanței. Unei repartiții uniforme a deplasărilor îi corespunde așadar o repartiție extrem de neuniformă a presiunilor. (Vezi și § 2, pag. 625.)

Rezultate sugestive în legătură cu comportarea presiunii în vecinătatea liniei $\mathscr{L}$ au fost date (atît în cazul problemei ştanţei plane cît şi în cel al ştanţei cu baza plană circulară) de către I. Ştaerman [1], §§ 2.3 şi 3.3.

În fapt, întrucît presiunile cresc considerabil în vecinătatea lui $\mathscr{L}$, materialul trece aci în stare de deformare plastică, sau se fisurează. Aceasta duce la o re-distribuire a tensiunilor de natură să evite apariţia de tensiuni infinite, lipsite de sens.

§ 5. PROBLEMA ŞTANŢEI PARABOLOIDALE ACŢIONATE CENTRAL

Vom numi pe scurt *ştanţă paraboloidală*, ştanţa a cărei frontieră este un paraboloid eliptic, de ecuaţie

$$Z = \frac{1}{2}\,(X^2/\rho' + Y^2/\rho''), \tag{1}$$

unde ρ', ρ'' sînt razele de curbură principale în origine. Evident, axele OXY sînt tangente la liniile de curbură de pe suprafaţa ştanţei, şi trebuie să avem $\rho', \rho'' \geqslant 0$. Pentru a fixa ideile, vom alege axele astfel încît $\rho'' \leqslant \rho'$.

Ecuaţia integrală (2.15) ia acum forma

$$\delta - \frac{1}{2}\,x^2/\rho' - \frac{1}{2}\,y^2/\rho'' = \theta \iint\limits_{\mathscr{D}} \left[p\,(\xi, \eta)/\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right] \mathrm{d}D, \tag{2}$$

iar condiţia de echilibru (2.16) rămîne sub aceeaşi formă :

$$P = \iint\limits_{\mathscr{D}} p\,(\xi, \eta)\,\mathrm{d}D. \tag{3}$$

Din aceste două ecuaţii — unde ρ', ρ'', θ şi P sînt cunoscute — trebuie să se determine domeniul de contact $\mathscr{D}$, presiunea $p(\xi, \eta)$, şi penetraţia δ.

a) Potenţialul discului eliptic

Să presupunem că $\mathscr{D}$ este tot o *elipsă*, de axe Ox, Oy, şi avînd drept lungimi ale semiaxelor, valorile (necunoscute) a şi b. Aceasta revine la a admite că punctele frontieră, distribuite *după* o deformaţie destul de mică (şi neînsoţită de o rotaţie) pe o suprafaţă a cărei proiecţie plană e o elipsă, au fost situate *înainte* de deformaţie tot pe o elipsă. Mai departe, este firesc să presupunem că $b \leqslant a$: amprenta lăsată de ştanţă pe semi-spaţiu va avea dimensiuni liniare mai mari după acea direcţie, în lungul căreia raza de curbură este mai mare.

Presupunerile făcute vor fi desigur justificate numai dacă soluţia, satisfăcînd tuturor condiţiilor problemei, va putea fi construită pe această cale.

Întrucît $\mathscr{D}$ este eliptic, iar sarcina este centrală, vom admite că $p(\xi,\eta)$ este de forma (3.3). Membrul al doilea din (2) conţine deci funcţia $V(x,y,0)$ din § 3, şi ecuaţia (2) devine

$$V(x, y, 0) = (1/\theta)\left(\delta - \frac{1}{2}\,x^2/\rho' - \frac{1}{2}\,y^2/\rho''\right). \tag{4}$$

Comparînd membrul al doilea al acestei expresii cu (3.35), constatăm mai întîi că trebuie să luăm $a_j = 0$ pentru $j \geqslant 2$. Mai departe, dacă $a_0 \neq 0$, în soluţie ar apare termeni ce tind la infinit pe $\mathscr{L}$ — ceea ce nu este cu putinţă, întrucît frontiera nu e o linie singulară (vezi şi (2.9)). Prin urmare, avem $a_0 = 0$, şi presiunea se caută sub forma

$$p(\xi, \eta) = a_1\sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}. \tag{5}$$

Determinarea ei efectivă depinde, ca şi în § 4, de găsirea constantei a_1 — dar şi de cea a constantelor a, b. Aceasta face ca determinarea lui a_1 să nu mai fie independentă de cea a penetraţiei δ.

Formula (3.35) se reduce acum la

$$V(x, y, 0) = \frac{1}{2}\,\pi ab a_1\int_0^\pi\left[1 - \frac{(x\sin\chi - y\cos\chi)^2}{a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi}\right]\frac{d\chi}{\sqrt{a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi}}, \tag{6}$$

de unde, efectuînd calculele:

$$V(x, y, 0) = \frac{1}{2}\,\pi\, ab\, a_1\,(I - I_1\,x^2 - I_2\,y^2 + 2\,I_{12}\,xy), \tag{7}$$

unde am notat

$$I = \int_0^\pi [1/(a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi)^{1/2}]\,d\chi, \tag{8}$$

$$I_1 = \int_0^\pi [\sin^2\chi/(a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi)^{3/2}]\,d\chi, \tag{9}$$

$$I_2 = \int_0^\pi [\cos^2\chi/(a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi)^{3/2}]\,d\chi, \tag{10}$$

$$I_{12} = \int_0^\pi [\sin\chi\cos\chi/(a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi)^{3/2}]\,d\chi. \tag{11}$$

Integrala (8) coincide evident cu cea din (4.8), astfel că avem

$$I = (2/a)\,\mathrm{K}(k). \tag{12}$$

Mai departe, întrucît integrandul din (11) e antisimetric în $[0, \pi]$, deducem că

$$I_{12} = 0. \tag{13}$$

Rămîn de găsit integralele I_1 și I_2, care se mai pot scrie (vezi (4.9)) sub forma

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos^2 \psi/(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{3/2}]\, \mathrm{d}\psi, \\ I_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\sin^2 \psi/(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{3/2}]\, \mathrm{d}\psi. \end{aligned} \tag{14}$$

Să începem prin a calcula sumele

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\psi/(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{3/2}, \\ a^2 I_1 + b^2 I_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\psi/(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{1/2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Raționînd ca în (4.8) — (4.11) și utilizînd (4.7), avem mai întîi

$$I_1 + I_2 = 2a^{-3} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\psi/(1-k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}, \quad I_1 + (1-k^2)\, I_2 = 2a^{-3} K(k). \tag{16}$$

Pentru a calcula integrala ce apare în (16), se caută derivata

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left[\frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}\right] = \frac{1 - 2 \sin^2 \psi + k^2 \sin^4 \psi}{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} = \frac{k^2 - 1 + (1-k^2 \sin^2 \psi)^2}{k^2 (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} - \frac{1-k^2}{k^2} \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}.$$

Integrînd termenii extremi între limitele 0 și $\pi/2$, căpătăm

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\psi/(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2} = \mathrm{E}(k)/(1 - k^2), \tag{17}$$

unde $\mathrm{E}(k)$ este *integrala eliptică completă de speța a doua* de modul k, deja întîlnită în (9.5.17):

$$\mathrm{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}\, \mathrm{d}\psi. \tag{18}$$

Integrala $\mathrm{E}(k)$ este de asemenea tabulată (vezi indicaţiile din § 4, pag. 632). Reproducem aci o scurtă tabelă şi un grafic:

k	K(k)	E(k)
0,0	1,571	1,571
0,1	1,574	1,567
0,2	1,587	1,555
0,3	1,608	1,535
0,4	1,640	1,506
0,5	1,686	1,467
0,6	1,751	1,418
0,7	1,846	1,355
0,8	1,996	1,270
0,9	2,281	1,171
0,95	2,590	1,102
0,98	3,020	1,050
1,00	∞	1,000

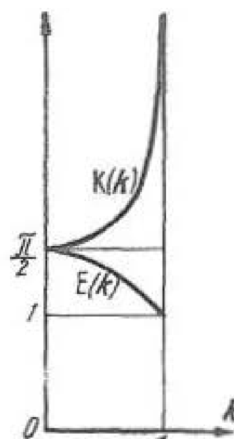


Fig. 10.5.1

Ţinînd acum seama de (17), relaţiile (16) iau forma

$$I_1+I_2 = [2/a^3(1-k^2)]\,\mathrm{E}(k), \qquad (1-k^2)^{-1}\,I_1+I_2 = [2/a^3\,(1-k^2)]\,\mathrm{K}(k), \quad (19)$$

de unde rezultă imediat valorile căutate, ca expresii raţionale de primele două integrale eliptice complete:

$$I_1 = \frac{2}{k^2a^3}\Big[\mathrm{K}(k)-\mathrm{E}(k)\Big], \qquad I_2 = \frac{2}{k^2a^3}\left[\frac{\mathrm{E}(k)}{1-k^2}-\mathrm{K}(k)\right]\cdot \quad (20)$$

Este însă de preferat să punem I_1, I_2 sub o altă formă, conţinînd *derivatele* [4]) integralelor eliptice complete în raport cu modulul. Pentru aceasta, din (4.11) obţinem mai întîi

$$\dot{\mathrm{K}}(k) = \mathrm{dK}/\mathrm{d}k = k\int_0^{\pi/2}[\sin^2\psi/(1-k^2\sin^2\psi)^{3/2}]\,\mathrm{d}\psi. \quad (21)$$

Or, această derivată poate fi scrisă ca funcţie raţională de $\mathrm{K}(k)$ şi $\mathrm{E}(k)$: ţinînd seama de (4.11) şi de relaţia (17), deducem

$$\dot{\mathrm{K}}(k) = \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{k^2\sin^2\psi+1-1}{(1-k^2\sin^2\psi)^{3/2}}\,\mathrm{d}\psi = \frac{1}{k}\left[\frac{\mathrm{E}(k)}{1-k^2}-\mathrm{K}(k)\right]\cdot \quad (22)$$

Tot astfel, din (18) căpătăm mai întîi

$$\dot{\mathrm{E}}(k) = \mathrm{dE}/\mathrm{d}k = -\,k\int_0^{\pi/2}[\sin^2\psi/(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}]\,\mathrm{d}\psi, \quad (23)$$

---

[4]) Le vom nota cu un punct, întrucît semnul „prim" este rezervat în teoria integralelor eliptice pentru alte scopuri, şi nu există nici o primejdie de confuzie.

şi mai departe, utilizînd (4.11) şi (18):

$$\dot{\mathrm{E}}(k) = \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2} \frac{-k^2 \sin^2 \psi + 1 - 1}{(1 - k^2 \sin^2\psi)^{1/2}} \mathrm{d}\psi = \frac{1}{k}[\mathrm{E}(k) - \mathrm{K}(k)]. \quad (24)$$

Comparînd formulele (20) cu (22), (24), avem imediat

$$I_1 = -2k^{-1} a^{-3} \dot{\mathrm{E}}(k), \qquad I_2 = 2k^{-1} a^{-3} \dot{\mathrm{K}}(k). \quad (25)$$

Introducînd acum valorile (12), (13) şi (25) în (7), căpătăm

$$V(x, y, 0) = \pi b a_1 [\mathrm{K}(k) + k^{-1} a^{-2} \dot{\mathrm{E}}(k) x^2 - k^{-1} a^{-2} \dot{\mathrm{K}}(k) y^2]. \quad (26)$$

b) Ecuaţiile problemei

Să comparăm (26) cu expresia (4). Prin identificare, căpătăm un sistem de trei ecuaţii, la care adăugăm şi ecuaţia de echilibru (3):

$$\pi b a_1 \mathrm{K}(k) = \delta/\theta, \quad (27)$$

$$-(\pi b a_1/k a^2) \dot{\mathrm{E}}(k) = 1/2\, \theta \rho', \quad (28)$$

$$(\pi b a_1/k a^2) \dot{\mathrm{K}}(k) = 1/2\, \theta \rho'', \quad (29)$$

$$a_1 \iint_{\mathscr{D}} \sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}\, \mathrm{d}D = P. \quad (30)$$

Acest sistem poate fi încă simplificat dacă calculăm integrala din (30), fie ea notată J''. Raţionînd ca în (4.15) — (4.18), avem pe rînd

$$J'' = -\int_0^{2\pi} [1/2\, A(\chi)]\, \mathrm{d}\chi \int_0^{1/\sqrt{A(\chi)}} \frac{2}{3} \mathrm{d}[1 - A(\chi) R^2]^{3/2},$$

sau încă

$$J'' = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} [1/A(\chi)]\, \mathrm{d}\chi [1 - A(\chi) R^2]^{3/2} \Big|_0^{1/\sqrt{A(\chi)}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} [1/A(\chi)]\, \mathrm{d}\chi,$$

ceea ce, comparînd cu (4.16), (4.18), dă imediat

$$J'' = \frac{2}{3} \pi a b. \quad (31)$$

Cu aceasta, ecuaţia (30) conduce la valoarea

$$a_1 = \frac{3}{2}(P/D), \quad (32)$$

iar ecuaţiile (29) — (31) iau forma mai compactă

$$\frac{3}{2}(P/a)\,\mathrm{K}(k) = \delta/\theta, \tag{33}$$

$$-\frac{3}{2}(P/ka^3)\,\dot{\mathrm{E}}(k) = 1/2\theta\rho', \tag{34}$$

$$\frac{3}{2}(P/ka^3)\,\dot{\mathrm{K}}(k) = 1/2\theta\rho''. \tag{35}$$

Sistemul (33) — (35) (într-o formă mai complicată, şi conţinînd înseşi integralele eliptice) a fost stabilit de către H. Hertz [1], al cărui nume îl poartă.

Ţinînd seama de (32), expresia (5) a presiunii devine

$$p(\xi, \eta) = \frac{3}{2}(P/D)\sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}, \tag{36}$$

ceea ce nu determină încă funcţia $p(\xi, \eta)$ (întrucît a, b nu sînt cunoscute), dar dă totuşi unele informaţii asupra repartiţiei presiunilor sub ştanţă. Astfel, se observă că presiunea îşi atinge *maximul* în centru, şi anume

$$p_{\max} = p(0, 0) = a_1 = \frac{3}{2}p_m, \tag{37}$$

unde p_m este presiunea medie (4.22). După cum s-a prevăzut în § 2, presiunea $p(\xi, \eta)$ scade spre frontiera domeniului de contact, şi este nulă pe $\mathscr{L}$.

Pentru a găsi semiaxa mare a elipsei de contact, să introducem mai întîi (24) şi (22) în (34) şi (35). Aceasta dă

$$1/2\theta\rho' = \frac{3}{2}(P/k^2a^3)\,[\mathrm{K}(k) - \mathrm{E}(k)], \tag{38}$$

$$1/2\theta\rho'' = \frac{3}{2}(P/k^2a^3)\,[\mathrm{E}(k)/(1-k^2) - \mathrm{K}(k)]. \tag{39}$$

Adunînd membru cu membru aceste două egalităţi şi notînd curbura medie a ştanţei în origine cu

$$H = \frac{1}{2}(1/\rho' + 1/\rho''), \tag{40}$$

găsim cu uşurinţă

$$\frac{1}{2}H/\theta = \frac{3}{2}(P/k^2a^3)\,[k^2\,\mathrm{E}(k)/(1-k^2)], \tag{41}$$

ceea ce dă valoarea căutată a semiaxei mari sub forma

$$a = \sqrt[3]{\frac{2}{3}[\mathrm{E}(k)/(1-k^2)][\theta P/H]}, \tag{42}$$

unde mărimile H, θ și P sînt cunoscute, iar k urmează a fi determinat.

Lungimea semiaxei mici b rezultă evident din (4.7):

$$b = a\sqrt{1-k^2}. \tag{43}$$

Penetrația δ se calculează din (33) sub forma (similară cu (4.20))

$$\delta = \frac{3}{2}\theta P[\mathrm{K}(k)/a]. \tag{44}$$

c) *Comportarea mărimilor* k, a, b, a_1

Rămîne de găsit excentricitatea k. Drumul de urmat rezultă din examinarea ecuațiilor (34), (35): împărțindu-le termen cu termen, se obține o ecuație transcendentă care conține numai pe k și raportul razelor de curbură ρ''/ρ'. De studiul ei ne vom ocupa în §§ 6 și 7.

Pentru moment, reținem că k depinde exclusiv de forma ștanței, ceea ce sugerează să izolăm în (42)—(44) și (32) termenii care depind de k, de cei care depind de H, θ și P. În felul acesta, se constată că semiaxele elipsei $\mathscr{D}$ sînt proporționale cu $H^{-1/3}\,\theta^{1/3}\,P^{1/3}$; aria ei este proporțională cu $H^{-2/3}\,\theta^{2/3}\,P^{2/3}$; presiunea maximă este proporțională cu $H^{2/3}\theta^{-2/3}\,P^{1/3}$, iar penetrația δ, cu $H^{1/3}\,\theta^{2/3}\,P^{2/3}$.

Presiunea maximă (și deci și tensiunile în punctele cele mai solicitate) crește ca radicalul cubic al sarcinii: dacă de pildă sarcina se dublează, presiunea maximă crește numai cu 26%. Aceasta se explică intuitiv prin mărirea domeniului de contact, și solicitarea mai intensă a unor porțiuni mai mari din semispațiu.

Mărimile de interes mecanic a_1 și δ cresc odată cu P (ceea ce era de așteptat) și cu H (așadar, cu cît razele de curbură sînt mai mici, deci cu cît ștanța e mai apropiată de aspectul unui „vîrf"). Penetrația δ crește odată cu θ, așadar este cu atît mai mare, cu cît rigiditatea μ e mai mică. Dimpotrivă, presiunea maximă a_1 scade cînd θ crește, așadar e cu atît mai mică cu cît rigiditatea μ e mai mică.

Pentru ca penetrația δ să fie mică, trebuie ca μ să fie mare, așadar ca materialul semispațiului să fie „cît mai rigid". Dimpotrivă, pentru ca presiunea maximă a_1 să fie mică, trebuie ca μ să fie mic: aceasta este ușor de înțeles, deoarece pentru μ mic, θ este mare, și deci penetrația și aria de contact (pe care se repartizează presiunea totală) cresc.

Alegerea formei ștanței și a materialului semispațiului (în măsura în care ele sînt la dispoziția noastră) depinde desigur de condițiile de satisfăcut; în particular, de faptul dacă este de dorit o penetrație mică, sau tensiuni mici.

§ 6. STUDIUL ECUAȚIEI TRANSCENDENTE A LUI HERTZ

Să ne fixăm atenția asupra determinării excentricității k (L. Solomon [5], [6]). Pentru aceasta, este comod să caracterizăm geometria ștanței prin intermediul *curburii medii*

$$H = \frac{1}{2}(1/\rho' + 1/\rho''), \tag{1}$$

și al cantității

$$h = \rho''/\rho'. \tag{2}$$

Întrucît aceasta din urmă este egală cu 1 pentru $\rho' = \rho''$ (paraboloid de revoluție), valoarea ei măsoară abaterea suprafeței ștanței de la forma unei suprafețe de revoluție. De aceea, constanta h se va numi *coeficient de rotunjire*. Cu cît h este mai mic, cu atît ștanța este mai turtită. Întrucît $\rho'' \leqslant \rho'$, avem evident $0 < h \leqslant 1$.

Cunoașterea lui H și h este echivalentă cu cea a lui ρ' și ρ'', deoarece

$$\rho' = (1 + h)/2hH, \quad \rho'' = (1 + h)/2H. \tag{3}$$

Să împărțim acum membru cu membru ecuațiile (5.34) și (5.35). Aceasta dă:

$$-\dot{\mathrm{E}}(k)/\dot{\mathrm{K}}(k) = \rho''/\rho', \tag{4}$$

așadar o ecuație transcendentă pentru excentricitatea k, a cărei formă explică de altfel introducerea constantei h.

a) Monotonia funcției $f(k)$

Să considerăm deci funcția

$$f(k) = -\dot{\mathrm{E}}(k)/\dot{\mathrm{K}}(k), \tag{5}$$

unde $\dot{\mathrm{E}}(k)$, $\dot{\mathrm{K}}(k)$ au expresiile din (5.21), (5.23). Ținînd seama de notația (2), obținem astfel *ecuația transcendentă a lui Hertz*

$$f(k) = h. \tag{6}$$

Pentru a o rezolva, — așadar pentru a găsi, grafic sau prin tabulare, valoarea k dacă raportul h este cunoscut — trebuie să demonstrăm în prealabil că funcția $f(k)$ este *monotonă*, așadar că derivata ei

$$\dot{f}(k) = (\dot{\mathrm{E}}\ddot{\mathrm{K}} - \dot{\mathrm{K}}\ddot{\mathrm{E}})/\dot{\mathrm{K}}^2 \tag{7}$$

păstrează un semn constant în intervalul $k \in [0,1]$. Pentru aceasta, vom observa mai întîi că $\dot{\mathrm{K}}(k)$ și $\dot{\mathrm{E}}(k)$ sînt continue în intervalul deschis $]0,1[$ (vezi (5.22) și (5.24)). De asemenea, din (5.21) se vede că $\dot{\mathrm{K}}(k) \neq 0$ în același interval. (Totuși, $\dot{\mathrm{K}}(0) = 0$.) Mai departe, din (5.21) și (5.23) avem

$$\ddot{\mathrm{K}}(k) = \int_0^{\pi/2} [\sin^2 \psi/(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}]\, d\psi + 3k^2 \int_0^{\pi/2} [\sin^4 \psi/(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{5/2}]\, d\psi, \tag{8}$$

$$\ddot{\mathrm{E}}(k) = -\int_0^{\pi/2} [\sin^2 \psi/(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}]\, d\psi. \tag{9}$$

În particular, e limpede că funcția $\dot{f}(k) \in C^0]0,1[$. Dar încercarea de a demonstra direct că ea păstrează un semn constant nu duce la țintă. Vom raționa de aceea în modul următor.

Ecuațiile diferențiale verificate de funcțiile $\mathrm{K}(k)$ și $\mathrm{E}(k)$ se obțin ușor din (5.22) și (5.24). Anume, avem mai întîi

$$k\dot{\mathrm{K}} = (1 - k^2)^{-1}\mathrm{E} - \mathrm{K}, \qquad k\dot{\mathrm{E}} = \mathrm{E} - \mathrm{K}, \tag{10}$$

și încă prin derivare în raport cu k:

$$k\ddot{\mathrm{K}} + \dot{\mathrm{K}} = 2k(1 - k^2)^{-2}\mathrm{E} + (1 - k^2)^{-1}\dot{\mathrm{E}} - \dot{\mathrm{K}}, \qquad k\ddot{\mathrm{E}} = -\dot{\mathrm{K}}. \tag{11}$$

Introducînd în prima relație (11) valoarea lui $\dot{\mathrm{E}}$ ca funcție de E și K din a doua relație (10), și apoi valoarea lui E ca funcție de K și $\dot{\mathrm{K}}$ din prima relație (10), obținem ecuația

$$(1 - k^2)\ddot{\mathrm{K}} + (1 - 3k^2)\, k^{-1}\dot{\mathrm{K}} - \mathrm{K} = 0. \tag{12}$$

Introducînd în a doua relație (11) valoarea lui $\dot{\mathrm{K}}$ ca funcție de E și K din prima relație (10), și apoi înlocuind pe K prin intermediul lui E și $\dot{\mathrm{E}}$ din a doua relație (10), avem și

$$(1 - k^2)\ddot{\mathrm{E}} + (1 - k^2)k^{-1}\dot{\mathrm{E}} + \mathrm{E} = 0. \tag{13}$$

Vom nota pe scurt

$$A = \dot{\mathrm{K}}, \qquad B = \dot{\mathrm{E}}. \tag{14}$$

Derivînd ecuațiile (12) și (13), obținem ușor

$$\begin{aligned} \ddot{A} + \frac{1 - 5k^2}{k(1 - k^2)}\dot{A} - \frac{1 + 4k^2}{k^2(1 - k^2)}A &= 0, \\ \ddot{B} + \frac{1 - 3k^2}{k(1 - k^2)}\dot{B} - \frac{1}{k^2(1 - k^2)}B &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Înmulţind prima din aceste ecuaţii cu B, pe cea de a doua cu A şi scăzîndu-le membru cu membru, căpătăm

$$(B\ddot{A} - A\ddot{B}) + \frac{1-5k^2}{k(1-k^2)}(B\dot{A} - A\dot{B}) - 2\frac{k}{1-k^2}\dot{B}A - 4\frac{1}{1-k^2}AB = 0,$$

de unde, notînd încă

$$C = B\dot{A} - A\dot{B}, \tag{16}$$

căpătăm ecuaţia diferenţială liniară neomogenă de primul ordin

$$\dot{C} + \frac{1-5k^2}{k(1-k^2)}C - \frac{2}{1-k^2}(2B + k\dot{B})A = 0. \tag{17}$$

Soluţia acestei ecuaţii este (vezi V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 4):

$$C(k) = \exp\left[-\int_0^k \frac{1-5k^2}{k(1-k^2)}\,\mathrm{d}k\right] \times$$

$$\times \left\{C_0 + \int_0^k \frac{2}{1-k^2}(2B + k\dot{B})A \exp\left[\int_0^k \frac{1-5k^2}{k(1-k^2)}\,\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}k\right\}, \tag{18}$$

unde $C_0 = C(0)$. Ţinînd seama de (16), (14), (5.21) şi (5.23), găsim

$$C_0 = C(0) = \dot{\mathrm{E}}(0)\,\ddot{\mathrm{K}}(0) - \ddot{\mathrm{E}}(0)\,\dot{\mathrm{K}}(0) = 0. \tag{19}$$

Termenii exponenţiali din (18) sînt evident pozitivi. Funcţia $A = \dot{K}$ este, în virtutea relaţiei (5.21), pozitivă. În fine, expresia $2B + k\dot{B} = 2\dot{\mathrm{E}} + k\ddot{\mathrm{E}}$ este negativă, după cum rezultă din (5.23) şi (9). Prin urmare, funcţia $C(k)$ definită de (18), (19) este *negativă* în intervalul $]0,1[$. Intrucît $C(k)$ este numărătorul expresiei $\dot{f}(k)$ din (7), urmează că funcţia $f(k)$ din (5) este *descrescătoare* pentru $k \in]0,1[$. Aşadar, rezolvarea ecuaţiei transcendente (6) prin tabularea primului ei membru este permisă.

b) *Rezolvarea ecuaţiei lui Hertz prin tabulare*

Introducînd expresiile (5.21) şi (5.23) în (5), obţinem

$$f(k) = \left[\int_0^{\pi/2} [\sin^2\psi/(1 - k^2\sin^2\psi)^{1/2}]\,\mathrm{d}\psi\right] :$$

$$: \left[\int_0^{\pi/2} [\sin^2\psi/(1 - k^2\sin^2\psi)^{3/2}]\,\mathrm{d}\psi. \tag{20}$$

Această formă s-a dovedit a fi cea mai convenabilă pentru tabularea funcției $f(k)$ cu ajutorul unei mașini electronice de calcul.

Valoarea $f(0)$ corespunde domeniului de contact circular. Valoarea $f(1)$ ar corespunde cazului $b/a = 0$, lipsit de sens mecanic. Integralele din (20) permit să obținem imediat

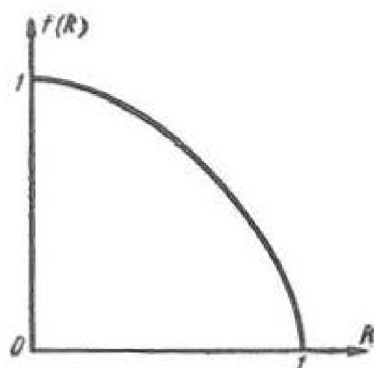


Fig. 10.6.1.

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 0. \tag{21}$$

Tabloul de variație a funcției $f(k)$ dă nemijlocit, pentru orice valoare $h = \rho''/\rho'$, valoarea corespunzătoare a excentricității k, și aceasta permite să se determine din (5.42)—(5.44) și (5.32), cantitățile căutate a, b, δ, a_1.

Reproducem aci graficul și un tablou (cu dublă intrare, pasul fiind 0,01) pentru funcția $f(k)$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994
0,1	0,992	0,991	0,989	0,987	0,985	0,983	0,981	0,978	0,976	0,973
0,2	0,970	0,967	0,963	0,960	0,956	0,953	0,949	0,945	0,941	0,936
0,3	0,932	0,927	0,922	0,917	0,912	0,907	0,901	0,895	0,890	0,884
0,4	0,877	0,871	0,865	0,858	0,851	0,844	0,837	0,829	0,822	0,814
0,5	0,806	0,798	0,789	0,781	0,772	0,763	0,754	0,745	0,735	0,725
0,6	0,715	0,705	0,695	0,684	0,673	0,662	0,651	0,639	0,628	0,615
0,7	0,603	0,591	0,578	0,565	0,551	0,537	0,523	0,509	0,494	0,479
0,8	0,464	0,448	0,432	0,415	0,398	0,381	0,363	0,344	0,325	0,306
0,9	0,285	0,264	0,242	0,220	0,196	0,171	0,144	0,115	0,084	0,048

§ 7. STUDIUL APROXIMATIV AL ECUAȚIEI LUI HERTZ. CONSECINȚE

a) Soluția aproximativă algebrică a ecuației lui Hertz

Graficul din figura 10.6.1 prezintă un aspect destul de regulat, apropiat de un arc de cerc. Aceasta sugerează să căutăm pentru $f(k)$ o expresie aproximativă de forma

$$f_0(k) = (1 - k^2)^m, \tag{1}$$

unde exponentul m urmează a fi determinat.

În acest scop, să considerăm dezvoltările în serie cunoscute (vezi I. Rîjik și I. Gradstein [1], §§ 6.113 și 6.114):

$$\mathrm{K}(k) = \frac{1}{2}\pi\left\{1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \ldots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2n} + \ldots\right\}, \tag{2}$$

$$\mathrm{E}(k) = \frac{1}{2}\pi\left\{1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \ldots - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \ldots\right\}. \tag{3}$$

De aci se deduce uşor

$$f(k) = -\dot{E}(k)/\dot{K}(k) = 1 - \frac{3}{2^2}k^2 - \frac{3}{2^5}k^4 - \frac{21}{2^9}k^6 - \frac{48}{2^{11}}k^8 - \ldots \quad (4)$$

Primii doi termeni ai dezvoltării în serie a lui $f_0(k)$ vor coincide cu primii doi termeni din (4), dacă luăm $m = 3/4$. Atunci din (1) urmează

$$f_0(k) = (1 - k^2)^{3/4} = 1 - \frac{3}{2^2}k^2 - \frac{3}{2^5}k^4 - \frac{20}{2^9}k^6 - \frac{45}{2^{11}}k^8 - \ldots, \quad (5)$$

astfel că în fapt termenii celor două serii coincid pînă la cei de gradul 5 inclusiv, iar deosebirea dintre coeficienţii termenilor următori este foarte mică. Comparînd valorile calculate pentru $f(k)$ şi $f_0(k)$, se observă că relaţia

$$f(k) \cong f_0(k) \quad (6)$$

e respectată pînă la a treia cifră semnificativă. (Deosebirile pentru $k = 0{,}6$ şi $k = 0{,}7$ provin din rotunjirea celei de a patra cifre.)

k	$f(k)$	$f_0(k)$
0,0	1,000	1,000
0,1	0,992	0,992
0,2	0,970	0,970
0,3	0,932	0,932
0,4	0,877	0,877
0,5	0,806	0,806
0,6	0,715	0,716
0,7	0,603	0,604
0,8	0,464	0,464
0,9	0,285	0,288
0,95	0,171	1,175
0,98	0,084	0,089
0,99	0,048	0,053
1,00	0,000	0,000

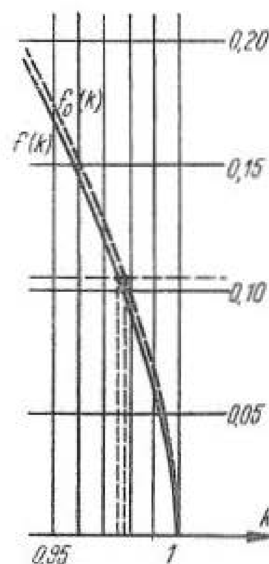


Fig. 10.7.1.

La scara figurii 10.6.1, cele două curbe nici nu pot fi trasate separat. Abateri vizibile se constată numai pentru $k \geqslant 0{,}95$. Însă nu funcţiile $f(k)$ şi $f_0(k)$ ne interesează, ci valorile lui k, respectiv valorile sale aproximative (pe care le vom nota k_0) corespunzătoare *aceluiaşi* $h = f(k)$. Întrucît panta ambelor curbe este foarte mare pentru $k \geqslant 0{,}95$, rezultă (vezi fig. 10.7.1) că pentru aceeaşi valoare h, se obţin abscise k şi k_0 ce diferă numai cu foarte puţin.

Trebuie amintit şi că, pentru valori mari ale lui k (aşadar pentru o elipsă $\mathscr{D}$ foarte alungită), însăşi *formularea* problemei se schimbă, deoarece contactul iniţial într-un punct se înlocuieşte practic vorbind cu contactul în lungul unei linii.

În definitiv, cele de mai sus permit să înlocuim ecuația *transcendentă* (6.6), prin ecuația *algebrică*

$$(1 - k_0^2)^{3/4} = h, \tag{7}$$

a cărei soluție evidentă este

$$k_0 = \sqrt{1 - h^{4/3}}. \tag{8}$$

Tabulînd funcția (8) și comparînd cu valorile ce rezultă din tabloul de la pag. 644 pentru k, constatăm că eroarea relativă *nu atinge* 0,2%, rezultat deplin satisfăcător. Introducînd (8) în (4.7), obținem și

$$b/a = h^{2/3}. \tag{9}$$

Or, cunoașterea raportului b/a echivalează cu cunoașterea lui k — și deci *relația elementară* (9) *înlocuiește cu totul ecuația* (6.6) în studiul problemei.

b) *Rolul excentricității*

Să amintim acum (vezi finele § 5, pag. 640) posibilitatea de a izola în expresiile pentru a, b, δ, a_1 factorii ce depind numai de k. Vom norma acești factori în așa fel încît pentru $k = 0$ (domeniu de contact circular) ei să ia valoarea 1. Ținînd seama și de valorile

$$\mathrm{E}(0) = \mathrm{K}(0) = \frac{1}{2}\pi, \tag{10}$$

(ce rezultă din (2) și (3)), obținem mai întîi din (5.42)

$$a(\rho', \rho'', \theta, P) = m(k)\, M(H, \theta, P), \tag{11}$$

unde am notat

$$m(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/3} (1 - k^2)^{-1/3} [\mathrm{E}(k)]^{1/3}, \tag{12}$$

$$M(H, \theta, P) = \left[\frac{3}{4}\pi H^{-1} \theta P\right]^{1/3}. \tag{13}$$

Mai departe, din relația (5.43) urmează

$$b(\rho', \rho'', \theta, P) = n(k)\, M(H, \theta, P), \tag{14}$$

unde $M(H, \theta, P)$ are valoarea din (13), iar

$$n(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/3} (1 - k^2)^{1/6} [\mathrm{E}(k)]^{1/3}. \tag{15}$$

Introducînd acum (11)—(13) în (5.44), căpătăm

$$\delta(\rho', \rho'', \theta, P) = r(k)\, R\,(H, \theta, P), \tag{16}$$

unde

$$r(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2/3} (1-k^2)^{1/3}\ \mathrm{K}(k)\,[\mathrm{E}(k)]^{-1/3}, \tag{17}$$

$$R(H, \theta, P) = \left[\left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 H\, \theta^2\, P^2\right]^{1/3}. \tag{18}$$

În fine, introducînd (11)—(15) în (5.32), obţinem şi

$$a_1(\rho', \rho'', \theta, P) = s(k)\, S\,(H, \theta, P), \tag{19}$$

unde am notat

$$s(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3} (1-k^2)^{1/6}\,[\mathrm{E}(k)]^{-2/3}, \tag{20}$$

$$S(H, \theta, P) = [6\pi^{-5} H^2\, \theta^{-2}\, P]^{1/3}. \tag{21}$$

În felul acesta, am izolat deci factorii ce depind de *natura mecanică a problemei* (aşadar de H, θ, şi P), de cei care nu depind decît de k (aşadar de *o anumită ipoteză matematică* asupra formei lui $\mathscr{D}$).

Funcţiile $m(k)$ şi $n(k)$ au fost considerate şi tabulate de către H. Whitemore şi S. Petrenko, şi de atunci de repetate ori utilizate (vezi de ex. L. Leibenzon [1], §73; S. Timoshenko şi J. Goodier [1], §126). Dar numai funcţiile $r(k)$ şi $s(k)$ prezintă interes principial. Pentru a le cerceta, să ţinem seama de dezvoltările (2), (3), precum şi de seriile:

$$[\mathrm{E}(k)]^{1/3} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3}\left[1 - \frac{1}{3\cdot 4}k^2 - \frac{13}{3^2\cdot 4^3}k^4 - \frac{209}{3^4\cdot 4^4}k^6 - \frac{22267}{3^5\cdot 2^{14}}k^8 - \dots\right], \tag{22}$$

$$[\mathrm{E}(k)]^{2/3} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}\left[1 - \frac{1}{2\cdot 3}k^2 - \frac{11}{2^5\cdot 3^2}k^4 - \frac{85}{2^6\cdot 3^4}k^6 - \frac{17909}{2^{13}\cdot 3^5}k^8 - \dots\right];$$

$$\begin{aligned}(1-k^2)^{1/3} &= \left[1 - \frac{1}{3}k^2 - \frac{1}{3^2}k^4 - \frac{5}{3^4}k^6 - \frac{10}{3^5}k^8 - \dots\right],\\ (1-k^2)^{1/6} &= \left[1 - \frac{1}{6}k^2 - \frac{5}{2\cdot 6^2}k^4 - \frac{5\cdot 11}{6^4}k^6 - \frac{5\cdot 11\cdot 17}{4\cdot 6^5}k^8 - \dots\right].\end{aligned} \tag{23}$$

Introducînd acum (2), (22) şi (23) în (17) şi (20), obţinem

$$r(k) = 1 - 2^{-5}k^4\,[1 + k^2 + (1 - 29\cdot 2^{-8})\,k^4 + \dots], \tag{24}$$

$$s(k) = 1 - 2^{-5}k^4\,[1 + k^2 + (1 - 31\cdot 2^{-8})\,k^4 + \dots], \tag{25}$$

aşadar două serii evident convergente, cu primii termeni aproape identici, şi *care depind numai în foarte mică măsură de valoarea excentricităţii* k.

Vom lua în general

$$r(k) = s(k) = 1 - (1/32)\, k^4\, l(k), \tag{26}$$

unde

$$l(k) = 1 + k^2 + 0{,}88\, k^4 + \ldots \tag{27}$$

Aceste formule sînt de acelaşi tip cu formulele (5.15.26), (5.15.27), care pun în evidenţă redusa măsură în care rigiditatea geometrică la torsiune a barei de secţiune eliptică depinde de excentricitatea elipsei de secţiune. Remarcăm că funcţiile $l_1(k)$ şi $l(k)$ sînt aproape identice, dar coeficientul 1/8 din cazul torsiunii este înlocuit aci cu 1/32, marcînd aşadar o şi mai mică importanţă a excentricităţii (deci a *formei*) elipsei.

Aproximînd funcţia $l(k)$ din (27) cu primii termeni ai unei progresii geometrice de raţie k^2, vom putea înlocui funcţiile din (26) prin

$$t(k) = 1 - (1/32)\, k^4(1 - k^{16})/(1 - k^2). \tag{28}$$

Dăm aci tabloul funcţiilor $r(k)$, $s(k)$ şi $t(k)$, pentru un pas egal cu 0,1, şi cu unele valori intermediare pentru $k \geqslant 0{,}95$. În acelaşi tablou apar (folosind valorile de la pag. 644) valorile $h^{-1} = \rho'/\rho''$ — care poate fi numit *coeficient de turtire* al ştanţei.

k	$r(k)$	$s(k)$	$t(k)$	ρ'/ρ''
0,0	1,000	1,000	1,000	1,00
0,1	1,000	1,000	1,000	1,01
0,2	1,000	1,000	1,000	1,03
0,3	1,000	1,000	1,000	1,07
0,4	0,999	0,999	0,999	1,14
0,5	0,997	0,997	0,997	1,24
0,6	0,994	0,994	0,994	1,40
0,7	0,986	0,986	0,985	1,66
0,8	0,968	0,969	0,965	2,15
0,9	0,920	0,922	0,912	3,50
0,95	0,854	0,859	0,854	5,85
0,96	0,830	0,836	0,840	7,00
0,97	0,797	0,807	0,820	8,70
0,98	0,750	0,764	—	11,9
0,99	0,667	0,690	—	20,7
0,999	0,419	0,478	—	200
0,9999	0,243	0,327	—	2000
1,0000	0,000	0,000	—	∞

Fig. 10.7.2

Tabelul şi graficul alăturat arată deci că, în cazul unui *punct* iniţial de contact, coeficientul de rotunjire nu influenţează sensibil elementele mecanice esenţiale δ şi a_1. Brusca modificare a aspectului curbelor $r(k)$

şi $s(k)$ pentru $k \to 1$ (aşadar $h \to 0$) arată tocmai că pentru astfel de valori are loc o schimbare a *caracterului* problemei, care trebuie formulată ca problemă de *contact în lungul unei linii*.

c) Formule aproximative

Cele de mai sus arată că, între limite destul de largi, putem evalua mărimile δ şi a_1 sub forma aproximativă $R(H, \theta, P)$ şi $S(H, \theta, P)$ din (18) şi (21), depinzînd aşadar nu de *forma* ştanţei, ci numai de *curbura ei medie*.

Să comparăm acum aria D a elipsei $\mathscr{D}$, cu aria elipsei de nivel ce se obţine secţionînd ştanţa cu planul $Z = \delta$. Notînd cu α, β semi-axele acestei elipse, corespunzătoare penetraţiei δ (pentru *alte* valori $Z =$ const., vom folosi indici), va fi suficient să comparăm ab cu $\alpha\beta$.

Din (11)—(15) obţinem mai întîi

$$ab = (1 - k^2)^{-1/6} [\mathrm{E}(k)]^{2/3} \left[\frac{3}{2} H^{-1} \theta P\right]^{2/3}. \tag{29}$$

Pe de altă parte, din (5.1) deducem ecuaţia elipsei de nivel $Z = z_0$:

$$\frac{1}{2} (x^2/\rho' z_0) + \frac{1}{2} (y^2/\rho'' z_0) = 1, \tag{30}$$

de unde pentru semiaxele ei urmează

$$\alpha_0 = \sqrt{2 z_0 \rho'}, \quad \beta_0 = \sqrt{2 z_0 \rho''}. \tag{31}$$

Remarcăm în treacăt că de aci avem şi

$$\beta_0/\alpha_0 = h^{1/2}. \tag{32}$$

Comparînd (32) cu (9) deducem, întrucît $h \leqslant 1$, că avem

$$\rho''/\rho' \leqslant b/a \leqslant \beta_0/\alpha_0, \tag{33}$$

astfel că elipsa de contact e *mai alungită* decît orice elipsă de nivel.

Înmulţind valorile (31) pentru $z_0 = \delta$ şi ţinînd seama de (6.3), obţinem

$$\alpha\beta = 2\delta \sqrt{\rho' \rho''} = (1 + h)\ h^{-1/2}\ H^{-1}\ \delta, \tag{34}$$

sau încă, introducînd aci valoarea lui δ din (16)—(18):

$$\alpha\beta = (1 - k^2)^{1/3}\ \mathrm{K}(k)\ [\mathrm{E}(k)]^{-1/3} (1 + h)\ h^{-1/2} \left[\frac{3}{2} H^{-1} \theta P\right]^{2/3}. \tag{35}$$

Comparînd acum expresiile (29) şi (35), constatăm că putem scrie

$$\alpha\beta = 2\ ab\ u(k), \tag{36}$$

unde am notat

$$2u(k) = [\mathrm{K}(k)/\mathrm{E}(k)]\,(1 - k^2)^{1/2}\,(1 + h)\,h^{-1/2}. \tag{37}$$

(Într-adevăr, dat fiind că $h = f(k)$, raportul celor două arii depinde numai de k.)

Introducînd aci expresiile (2), (3), obținem mai întîi

$$\mathrm{K}(k)/\mathrm{E}(k) = 1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2^4}k^4 + \frac{7}{2^5}k^6 + \frac{337}{2^{11}}k^8 + \frac{533}{2^{12}}k^{10} + \ldots \tag{38}$$

Ținînd seama de (7) și de (5), deducem, după calcule elementare

$$u(k) = 1 + 2^{-7}\,k^4[1 + k^2 + \ldots], \tag{39}$$

sau încă, utilizînd (27):

$$u(k) = 1 + (1/128)\,k^4\,l(k). \tag{40}$$

Prin urmare, cu o eroare ce nu depășește 4,5% pentru o ștanță pentru care $\rho' = 7\,\rho''$ (așadar $k = 0{,}96$), putem lua

$$\alpha\beta \cong 2\,ab, \tag{41}$$

astfel că aria elipsei de contact este egală cu *jumătate* din aria elipsei de nivel $Z = \delta$. Comparînd (41) cu (34), conchidem că aria elipsei de contact este practic proporțională cu penetrația δ — ceea ce amintește oarecum de ipoteza lui Winkler și Zimmermann.

Mai departe, de aci rezultă că aria elipsei de contact este aproximativ egală cu aria elipsei de nivel $z_0 = \delta/2$. (Vezi și (33).)

Dacă pentru o ștanță dată putem evalua sau măsura direct penetrația δ, cunoaștem deci și aria elipsei de contact. Presiunea maximă va fi și ea direct calculată, sub forma ce decurge din (5.32) și (41):

$$a_1 = 3P/\pi\alpha\beta, \tag{42}$$

sau încă, introducînd aci expresia (34):

$$a_1 = 3Ph^{1/2}H/\pi\,(1 + h)\,\delta. \tag{43}$$

§ 8. RIGIDITĂȚI GEOMETRICE LA PENETRAȚIE

a) Cazul domeniului de contact eliptic

Expresiile obținute pentru δ atît în cazul ștanței cu bază plană eliptică, cît și în cel al ștanței paraboloidale, sugerează introducerea unui parametru geometric global, analog rigidității geometrice la torsiune (L. Solomon [12]). Vom folosi (acolo unde există risc de confuzie), indicele „prim" pentru primul caz, și indicele „secund" pentru cel de-al doilea.

Amintim aci formula (5.13.15)

$$\mathcal{M}_3 = \mu\tau C, \tag{1}$$

şi cele spuse în § 5.6, pag. 189, despre relaţiile de acest tip.

Amintim de asemenea expresia (4.20) a penetraţiei

$$\delta' = \theta P\,[\mathrm{K}(k)/a], \tag{2}$$

precum şi pe cea care decurge din (7.16)–(7.18):

$$\delta'' = (3/2)^{2/3}\,(1-k^2)^{1/3}\,\mathrm{K}(k)\,[\mathrm{E}(k)]^{-1/3}\,H^{1/3}\,\theta^{2/3}\,P^{2/3}. \tag{3}$$

Pentru semiaxele elipsei $\mathcal{D}$ avem desigur, ca şi în (5.15.24):

$$a = \sqrt{D/\pi}\,(1-k^2)^{-1/4},\quad b = \sqrt{D/\pi}\,(1-k^2)^{1/4}. \tag{4}$$

Ţinînd seama de (4) şi de valoarea θ din (2.14), vom transcrie relaţia (2) sub o formă analogă cu (1):

$$P = [\mu/(1-\nu)]\,\delta'\,C_c', \tag{5}$$

unde am notat

$$C_c' = 4\,\sqrt{D/\pi}\,[(2/\pi)\,\mathrm{K}(k)\,(1-k^2)^{1/4}]^{-1}. \tag{6}$$

Este firesc ca această cantitate, funcţie numai de configuraţia lui $\mathcal{D}$, să fie numită *rigiditate geometrică la penetraţie* (pentru ştanţa cu bază plană eliptică).

În cazul ($''$), vom căuta o relaţie de forma

$$P = P(\mu, \nu, \delta, D, k) = \mu^m \nu^n D^p f(\nu, k). \tag{7}$$

Întrucît dimensiunile cantităţilor din (7) sînt

$$[P] = \mathrm{F},\ [\mu] = \mathrm{FL}^{-2},\ [\delta] = \mathrm{L},\ [D] = \mathrm{L}^2,$$

rezultă că trebuie să luăm $m = 1$ şi $n + 2p = 2$, ceea ce — ţinînd seama de aspectul lui (5) — ar conduce la o formulă

$$P = [\mu/(1-\nu)]\,\delta'' C_c''. \tag{8}$$

În aparenţă, o astfel de formulă nu poate decurge din (3), dat fiind că dependenţa dintre δ şi P nu este liniară. Să remarcăm însă că din (7.11) – (7.15), sau direct din (7.29), urmează

$$D = \pi ab = (3/2)^{2/3}\,\pi[\mathrm{E}(k)]^{2/3}\,(1-k^2)^{-1/6}\,H^{-2/3}\,\theta^{2/3}\,P^{2/3},$$

de unde

$$H^{1/3} = (3/2)^{1/3}\,(\pi/D)^{1/2}\,[\mathrm{E}(k)]^{1/3}\,(1-k^2)^{-1/12}\,\theta^{1/3}\,P^{1/3},$$

astfel că acum (3) devine

$$\delta'' = \frac{3}{2}(\pi/D)^{1/2}\,\mathrm{K}(k)\,(1-k^2)^{1/4}\,\theta\,P. \tag{9}$$

Introducînd aci θ din (2.14), obținem tocmai formula (8), unde

$$C''_c = \frac{8}{3}\sqrt{D/\pi}\,[(2/\pi)\,\mathrm{K}(k)\,(1-k^2)^{1/4}]^{-1}. \tag{10}$$

Comparînd (10) cu (6), observăm relația simplă

$$C''_c = \frac{2}{3}C'_c. \tag{11}$$

Cantitatea C''_c se va numi desigur *rigiditate geometrică la penetrație* a ștanței paraboloidale.

Cu cît cantitățile C'_c și C''_c sînt mai mari, cu atît (pentru θ și P dați) penetrația este mai mică. Relația (11) arată că rigiditatea geometrică la penetrație e *mai mică* pentru ștanța paraboloidală—ceea ce e de înțeles, întrucît în cazul ștanței cu bază plană o parte importantă a sarcinii P trebuie cheltuită pentru a învinge rezistența mediului elastic în vecinătatea liniei singulare $\mathscr{L}$.

Să atribuim indicele „zero" mărimilor relative la cazul domeniului de contact circular ($k = 0$). Transcriind (7.29) pentru acest caz, obținem

$$D_0/\pi = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{2/3}\left[\frac{3}{2}H_0^{-1}\,\theta_0\,P_0\right]^{2/3}. \tag{12}$$

Punînd condițiile $D = D_0$, $\theta = \theta_0$, $P = P_0$, și comparînd (12) cu (7.29), deducem

$$H = (2/\pi)\,\mathrm{E}(k)\,(1-k^2)^{-1/4}H_0, \tag{13}$$

ceea ce *definește* acea ștanță paraboloidală (de curbură medie H și coeficient de rotunjire $h = f(k)$) care realizează — pentru același material și aceeași sarcină — aceeași arie de contact ca și ștanța în formă de paraboloid de revoluție (de curbură medie H_0, și avînd $h = 1$). Desigur, aria D_0 — și deci și H — depinde de θ și P.

Comparînd penetrațiile corespunzătoare valorilor $k = 0$ și $k \neq 0$ (pentru același material, aceeași sarcină, și *aceeași arie a domeniului de contact*) obținem din (6) și (10) una și aceeași formulă, valabilă în ambele cazuri (′) și (″):

$$\delta/\delta_0 = C_c(0)/C_c(k) = (2/\pi)\,\mathrm{K}(k)\,(1-k^2)^{1/4}. \tag{14}$$

Este interesant de remarcat că funcția de mai sus apare la Lord Rayleigh [1], volumul 2, § 306, în studiul conductibilității sunetului printr-un orificiu eliptic (în particular, circular).

După calcule similare celor din § 7, obținem

$$(2/\pi)\ \mathrm{E}(k)\,(1-k^2)^{-1/4} = 1 + (3/64)\,k^4\,[1 + k^2 + (1 - 21\cdot 2^{-8})\,k^4 + \dots],$$

$$(2/\pi)\ \mathrm{K}(k)\,(1-k^2)^{1/4} = 1 - (1/64)\,k^4\,[1 + k^2 + (1 - 25\cdot 2^{-8})\,k^4 + \dots], \tag{15}$$

sau încă (vezi (7.24)–(7.27)) :

$$(2/\pi)\ \mathrm{E}(k)\,(1-k^2)^{-1/4} = 1 + (3/64)\ k^4\ l(k), \tag{16}$$

$$(2/\pi)\ \mathrm{K}(k)\,(1-k^2)^{1/4} = 1 - (1/64)\ k^4\ l(k), \tag{17}$$

unde funcția $l(k)$ din (7.27) ar trebui modificată numai cu termeni de fapt neglijabili.

Relația (17) prezintă deosebit interes. Ținînd seama de (6) și (10), conchidem că în ambele cazuri considerate, rigiditatea geometrică la penetrație depinde de *aria* domeniului de contact, și numai în măsură neglijabilă de excentricitatea, așadar de *forma* acestui domeniu.

Această rigiditate este *minimă* pentru $k = 0$, astfel că penetrația maximă se realizează în cazul domeniului circular. (Compară cu § 5.15, pag. 243, relativ la caracterul *maximal* al rigidității geometrice la torsiune pentru $k = 0$.)

Relațiile (6), (11), (14) și (17) explică coincidența între concluziile lui L. Galin [3] (vezi și [4] , § 2.10) pentru ștanța cu bază plană eliptică, și L. Solomon [6] pentru ștanța paraboloidală, cu privire la rolul redus al excentricității în calculul penetrației.

b) Formule aproximative

Comparînd aceste considerații cu cele din § 5.15, exemplul *b*, sîntem conduși la a construi un analog al formulei lui Saint-Venant (5.15.23). Anume, înlocuind $l_1(k)$ prin $l(k)$ în (5.15.26), astfel încît să avem

$$C = (D^2/2\pi)\left[1 - \frac{1}{8}\,k^4\,l(k)\right], \tag{18}$$

și comparînd această expresie pentru C cu cea din (5.15.23) :

$$C = D^4/4\,\pi^2 I_0, \tag{19}$$

obținem ușor

$$1 - \frac{1}{8}\,k^4\,l(k) \cong 2\pi C/D^2 = D^2/2\pi\ I_0. \tag{20}$$

Pe de altă parte, rigiditatea geometrică la penetrație pentru ștanța eliptică cu bază plană este (vezi (6) și (17)):

$$C_e' \cong 4\sqrt{D/\pi}\left[1 + \frac{1}{64} k^4 l(k)\right]. \tag{21}$$

Ținînd seama de (18) și (19), putem scrie acum

$$1 + \frac{1}{64} k^4 l(k) \cong \left[1 - \frac{1}{8} k^4 l(k)\right]^{-1/8} \cong (2\pi l_0)^{1/8} D^{-1/4},$$

astfel că (21) devine

$$C_e' = 4\pi^{-1/2} (2\pi)^{1/8} D^{1/4} l_0^{1/8}, \tag{22}$$

sau, calculînd coeficientul:

$$C_e' = 2{,}84 \ D^{1/4} l_0^{1/8}, \tag{23}$$

și încă, ținînd seama de (11):

$$C_e'' = 1{,}89 \ D^{1/4} l_0^{1/8}. \tag{24}$$

Acestea sînt formule *exacte* pentru $\mathcal{D}$ eliptic, abstracție făcînd de erori neglijabile datorate operațiilor aproximative efectuate cu $l_1(k)$ și $l(k)$.

Asupra formulei (23) vom reveni în § 10. Formula (24) nu conduce la fapte noi în comparație cu (10).

§ 9. ȘTANȚE CU BAZĂ PLANĂ NEELIPTICĂ

În §§ 13 și 14 vom vedea că soluția problemei ștanței paraboloidale conduce la rezolvarea și a altor chestiuni de mare importanță practică. Dimpotrivă, soluția problemei ștanței cu bază plană eliptică își pierde toată însemnătatea de îndată ce trecem la cazul unor ștanțe cu bază plană neeliptică.

Se cunosc soluții exacte pentru ștanțe cu bază plană *infinită*: pana (domeniu infinit angulos) (L. Galin [4], § 2.11; V. Rvacev [4]), banda rectangulară (L. Galin [1], [4], § 2.12; V. Rvacev [1], [2], [5]). Dar cazul cel mai important pentru practică este desigur cel al ștanțelor cu bază *mărginită*: de exemplu, dreptunghiulară, poligonală etc.

Nu cunoaștem soluții exacte ușor maniabile pentru astfel de probleme. Menționăm aci rezultatele lui V. Korotkin [1], A. Love [2], B. Tanimoto [1] pentru ștanța cu bază plană dreptunghiulară, și cele ale lui K. Egorov [1] pentru baza în formă de coroană circulară. Semnalăm încă metodele aproximative ale lui A. Dyson [1], M. Leonov et al. [1], M. Leonov și K. Ciumak [1], și V. Mosakovskii [4], cu studiul exact al problemei ștanței cu bază plană de formă apropiată de cea circulară, mergînd pînă la aplicații la cazul bazei patrate. Vezi încă și V. Rvacev [3].

O soluție aproximativă pentru ștanța cu bază dreptunghiulară a fost propusă de I. Gorbunov-Posadov [1], [2]. Anume, soluția $p(x, y)$ a ecuației integrale (2.17) se caută sub formă polinomială; toate mărimile ce intervin în ecuație sînt dezvoltate în serii de puteri, și coeficienții necunoscuți ai polinomului $p(x,y)$ se determină atunci prin intermediul unui sistem de ecuații algebrice liniare. Dar calculele sînt extrem de laborioase, proprietățile acestui sistem (care e în general un sistem infinit) rămîn necercetate, și însuși faptul de a alege pentru $p(x, y)$ un *polinom* (așadar o funcție *mărginită* și *continuă* în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$) contrazice cele arătate în § 2, pag. 622: într-adevăr, frontiera domeniului de contact este o linie singulară pe suprafața ștanței și presiunea trebuie să tindă aci la infinit. Lipsa de rigurozitate a metodei este deci însoțită și de o incompatibilitate cu natura mecanică a soluției prezumate.

a) Singularitățile presiunii sub ștanța cu bază plană mărginită convexă neeliptică (teorema lui I. Zamfirescu)

Vom expune aci unele rezultate privitoare la proprietățile soluției ecuației (2.17).

Vom demonstra mai întîi că, *dacă domeniul de contact* $\mathscr{D}$, *de frontieră* $\mathscr{L}$, *este mărginit și convex, atunci ecuația integrală* (2.17) *nu poate avea soluție ne-negativă și continuă — așadar mărginită — în* $\mathscr{D} + \mathscr{L}$.

Să începem prin a admite că există o soluție nenegativă și continuă a problemei. Întrucît $\mathscr{D} + \mathscr{L}$ este mărginită și închisă, deci compactă, rezultă că soluția prezumată $p(\boldsymbol{x})$ a ecuației (2.17) este uniform continuă (vezi § A.1, pag. 685): pentru orice pereche de puncte $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \mathscr{D} + \mathscr{L}$, și $\varepsilon > 0$ arbitrar, avem

$$|p(\boldsymbol{x}') - p(\boldsymbol{x}'')| < \varepsilon \quad \text{dacă} \quad |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''| < \delta(\varepsilon). \tag{1}$$

Să considerăm mulțimea discurilor deschise $B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{L}$. Pentru orice punct $\boldsymbol{x}$ dintr-un astfel de disc, avem

$$p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}_0) + q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0), \quad \text{unde} \quad |q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Reuniunea acestor discuri acoperă frontiera $\mathscr{L}$, prin urmare, în virtutea teoremei lui Borel și Lebesgue (vezi § A.3, pag. 694), $\mathscr{L}$ poate fi acoperită cu un număr *finit* de discuri. De aci urmează că putem întotdeauna construi o bandă-frontieră $\mathscr{D}_\varepsilon$, astfel ca

$$p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}_0) + q(\boldsymbol{x}_0), \; |q(\boldsymbol{x})| < \varepsilon, \tag{3}$$

unde $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}_\varepsilon$, iar $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{L}$ și este punctul situat la distanța minimă de $\boldsymbol{x}$. (Se poate demonstra că un astfel de punct există.)

Notînd cu $\mathscr{L}_\varepsilon$ componenta interioară a frontierei benzii $\mathscr{D}_\varepsilon$, este evident că avem

$$\inf |\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1| = s > 0, \text{ unde } \boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{L}, \; \boldsymbol{x}_1 \in \mathscr{L}_\varepsilon, \tag{4}$$

așadar că lățimea benzii-frontieră este strict pozitivă pentru orice ε.

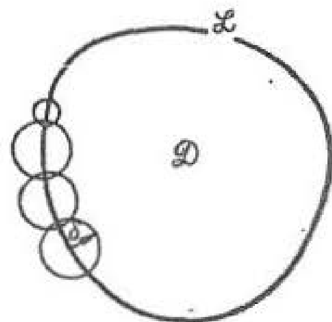


Fig. 10.9.1

Să considerăm acum o pereche de puncte $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ pentru care marginea s din (4) este atinsă. (Se poate demonstra că astfel de perechi există.)

Să alegem un sistem de coordonate avînd drept origine un astfel de punct $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{L}$, şi drept axă Ox — dreapta ce trece prin $\boldsymbol{x}_0$ şi punctul corespunzător $\boldsymbol{x}_1$. De asemenea, să considerăm punctul $\boldsymbol{a}$ $(a, 0)$ situat între $\boldsymbol{x}_0$ şi $\boldsymbol{x}_1$, şi punctele $\boldsymbol{x}'(a, b')$ şi $\boldsymbol{x}''(a, -b'')$ în care perpendiculara în $\boldsymbol{a}$ pe $\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_1$ intersectează $\mathscr{L}$ (vezi fig. 10.9.2). Întrucît $\mathscr{D}$ este convex, el este situat

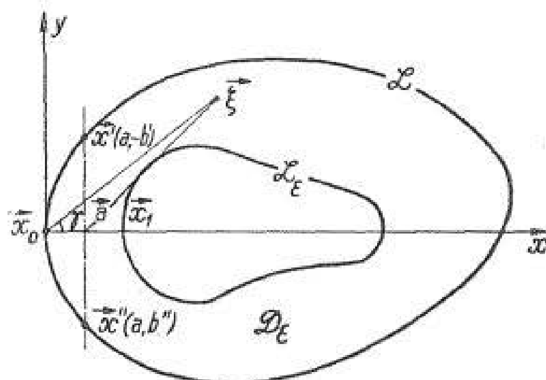


Fig. 10.9.2

în întregime de aceeaşi parte a tangentei la frontieră în $\boldsymbol{x}_0$. Pentru simplicitate, să presupunem că frontiera $\mathscr{L}$ este o curbă Liapunov. (Raţionamentul poate fi extins la orice domeniu convex.) Alegînd a suficient de mic, rezultă că putem scrie ecuaţia arcului de frontieră $\boldsymbol{x}''\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}'$ sub forma $x = f(y)$.

Ne propunem acum să evaluăm diferenţa valorilor potenţialului de simplu strat de densitate $p(\boldsymbol{x})$ în punctele $\boldsymbol{x}_0$ şi $\boldsymbol{a}$. Vom nota

$$v(\boldsymbol{x}) \equiv V(x, y, 0), \quad \rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \rho_a = \sqrt{(\xi - a)^2 + \eta^2}, \tag{5}$$

astfel că avem de evaluat diferenţa

$$v(\boldsymbol{a}) - v(\boldsymbol{x}_0) = \iint\limits_{\mathscr{D}} p(\boldsymbol{\xi})\,(\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1})\,\mathrm{d}D. \tag{6}$$

Pentru aceasta, începem prin a descompune integrala (6) în suma unei integrale pe porţiunea $\mathscr{D}_{(0)}$ (pe care $\xi < a$), şi a unei integrale pe porţiunea $\mathscr{D}_{(1)}$ (pe care $\xi > a$).

Pentru un punct arbitrar $\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{D}_{(1)}$, din triunghiul $\boldsymbol{\xi x_0 a}$ avem mai întîi $\rho_a^2 = a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos\gamma$ (unde $\gamma = \widehat{\boldsymbol{\xi x_0 a}}$), şi deci, neglijînd termenii patratici în a:

$$\rho_a = \rho_0 - a\cos\gamma. \tag{7}$$

Întrucît $\mathscr{D}$ e convex, avem $\gamma < \pi/2$, şi deci $\cos\gamma > 0$. Valoarea a poate fi aleasă oricînd suficient de mică pentru ca să avem $\rho_0 - \rho_a > 0$.

Ținînd seama de (7), integrala din (6) calculată numai pe $\mathscr{D}_{(1)}$ devine

$$\iint\limits_{\mathscr{D}_{(1)}} p(\boldsymbol{\xi})\,(\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1})\,\mathrm{d}D = \iint\limits_{\mathscr{D}_{(1)}} p(\boldsymbol{\xi})\;(a\cos\gamma/\rho_0\rho_a)\,\mathrm{d}D >$$

$$> [a/d^2(\mathscr{D})]\iint\limits_{\mathscr{D}_{(1)}} p(\boldsymbol{\xi})\;\cos\gamma\;\mathrm{d}D = aK, \tag{8}$$

unde K este o constantă *pozitivă*, dat fiind că avem $p(\boldsymbol{\xi}) \geqslant 0$ și $\cos\gamma > 0$.

Să luăm acum $\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{D}_{(0)}$. Întrucît $\mathscr{D}_{(0)} \subset \mathscr{D}_{\varepsilon}$, putem face uz de relația (3). Alegînd a suficient de mic, această relație rămîne valabilă pentru orice punct din $\mathscr{D}_{(0)}$, de unde

$$p(\xi, \eta) = p(a, \eta) + q(\xi, \eta), \qquad |q(\xi, \eta)| < \varepsilon. \tag{9}$$

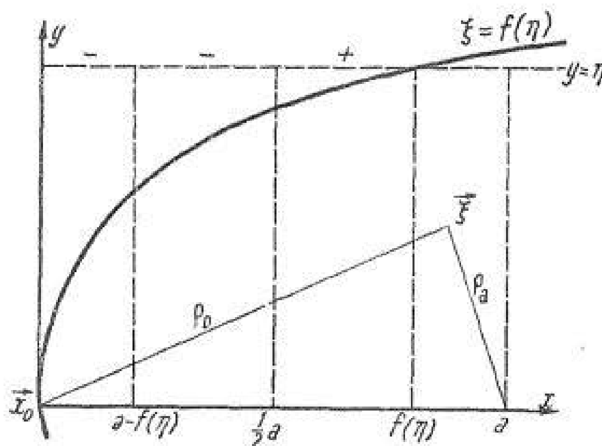


Fig. 10.9.3

Să notăm pe scurt

$$A(\boldsymbol{\xi}) \equiv A(\xi, \eta) = \rho_a^{-1} - \rho_0^{-1}. \tag{10}$$

Cu aceasta, integrala din (6) calculată acum numai pe $\mathscr{D}_{(0)}$ se va scrie

$$\iint\limits_{\mathscr{D}_{(0)}} p(\boldsymbol{\xi})\,A(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}D = \int_{-b''}^{b'}\int_{f(\eta)}^{a} p(a, \eta)\;A(\xi, \eta)\,\mathrm{d}D +$$

$$+ \int_{-b''}^{b'}\int_{f(\eta)}^{a} q(\xi, \eta)\;A(\xi, \eta)\,\mathrm{d}D. \tag{11}$$

Pentru prima integrală din această sumă obținem valoarea

$$M = \int_{-b''}^{b'}\int_{f(\eta)}^{a} p(a, \eta)\,A(\xi, \eta)\,\mathrm{d}D = \int_{-b''}^{b'} p(a, \eta)\,J(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \tag{12}$$

unde

$$J(\eta) = \int_{f(\eta)}^{a} A(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi = \int_{f(\eta)}^{a} (\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1})\,\mathrm{d}\xi. \tag{13}$$

Or, din figura 10.9.3 rezultă evident că avem $A(\xi, \eta) \gtreqless 0$ după cum $\xi \gtreqless a/2$.

De aci urmează că, dacă $f(\eta) < a/2$, atunci

$$\int_0^{f(\eta)} A(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi < 0.$$

Pe de altă parte, dacă $f(\eta) > a/2$, putem descompune intervalul $[0, f(\eta)]$ în suma intervalelor $[0, a - f(\eta)],]a - f(\eta), a/2[$ și $[a/2, f(\eta)]$. Integrala funcției $A(\xi, \eta)$ pe primul din aceste subintervale este negativă, în timp ce suma integralelor luată pe celelalte două din ele este nulă (întrucît $A(\xi, \eta)$ este evident antisimetrică în raport cu dreapta $\xi = a/2$). În consecință, dacă în (13) vom calcula integrala pe intervalul $[0, a]$, aceasta va reveni la a-i adăuga o cantitate negativă; ținînd din nou seama de proprietatea de antisimetrie a funcției $A(\xi, \eta)$, conchidem că

$$J(\eta) > \int_0^{a} (\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1})\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{14}$$

(După calcule elementare, se poate constata și că $J(\eta)$ este mărginită pentru orice η.) Întrucît $p(\xi) \geqslant 0$, din (12) urmează că $M > 0$.

Trecînd la ultima integrală din (11), se vede că din (9) obținem mai întîi

$$\begin{gathered} \left| \int_{-b''}^{b'} \int_{f(\eta)}^{a} q(\xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\,\mathrm{d}D \right| < \varepsilon(N' + N''), \\ N' = \int_0^{b'} \int_0^{a} |A(\xi, \eta)|\,\mathrm{d}D > 0, \qquad N'' = \int_0^{b''} \int_0^{a} |A(\xi, \eta)|\,\mathrm{d}D > 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Dat fiind că integrandul $|A(\xi, \eta)|$ este o funcție pozitivă și simetrică față de dreapta $\xi = a/2$, avem pe rînd (vezi fig. 10.9.3):

$$N' = \int_0^{b'} \int_0^{a} |\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1}|\,\mathrm{d}D = 2\int_0^{b'} \int_0^{a/2} (\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1})\,\mathrm{d}D =$$

$$= 2\int_0^{b'} \int_0^{a/2} [1/\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - 1/\sqrt{(a - \xi)^2 + \eta^2}]\,\mathrm{d}D =$$

$$= 2\int_0^{a/2} \{[\ln(\eta + \sqrt{\xi^2 + \eta^2})]_0^{b'} - [\ln(\eta + \sqrt{(a - \xi)^2 + \eta^2}]_0^{b'}\}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= 2\int_0^{a/2} \left[\ln (b' + \sqrt{\xi^2 + b'^2}) - \ln \xi - \ln (b' + \sqrt{(a-\xi)^2 + b'^2}) + \right.$$

$$\left. + \ln (a - \xi) \right] \mathrm{d}\xi.$$

Or, pentru $\xi \in \,]0, a/2[$ avem desigur $\xi^2 < (a - \xi)^2$, astfel că diferenţa dintre primul şi al treilea termen din integrala de mai sus este negativă. Urmează că

$$N' \leqslant -2\int_0^{a/2} \ln \xi \,\mathrm{d}\xi - 2\int_0^{a/2} \ln (a - \xi)\, \mathrm{d}(a - \xi) =$$

$$= -2\left\{ \left[\xi (\ln \xi - 1) \right]_0^{a/2} + \left[(a - \xi) (\ln (a - \xi) - 1) \right]_0^{a/2} \right\} = 2a \ln 2, \quad (16)$$

şi, desigur, aceeaşi inegalitate pentru N''. Ultima integrală din (11) este deci *în modul* mai mică decît $4\varepsilon a \ln 2$, de unde

$$\int_{-b''}^{b'} \int_{f(\eta)}^{a} q(\xi, \eta)\ A(\xi, \eta)\, \mathrm{d}D > -4\varepsilon\, a \ln 2. \quad (17)$$

Ţinînd acum seama în (6) de evaluările din (8), (12) şi (17), căpătăm

$$v(\boldsymbol{a}) - v(\boldsymbol{x}_0) > a(K - 4\varepsilon \ln 2) + M. \quad (18)$$

Prin urmare, oricare ar fi legătura dintre a şi ε, această cantitate este pozitivă, şi deci avem în definitiv

$$v(\boldsymbol{a}) > v(\boldsymbol{x}_0), \quad (19)$$

ceea ce contrazice relaţia (2.17) care cere ca penetraţia ştanţei cu bază plană, şi deci şi potenţialul $v(\boldsymbol{x})$, să fie constante în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$.

Teorema este demonstrată. Raţionamentul acesta este cu siguranţă valabil pentru ştanţe cu bază plană, solicitate central, dacă această bază e convexă, mărginită, şi are cel puţin două axe de simetrie. Dimpotrivă, el nu e aplicabil pentru ştanţe care pătrund în semispaţiu, rotindu-se totodată.

b) Alte rezultate

Mai enunţăm — fără demonstraţii, care sînt destul de dificile — alte rezultate ale lui I. Zamfirescu (vezi L. Solomon şi I. Zamfirescu [1]) asupra aceleiaşi probleme.

Mai întîi, teorema de mai sus poate fi precizată : *soluţia $p(\boldsymbol{x})$ e mărginită în orice punct din $\mathscr{D}$*. De aci, rezultă că singularităţile presiunii sînt obligatoriu situate pe $\mathscr{L}$.

Mai departe, să numim *regulat* un punct de pe $\mathscr{L}$, în vecinătatea căruia ecuația frontierei poate fi scrisă sub formă parametrică prin intermediul a două funcții de clasă C^2. Un punct de pe $\mathscr{L}$ va fi numit *α-unghiular*, dacă în vecinătatea sa frontiera este compusă din două arce de clasă C^2, care se intersectează aci sub un unghi egal cu 2α. Cu aceste definiții, se poate demonstra că:

în vecinătatea oricărui punct regulat de pe $\mathscr{L}$, *presiunea tinde la infinit pentru* $\xi \to \mathscr{L}$ *ca funcția* $1/\sqrt{d(\xi, \mathscr{L})}$, *unde* $d(\xi, \mathscr{L})$ este distanța de la ξ la $\mathscr{L}$;

în vecinătatea oricărui punct α-unghiular pe $\mathscr{L}$, *presiunea este reprezentabilă în coordonate polare sub forma*

$$p(\rho, \varphi) = c\rho^{\gamma(\alpha)-1} : \left[\left(\cos \frac{1}{2} \varphi \right) \sqrt{\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha - \mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi} \right], \tag{20}$$

unde drept axă polară s-a ales bisectoarea unghiului 2α; c este o constantă; $\gamma(\alpha)$ este o anumită funcție crescătoare.

Această formulă este analogă cu unele rezultate anterioare ale lui L. Galin [4], § 2.11, și V. Rvacev [4], valabile însă numai pentru *pana elastică* (domeniu unghiular infinit).

§10. O SOLUȚIE APROXIMATIVĂ PENTRU ANUMITE ȘTANȚE CU BAZĂ PLANĂ MĂRGINITĂ CONVEXĂ NEELIPTICĂ

Teoremele lui I. Zamfirescu arată că este imposibil să facem uz de soluții polinomiale pentru problema ștanței cu bază plană mărginită (vezi din nou pag. 655). Desigur, această problemă este considerabil mai complicată, întrucît contactul inițial într-un punct este înlocuit cu contactul pe o porțiune finită a planului-frontieră: cunoașterea configurației lui $\mathscr{D}$ ne e de prea puțin folos dacă acest domeniu nu e eliptic.

a) *Presiunea sub ștanță și funcția lui Prandtl*

Soluția exactă pentru ștanța cu bază plană eliptică a sugerat o cale pentru obținerea soluției pentru anumite ștanțe cu bază plană ne-eliptică (L. Solomon [11]). Anume, expresia (4.21) a presiunii sub ștanța cu bază plană eliptică, și expresia (5.15.8) a funcției lui Prandtl pentru torsiunea barei de secțiune eliptică, sînt legate prin relația

$$p(x, y) = \left[P/2\pi\sqrt{a^2 + b^2} \right] \left[1/\sqrt{f(x, y)} \right]. \tag{1}$$

Liniile de nivel ale funcției lui Prandtl sînt dispuse similar cu liniile de egală presiune sub ștanță (chiar neeliptică), și faptul că funcția lui Prandtl este nulă pe frontieră, corespunde faptului că presiunea tinde aci spre infinit.

Să căutăm atunci în general funcţia $p(x, y)$ sub forma

$$p(x, y) = c(x, y)/\sqrt{\mathfrak{f}(x, y)}, \tag{2}$$

unde $c(x, y)$ este o funcţie de corecţie. Soluţia (2) va fi admisibilă dacă potenţialul $V(x, y, 0)$ de densitate (2) păstrează o valoare constantă în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$. Funcţia $c(x, y)$ va trebui aleasă în aşa fel încît să fie respectată formula (9.20), iar oscilaţia funcţiei $V(x, y, 0)$ să rezulte minimală.

În cele ce urmează, vom expune rezultatele obţinute pentru două domenii poligonale convexe regulate: triunghi echilateral („t") şi pătrat („p").

Integralele singulare ce apar în cele ce urmează au fost calculate cu maşina electronică de calcul CIFA-101. Viteza mică de lucru a maşinii explică numărul redus de puncte pentru care s-au efectuat calculele, numărul mic de termeni reţinut în seria (14) etc.

b) Cazul triunghiului echilateral

Să considerăm triunghiul din figura 5.15.1, avînd lungimea laturii $2\sqrt{3}a$, înălţimea $3a$, şi ale cărui laturi au ecuaţiile (5.15.34). Mai amintim că

$$D_t = 3\sqrt{3}a^2, \; I_{0t} = 3\sqrt{3}a^4 = 3^{-3/2} D_t^2. \tag{3}$$

Funcţia lui Prandtl pentru acest domeniu are forma (5.15.35):

$$\mathfrak{f}_t(x, y) = (1/6a)\,(3x^2y - y^3) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{2}{3}a^2. \tag{4}$$

Dacă în soluţia prezumată (2) am alege $c(x,y) = \text{const.}$, ca în (1), am obţine un potenţial care tinde la infinit în lungul înălţimilor triunghiului, de la laturi spre vîrfuri. Presiunea $c/\sqrt{\mathfrak{f}_t(x,y)}$ tinde deci prea repede spre infinit la vîrfuri (puncte de concurenţă a *două* drepte pe care $\mathfrak{f}_t(x,y) = 0$). Notînd cu d_j distanţele de la un punct oarecare din $\mathscr{D}_t$ la vîrful notat (j), este evident că produsul $(d_1d_2d_3)^m$ — unde m este o constantă, întrucît poligonul este regulat — poate juca rolul unui factor de corecţie. Aceasta a condus la a se alege funcţia

$$p_t(x, y) = a_t\, D_t^{1/8}\, (d_1d_2d_3)^{1/4} \,/\sqrt{\mathfrak{f}_t(x, y)}, \tag{5}$$

unde coeficientul a_t se măsoară în kgf/cm², iar factorul constant $D_t^{1/8}$ a fost introdus pentru ca expresia de natură pur geometrică care înmulţeşte pe a_t să fie nul-dimensională.

Condiţia de echilibru (2.16) duce la relaţia

$$P = a_t\, J_t = a_t\, D_t^{1/8}\, j_t, \tag{6}$$

unde pentru j_t s-a obţinut (luînd $a = 1$) valoarea

$$j_t = \iint\limits_{\mathscr{D}_t} [(d_1 d_2 d_3)^{1/4} /\sqrt{\mathfrak{f}_t(x, y)}]\, \mathrm{d}D = 23{,}71. \tag{7}$$

Cu aceasta, (5) devine

$$p_t(x, y) = (P/j_t)\,(d_1 d_2 d_3)^{1/4} / \sqrt{f_t(x, y)}. \tag{8}$$

Introducînd această expresie în ecuaţia (2.17), căpătăm

$$\delta = \theta\,(P/j_t)\, w_t\,(x, y), \tag{9}$$

unde cantitatea

$$w_t(x, y) = \iint\limits_{\mathscr{D}_t} \{ (d_1\, d_2\, d_3)^{1/4} / \sqrt{f_t(\xi,\eta)[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} \}\, dD \tag{10}$$

poate fi calculată în diferite puncte ale triunghiului. În notaţiile din (2.13), pentru potenţialul de simplu strat de densitate $p_t(x, y)$ avem evident pe $\mathscr{D}_t$

$$V_t\,(x, y, 0) = (P\,/\,j_t)\, w_t\,(x, y). \tag{11}$$

Soluţia (8) este acceptabilă, dacă mărimea $w_t(x,y)$ păstrează o valoare constantă în $\mathscr{D}_t$. Calculul a dat următoarele rezultate :

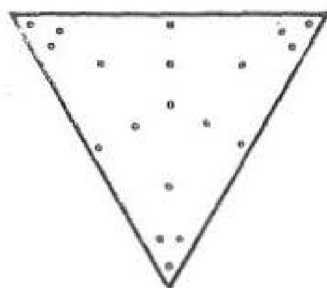


Fig. 10.10.1

x	y	$w_t(x,y)$
0	0,95	27,19
0	0,50	27,11
0	0,00	27,05
0	−1,00	27,19
0	−1,90	27,03
1,3	0,85	27,27

În aceste 19 puncte, alese în aşa fel încît să acopere oarecum uniform triunghiul, oscilaţia funcţiei $w_t(x, y)$ este mai mică decît 1 % din valoarea ei.

Pentru a determina presiunea în centrul de greutate al triunghiului, remarcăm că presiunea medie este aci $p_m = P/3\sqrt{3}$, în timp ce din (4) şi (8) obţinem presiunea minimă $p_t(0,0) = 2^{1/4}\sqrt{3}\,(P/j_t)$ astfel că

$$p_{\min} = p_t(0,0) = 0{,}45\ p_m. \tag{12}$$

c) *Cazul pătratului*

Să considerăm un pătrat de latură $2a$, pentru care

$$D_p = 4a^2, \quad I_{0p} = \frac{8}{3}\,a^4 = \frac{1}{6}\,D_p^2. \tag{13}$$

Funcţia lui Prandtl corespunzătoare se obţine din (5.15.69) pentru $b = a$, $\lambda_n = (2n+1)\pi/2a$:

$$f_p(x, y) = \frac{32\ a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \right] \cos\,\lambda_n y. \tag{14}$$

Ca şi în cazul triunghiului, este necesară introducerea unui factor de corecţie de forma $(d_1d_2d_3d_4)^m$. (Rolul acestui factor trebuie să scadă pe măsură ce numărul laturilor poligonului regulat creşte.) Vom lua

$$p_p(x, y) = a_p \, D_p^{1/10} \, (d_1d_2d_3d_4)^{1/5} \, / \, \sqrt{f_p(x, y)}. \tag{15}$$

Condiţia de echilibru (2.16) duce în acest caz la relaţia

$$P = a_p J_p = a_p D_p^{1/10} \, j_p, \tag{16}$$

unde pentru j_p s-a obţinut (în cazul $a=1$) valoarea

$$j_p = \iint\limits_{\mathscr{D}_p} [(d_1d_2d_3d_4)^{1/5} \, / \, \sqrt{f_p(x, y)}] \, dD = 14{,}13. \tag{17}$$

Cu aceasta, (15) devine

$$p_p(x, y) = (P/j_p) \, (d_1d_2d_3d_4)^{1/5} \, / \, \sqrt{f_p(x, y)}. \tag{18}$$

Introducînd (18) în (2.17), căpătăm relaţia analogă cu (9):

$$\delta = \theta \, (P/j_p) \, w_p \, (x, y), \tag{19}$$

unde integrala

$$w_p(x, y) = \iint\limits_{\mathscr{D}_p} \{(d_1d_2d_3d_4)^{1/5} \, / \, \sqrt{f_p(\xi, \eta) \; [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}\} \, dD \tag{20}$$

poate fi calculată. În notaţiile din (2.13), avem desigur

$$V_p(x, y, 0) = (P/j_p) \, w_p(x, y). \tag{21}$$

Pentru funcţia $w_p(x, y)$ s-au obţinut valorile din tabela de mai jos

x	y	$w_p(x,y)$
0,0	0,0	19,12
0,0	0,5	18,69
0,0	0,9	19,30
0,5	0,5	18,69
0,9	0,9	19,87

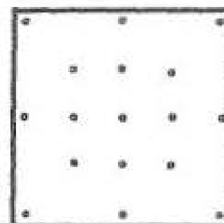


Fig. 10. 10.2

În aceste 17 puncte, alese astfel încît să acopere oarecum uniform pătratul, oscilaţia funcţiei $w_p(x, y)$ este de cca. 6 % din însăşi valoarea ei. Rezultatul — mai puţin satisfăcător — este influenţat de dificultăţile de calcul efectiv: în timp ce $f_t(x, y)$ este un polinom, $f_p(x, y)$ a trebuit să fie înlocuită cu suma primilor 5 termeni ai seriei (14), ceea ce duce la abateri sensibile pentru expresia $1/\sqrt{f_p(x, y)}$ în vecinătatea frontierei; în afară de aceasta, însăşi tehnica folosită pentru a calcula integralele $w_p(x, y)$ — mai puţin simple decît $w_t(x, y)$ — a trebuit să fie mai puţin precisă.

Presiunea medie şi presiunea minimă sînt aci

$$p_m = \frac{1}{4} P, \quad p_p(0,0) = \left(4^{1/5} / \sqrt{0,589}\right)(P/j_p),$$

de unde urmează

$$p_{min} = p_p(0,0) = 0,48\ p_m. \tag{22}$$

Este instructivă compararea formulelor (12), (22) şi (4.23) : pentru un număr tot mai mare de laturi, rolul presiunilor infinite din colţuri e tot mai puţin important.

d) *Rigiditatea geometrică la penetraţie*

Ar fi de reală utilitate să dispunem şi în cazul ştanţei cu bază plană ne-eliptică de o cantitate de acelaşi tip cu rigiditatea geometrică la penetraţie din § 8. În acest scop, să scriem (2.17) sub forma

$$\delta = [(1 - \nu)/\mu]\ [V(x, y, 0)/2\pi], \tag{23}$$

unde $V(x, y, 0)$ este o constantă. Dacă aceasta din urmă depinde numai de domeniul $\mathscr{D}$ şi de sarcina P, şi dacă ea e proporţională cu P (cum era cazul în (4.20)), se poate obţine din (23) o relaţie de acelaşi tip cu (8.5), notînd pur şi simplu

$$C_e = 2\pi P / V(x, y, 0). \tag{24}$$

Această mărime se va numi *rigiditate geometrică la penetraţie* pentru o ştanţă cu bază plană mărginită *oarecare*. Dacă C_e este cunoscută, deplasarea sub ştanţă (în absenţa rotaţiei) rezultă imediat. (Pentru evaluarea deplasărilor sub ştanţe cu bază plană neeliptică, vezi L. Galin [3], [4], § 2.10 ; V. Mossakovski [1], [2] ; N. Borodacev [3], care face uz de rezultatele lui G. Polya şi G. Szegö [1].)

În ce priveşte exemplele de mai sus, putem face uz în cazul triunghiului de formulele (24), (11), (7) şi de valoarea medie $w_t(x, y) = 27,15$ ce rezultă din tabloul de la pag. 662. Ca urmare, pentru triunghiul echilateral de arie $D_t = 3\sqrt{3}$ cm², obţinem

$$C_{et} = 2\pi\ (j_t/w_t) \cong 5,49 \text{ cm}. \tag{25}$$

În acelaşi mod, făcînd uz de formulele (24), (21), (17) şi de valoarea medie $w_p(x, y) = 19,30$ ce rezultă din tabloul de la pag. 663, obţinem pentru pătratul de arie $D_p = 4$ cm²,

$$C_{ep} = 2\pi\ (j_p/w_p) = 4,60 \text{ cm}. \tag{26}$$

Să amintim pe de altă parte formule de tip Saint Venant (8.23) pentru rigiditatea geometrică la penetraţie pentru o ştanţă cu bază plană eliptică, precum şi faptul că această cantitate depinde numai într-o mică măsură de forma elipsei de contact. Aceasta sugerează încercarea de a utiliza (8.23) ca o formulă *aproximativă* pentru a determina pe C_e pentru ştanţe

cu bază plană *neeliptică* mărginită. Cu titlu de verificare, introducînd (3) şi (13) în (8.23) (nici în cazul formulei (5.15.23) nu se poate face mai mult), obţinem

$$C_{ct} = 2{,}84 \cdot 3^{-3/16}\, D_t = 2{,}31\, D_t, \quad C_{cp} = 2{,}84 \cdot 6^{-1/8}\, D_p = 2{,}27\, D_p, \tag{27}$$

şi prin urmare, pentru triunghiul şi pătratul de mai sus (ariile lor sînt diferite!),

$$C_{ct} = 5{,}27 \text{ cm}, \qquad C_{cp} = 4{,}54 \text{ cm}. \tag{28}$$

Valorile din (28) — calculate cu ajutorul unei formule care asimilează domeniul de contact cu o elipsă de aceeaşi arie şi acelaşi moment polar central de inerţie — diferă numai cu 4 %, respectiv cu 1 % de valorile (25), (26), obţinute pe cu totul altă cale, cu ajutorul soluţiei aproximative (2).

Rigiditatea geometrică la penetraţie calculată din (8.23) este *mai mică* decît cea din (25), respectiv (26). Ca şi în problema torsiunii (vezi § 5.15, pag. 260), aceasta se explică prin prezenţa vîrfurilor : în vecinătatea lor, presiunile cresc mai repede decît în vecinătatea punctelor regulate ale frontierei. A utiliza (8.23), înseamnă a neglija acest fapt, ceea ce dă pentru sarcina totală P (şi deci şi pentru C_c) valori aproximate prin lipsă.

Toate aceste raţionamente au numai un caracter aproximativ. Mai mult, este probabil că ele necesită corecţii importante, sau devin chiar inutilizabile pentru ştanţe cu bază plană mărginită ne-convexă, dublu conexă etc. Cu toate acestea, posibilitatea de-a obţine cu uşurinţă (pe cale teoretică sau chiar experimentală) funcţia lui Prandtl, şi de aci şi presiunea sub ştanţă, precum şi posibilitatea de a calcula penetraţia cu ajutorul unor formule atît de simple ca (23), (24) şi (8.23), nu poate fi neglijată [5]).

§ 11. DESPRE TENSIUNILE ÎN SEMISPAŢIU SUB ŞTANŢĂ PENTRU UN DOMENIU DE CONTACT ELIPTIC

Este de cea mai mare însemnătate să se determine efectiv starea elastică a semi-spaţiului solicitat, acum cînd $\mathscr{D}$ şi $p(\xi, \eta)$ sînt cunoscute. Problema lui Neumann la care se ajunge, a fost studiată în §§ 9.4 şi 9.5. Formulele lui Hertz (9.4.35) furnizează componentele deplasării, din care decurg cele ale tensiunii. Principala problemă *de calcul* constă deci în determinarea *efectivă* a potenţialilor Ω, ω.

În practică, este necesar să se cunoască deplasările şi tensiunile pe planul-frontieră (în $\mathscr{D}$ şi în exteriorul său), precum şi în lungul axei Oz (mai ales pentru ştanţa paraboloidală). Vom da numai unele indicaţii asupra rezultatelor, întrucît calculele corespunzătoare sînt prea fastidioase pentru a-şi găsi locul aci.

---

[5]) Pentru verificări experimentale recente, vezi R. Takano [1]; T. Tanii et al. [1].

a) Ştanţa cu bază plană eliptică

În acest caz, tensiunile maxime apar pe frontiera domeniului de contact, unde $p(\xi, \eta)$ devine infinită. Deplasările pot fi calculate sub o formă ce cuprinde funcţii elementare, precum şi integrale eliptice ne-complete de prima speţă. Dimpotrivă, componentele tensiunii pot fi explicitate numai prin intermediul unor funcţii elementare. (Vezi A. Lurie [4], § 5.9.) Pentru $k = 0$, componentele deplasării se exprimă şi ele numai prin funcţii elementare.

Nu cunoaştem rezultate corespunzătoare cazului domeniului de contact plan mărginit neeliptic.

b) Ştanţa paraboloidală

Componentele deplasării se exprimă prin funcţii elementare, şi integrale eliptice necomplete de prima şi a doua speţă. (Vezi A. Lurie [4], § 5.10). Componentele tensiunii (obţinute pentru prima oară de N. Beliaev [3], „Tensiunile locale...", § 9) pot fi deduse de aci prin operaţii de derivare.

Studiul repartiţiei tensiunilor pe $\mathscr{D}$ duce la concluzia că punctele cele mai periclitate sînt cele situate în centrul elipsei de contact (dacă $k > 0{,}89$), respectiv la capetele axei mari (dacă $k < 0{,}89$) (ibid., §§ 12–14).

Axa Oz este axă principală. Componentele normale ale tensiunii tind foarte repede la zero pentru $z \to \infty$. În vecinătatea imediată a domeniului de contact, ele sînt toate tensiuni de compresiune, şi de aceea (vezi §4.3, pag. 134 şi § 9.4, pag. 600) ele pot atinge valori foarte mari, fără a se produce fisuri sau trecere în stare de deformaţie plastică.

Tensiunile tangenţiale maximale descresc mai lent şi îşi atinge maximul *nu* pe $\mathscr{D}$, ci *la o anumită adîncime* z situată între 0,5 a şi 0,75 a. Tensiunea tangenţială maximală are valori cuprinse între 0,304 a_1 şi 0,325 a_1. Criteriul de rezistenţă corespunzător are deci forma

$$0{,}63\ a_1 \leqslant \sigma_s. \qquad (1)$$

Anterior lui N. Beliaev, rezultate similare pentru $k = 0$ au fost obţinute de către A. Dinnik [1]. În acest caz, tensiunile se exprimă numai prin funcţii elementare. Relaţia (1) rămîne valabilă.

Reproducem aci graficul tensiunilor pentru cazul $k = 0$ (vezi A. Dinnik [1], cap. 2, fig. 3), şi un grafic calculat cu ajutorul formulelor date de A. Lurie [4], § 5.10, pentru cazul $k = 0{,}9$; $\nu = 0{,}3$.

Pe ambele grafice figurează repartiţia tensiunilor reduse (împărţite la $a_1 = \sigma_{3|max}$) în lungul axei Oz, ca funcţii de adîncimea redusă z/a. (Această repartiţie îşi păstrează dacă nu valorile, cel puţin caracterul, chiar dacă presiunile reale pe $\mathscr{D}$ sînt înlocuite cu $p =$ const. Aceasta se vede uşor dacă se compară graficele de faţă cu cele date de H. Deresiewicz [5].) Este

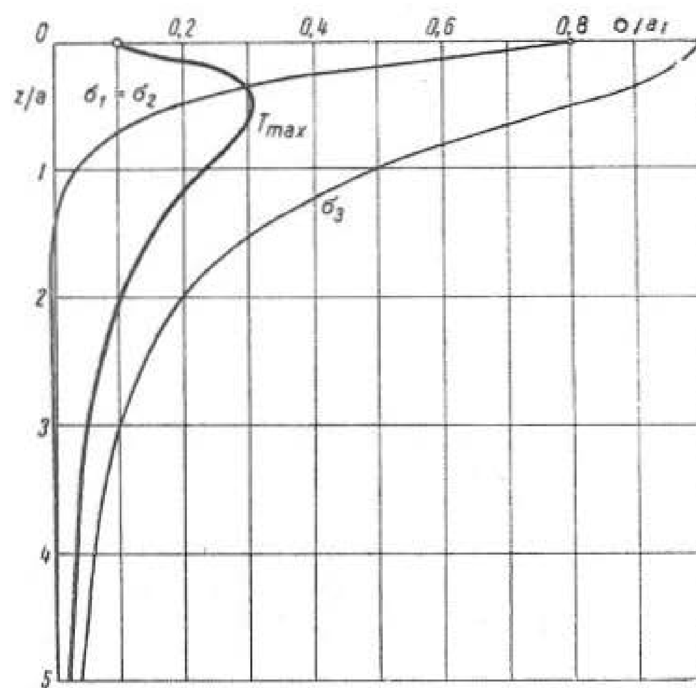


Fig. 10.11.1

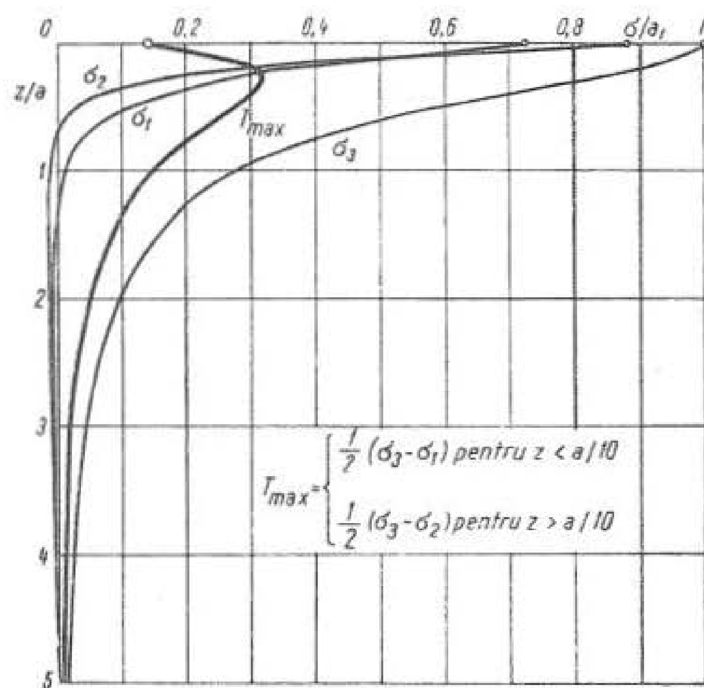


Fig. 10.11.2

vizibil că valorile σ_3 — şi chiar şi σ_1 şi σ_2 — pot fi considerabile : singura cantitate ce trebuie păstrată între limite convenabile, este T_{max}.

Dacă 0,63 a_1 este mai mare decît σ_s pentru materialul considerat, vîrfurile de tensiune din graficele de mai sus sînt inevitabil retezate. În fapt, materialul nu rezistă la astfel de sarcini în regim elastic, ci trece în starea de deformaţie plastică. Prin aceasta, tensiunile sînt redistribuite în aşa fel, încît straturi mai profunde ale materialului rezultă a fi mai puternic solicitate decît se vede din aceste grafice. (Vezi şi § 13, exemplul **c**.)

§ 12. REDUCEREA PROBLEMEI CONTACTULUI LA PROBLEMA ŞTANŢEI PARABOLOIDALE

a) Corpuri în contact

Să presupunem acum că *două* corpuri elastice, mărginite de suprafeţele $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$, vin în contact într-un punct O. Să presupunem că acest punct este punct eliptic pentru ambele suprafeţe, şi că normala şi planul tangent la $\mathscr{S}_1$ şi $\mathscr{S}_2$ există în O. Normalele sînt deci opuse, iar planele tangente coincid.

Vom raporta fiecare din cele două corpuri la cîte un sistem de coordonate propriu : $Ox_1y_1z_1$ şi $Ox_2y_2z_2$. Axele z vor fi normalele *interioare* în O, iar axele x şi y vor fi tangentele la liniile de curbură pe fiecare din suprafeţe.

Dezvoltînd în serii Taylor funcţiile $z_1(x_1, y_1)$ şi $z_2(x_2, y_2)$ care caracterizează cele două suprafeţe în vecinătatea lui O, şi neglijînd termenii de ordin superior, obţinem în primă aproximaţie

$$z_1(x_1, y_1) = \frac{1}{2}\,[\partial^2 z_1(0, 0)/\,\partial x_1^2]\,x_1^2 + \frac{1}{2}\,[\partial^2 z_1(0, 0)/\partial y_1^2]\,y_1^2, \tag{1}$$

şi o expresie similară pentru funcţia $z_2(x_2, y_2)$.

Să amintim încă relaţia care defineşte curbura $1/\rho$ a curbei obţinute prin secţionarea unei suprafeţe, cu un plan ce formează unghiul λ cu normala la suprafaţă în punctul considerat. Anume, considerînd un sistem de coordonate curbilinii ortogonale u, v pe suprafaţă (a nu se confunda cu componentele deplasării !) şi amintind notaţiile lui Monge

$$p = \partial z/\partial u, \quad q = \partial z/\partial v, \quad r = \partial^2 z/\partial u^2, \quad s = \partial^2 z/\partial u \partial v, \quad t = \partial^2 z/\partial v^2, \tag{2}$$

obţinem (vezi G. Vrănceanu [1], vol. 2, § 15.1, sau V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 131 şi 132) :

$$(1 + p^2 + q^2)\,\frac{\cos\lambda}{\rho} = \frac{r\,du^2 + 2s\,du\,dv + t\,dv^2}{(1 + p^2)\,du^2 + 2pq\,du\,dv + (1 + q^2)\,dv^2}. \tag{3}$$

Considerînd cazul unei secțiuni normale ($\lambda = 0$, $\cos \lambda = 1$), ținînd seama că în origine avem $p = q = 0$, și luînd pe rînd $du = 0$ și $dv = 0$, obținem din (3)

$$1/\rho' = r, \quad 1/\rho'' = t, \tag{4}$$

unde am notat cu ρ' și ρ'' razele de curbură principale în origine.

Să presupunem că domeniul cercetat în jurul originii este suficient de restrîns pentru ca suprafața $\mathscr{S}$ să rămînă aci destul de apropiată pe planul ei tangent. În acest caz, putem lua drept coordonate carteziene în planul tangent, proiecțiile liniilor u = const. și v = const. de pe $\mathscr{S}$. Notînd cu x, y liniile de coordonate astfel obținute, deducem din (2) și (4) relațiile (valabile numai în vecinătatea originii!)

$$1/\rho' = \partial^2 z/\partial x^2, \qquad 1/\rho'' = \partial^2 z/\partial y^2. \tag{5}$$

În primă aproximație, ecuația (1) a suprafeței $\mathscr{S}_1$ se poate scrie

$$z_1 = \frac{1}{2}\, x_1^2/\rho_1' + \frac{1}{2}\, y_1^2/\rho_1'', \tag{6}$$

unde indicele (1) arată că este vorba de elemente relative la $\mathscr{S}_1$, iar indicii (′) și (″) indică direcțiile principale corespunzătoare.

Pentru suprafața $\mathscr{S}_2$ avem în mod asemănător

$$z_2 = \frac{1}{2}\, x_2^2/\rho_2' + \frac{1}{2}\, y_2^2/\rho_2''. \tag{7}$$

De aci se vede că forma (5.1) a ecuației suprafeței ștanței paraboloidale este valabilă ca o primă aproximație pentru ștanța de *orice* configurație, în vecinătatea oricărui punct eliptic al frontierei sale (vezi G. Vrânceanu [1], vol. 1, § 15).

Întrucît originea este punct eliptic pe ambele suprafețe, razele de curbură principale ale fiecăreia din ele sînt de același semn:

$$\rho_1'\rho_1'' > 0, \quad \rho_2'\rho_2'' > 0. \tag{8}$$

Sînt posibile două variante ale contactului. Dacă toate mărimile ρ sînt pozitive, el se numește *contact exterior* (vezi fig. 10.12.1); dacă două din ele sînt pozitive și două negative, el se numește *contact interior* (vezi fig. 10.12.2); cazul în care toate mărimile ρ sînt negative nu are sens.

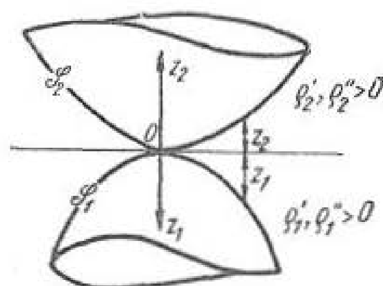


Fig. 10.12.1

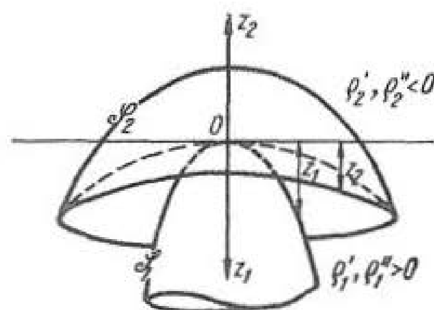


Fig. 10.12.2

În cazul contactului exterior avem $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ în vecinătatea originii. Dimpotrivă, în cel al contactului interior avem $z_1 > 0$, $z_2 < 0$, sau $z_1 < 0$, $z_2 > 0$.

Analogia dintre expresiile (6), (7) și (5.1) sugerează posibilitatea de a se folosi în problema contactului soluția deja cunoscută a problemei ştanţei paraboloidale. Anume, în § 5 distanța pe verticală de la un punct al suprafeței ştanţei la *acel* punct de pe planul-frontieră al semispațiului cu care el coincide după deformație, era notată cu z. În problema contactului, un rol analog va fi artibuit distanței pe verticală dintre *acele* două puncte de pe $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}_2$ care coincid după deformație. Neglijînd — ca și în problema ştanţei — deplasările tangențiale pe $\mathscr{D}$, și amintind că axele Oz_1 și Oz_2 sînt opuse, urmează că această distanță — pe care o vom nota cu z — este egală cu

$$z = z_1 + z_2 = \frac{1}{2} x_1^2/\rho_1' + \frac{1}{2} y_1^2/\rho_1'' + \frac{1}{2} x_2^2/\rho_2' + \frac{1}{2} y_2^2/\rho_2''. \tag{9}$$

Pentru a face uz de rezultatele din problema ştanţei, trebuie mai întîi să găsim în planul tangent în O un nou sistem de axe, în care expresia distanței z să se reducă la o *sumă de pătrate*.

b) Schimbarea de coordonate

Să notăm cu 2α unghiul $\widehat{x_1 O x_2}$, care caracterizează poziția axelor Ox_2y_2 față de axele Ox_1y_1. Acest unghi este desigur cunoscut, întrucît forma și poziția reciprocă a corpurilor de frontiere $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}_2$ sînt cunoscute.

Să introducem un nou sistem de axe Oxy, a căror poziție este definită de unghiurile $\alpha_1 = \widehat{x_1 O x}$ și $\alpha_2 = \widehat{x_2 O x}$, legate desigur prin relația

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha. \tag{10}$$

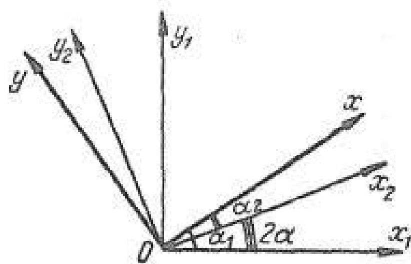


Fig. 10.12.3

Schimbarea de coordonate se face după formulele (valabile pentru $j = 1,2$)

$$\begin{aligned} x_j &= x \cos \alpha_j - y \sin \alpha_j, \\ y_j &= x \sin \alpha_j + y \cos \alpha_j. \end{aligned} \tag{11}$$

Introducînd (11) în (9), obținem expresia

$$z = \frac{1}{2} x^2/\rho' + \frac{1}{2} y^2/\rho'' + (G_1 \sin 2\alpha_1 + G_2 \sin 2\alpha_2)\, xy, \tag{12}$$

unde am folosit notațiile

$$\begin{aligned} 1/\rho' &= (\cos^2 \alpha_1)/\rho_1' + (\sin^2\alpha_1)/\rho_1'' + (\cos^2\alpha_2)/\rho_2' + (\sin^2\alpha_2)/\rho_2'', \\ 1/\rho'' &= (\sin^2 \alpha_1)/\rho_1' + (\cos^2\alpha_1)/\rho_1'' + (\sin^2\alpha_2)/\rho_2' + (\cos^2\alpha_2)/\rho_2'', \end{aligned} \tag{13}$$

și de cantitățile (cunoscute)

$$2G_1 = 1/\rho_1'' - 1/\rho_1', \quad 2G_2 = 1/\rho_2'' - 1/\rho_2'. \tag{14}$$

Să considerăm și curburile medii (cunoscute) în origine

$$2H_1 = 1/\rho_1' + 1/\rho_1'', \quad 2H_2 = 1/\rho_2' + 1/\rho_2''. \tag{15}$$

Adunînd termen cu termen relațiile (13), obținem evident

$$1/\rho' + 1/\rho'' = 2(H_1 + H_2), \tag{16}$$

astfel că *suma* cantităților definite în (13) este cunoscută.

Pentru *diferența* lor, avem din (13) și (14):

$$1/\rho'' - 1/\rho' = 2G_1 \cos 2\alpha_1 + 2G_2 \cos 2\alpha_2. \tag{17}$$

Ne rămîne să alegem α_1, α_2 în așa fel încît (12) să se reducă la

$$z = \frac{1}{2} x^2/\rho' + \frac{1}{2} y^2/\rho'', \tag{18}$$

ceea ce se realizează impunînd condiția

$$G_1 \sin 2\alpha_1 + G_2 \sin 2\alpha_2 = 0. \tag{19}$$

Întrucît, pentru a satisface relația (10), este suficient să luăm

$$\alpha_1 = \alpha + \beta, \quad \alpha_2 = -\alpha + \beta, \tag{20}$$

unde β este necunoscut, relația (19) devine

$$(G_1 + G_2) \sin 2\beta \cos 2\alpha + (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \cos 2\beta = 0. \tag{21}$$

Această relație permite determinarea unghiului β, așadar a unghiurilor α_1, α_2, și deci și a coeficienților ρ', ρ'' din (18). Pentru a obține aceste din urmă valori sub o formă cît mai simplă, să revenim la relațiile (16) și (17), în care să ținem seama de (20). Căpătăm astfel

$$\begin{gathered} 1/\rho' + 1/\rho'' = 2(H_1 + H_2), \\ 1/\rho'' - 1/\rho' = 2(G_1 + G_2) \cos 2\alpha \cos 2\beta - 2(G_1 - G_2) \sin 2\alpha \sin 2\beta, \end{gathered} \tag{22}$$

de unde urmează

$$\begin{aligned} 1/\rho' &= H_1 + H_2 - (G_1 + G_2) \cos 2\alpha \cos 2\beta + (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \sin 2\beta, \\ 1/\rho'' &= H_1 + H_2 + (G_1 + G_2) \cos 2\alpha \cos 2\beta - (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \sin 2\beta. \end{aligned} \tag{23}$$

Privind relația (21) și prima din relațiile (23) ca un sistem de ecuații pentru necunoscutele $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, putem scrie

$$\begin{aligned} (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \sin 2\beta - (G_1 + G_2) \cos 2\alpha \cos 2\beta &= 1/\rho' - (H_1 + H_2), \\ (G_1 + G_2) \cos 2\alpha \sin 2\beta + (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \cos 2\beta &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Determinantul principal al acestui sistem este cantitatea cunoscută şi pozitivă

$$\Delta = G_1^2 + G_2^2 + 2G_1G_2 \cos 4\alpha, \tag{25}$$

şi soluţia sistemului (24) se obţine sub forma

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= + [(1/\rho' - H_1 - H_2)(G_1 - G_2) \sin 2\alpha] : \Delta, \\ \cos 2\beta &= - [(1/\rho' - H_1 - H_2)(G_1 + G_2) \cos 2\alpha] : \Delta. \end{aligned} \tag{26}$$

Ridicînd la pătrat şi adunînd, regăsim evident valoarea Δ, ceea ce conduce în definitiv la egalitatea

$$1/\rho' - H_1 - H_2 = \pm\sqrt{\Delta}. \tag{27}$$

Relaţiile (16) şi (27) dau acum valorile

$$1/\rho' = H_1 + H_2 - \sqrt{\Delta}, \quad 1/\rho'' = H_1 + H_2 + \sqrt{\Delta}, \tag{28}$$

unde am ales semnele în aşa fel încît $\rho' \gg \rho'' > 0$, ceea ce corespunde unei anumite alegeri a axelor Oxy.

Expresia (18) este acum determinată.

Introducînd (28) în (26), deducem

$$\sin 2\beta = - [(G_1 - G_2) \sin 2\alpha] : \sqrt{\Delta}, \qquad \cos 2\beta = [(G_1 + G_2) \cos 2\alpha] : \sqrt{\Delta}, \tag{29}$$

astfel că unghiul β, şi deci şi unghiurile α_1, α_2 sînt de asemenea cunoscute.

Faptul că trebuie întotdeauna să avem $\rho' > 0$, $\rho'' > 0$ decurge din aceea că z este pozitiv. Aceasta nu rezultă din raţionamentul care a condus la (28), întrucît nu am făcut uz aci de nici un fel de condiţii restrictive relative la valorile absolute şi semnele razelor de curbură. Dar simpla examinare a figurii 10.12.2 arată că, în cazul contactului interior, aceste valori trebuie supuse anumitor relaţii pentru ca cele două corpuri să rămînă *exterioare unul celuilalt*. După cum urmează din (28), pentru aceasta este necesar şi suficient să avem

$$-(H_1 + H_2) < \sqrt{\Delta} < H_1 + H_2. \tag{30}$$

Metoda de mai sus — mai simplă ca cea a lui Hertz — a fost propusă de A. Lurie [4], § 5.11. O soluţie grafică a aceleiaşi probleme aparţine lui D. Gazis [1].

OBSERVAŢIE. Se poate întîmpla ca unele din cele patru mărimi ρ să tindă la infinit — aşadar ca punctul de contact să fie un punct *parabolic*. Raţionamentele de mai sus rămîn valabile, şi toate aceste formule vor putea fi folosite chiar dacă unul (sau ambele) din corpuri are formă cilindrică, conică etc. în vecinătatea punctului de contact. La limită, ele îşi păstrează sensul cînd unul din corpuri se reduce la semispaţiu.

c) Cazuri particulare

1° Să presupunem că cele două sisteme de axe coincid : $Ox_1y_1 = Ox_2y_2$ (de ex. : contactul a două suprafeţe de rotaţie, cu axele paralele ; liniile de curbură sînt desigur curbele meridiane, şi paralelele pe cele două suprafeţe). Unghiul 2α din figura 10.12.3 este nul, iar (25) ia forma

$$\Delta = (G_1 + G_2)^2. \tag{31}$$

Dacă $G_1 + G_2 > 0$, atunci $\sqrt{\Delta} = G_1 + G_2$, iar din (28) căpătăm

$$1/\rho' = H_1 + H_2 - (G_1 + G_2)\,, \quad 1/\rho'' = H_1 + H_2 + (G_1 + G_2),$$

de unde, ţinînd seama de (14) şi (15) :

$$1/\rho' = 1/\rho_1' + 1/\rho_2', \quad 1/\rho'' = 1/\rho_1'' + 1/\rho_2''\,. \tag{32}$$

Pentru determinarea unghiurilor α_1, α_2 avem mai întîi din (29)

$$\sin 2\beta = 0, \qquad \cos 2\beta = (G_1 + G_2) : \sqrt{\Delta} = 1\,, \tag{33}$$

astfel că axele Oxy rezultă a coincide cu cele iniţiale, deoarece

$$\beta = \alpha_1 = \alpha_2 = 0\,. \tag{34}$$

Dacă însă $G_1 + G_2 < 0$, atunci avem $\sqrt{\Delta} = -(G_1 + G_2)$, şi din (28) urmează :

$$1/\rho' = H_1 + H_2 + (G_1 + G_2), \quad 1/\rho'' = H_1 + H_2 - (G_1 + G_2),$$

de unde, ţinînd seama de (14) şi (15) :

$$1/\rho' = 1/\rho_1'' + 1/\rho_2''\,, \quad 1/\rho'' = 1/\rho_1' + 1/\rho_2'. \tag{35}$$

Pentru a găsi unghiurile α_1, α_2, avem mai întîi din (29) :

$$\sin 2\beta = 0, \quad \cos 2\beta = (G_1 + G_2) : \sqrt{\Delta} = -1\,, \tag{36}$$

astfel că, utilizînd şi (20) :

$$\beta = \alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2, \tag{37}$$

ceea ce arată că axele Oxy se capătă prin rotirea cu 90° a axelor iniţiale.

Condiţiile $G_1 + G_2 \gtreqless 0$, esenţiale în clasificarea acestor cazuri, echivalează cu anumite relaţii între valorile ρ. Astfel, dacă $G_1 + G_2 > 0$, din (14) urmează

$$1/\rho_1'' - 1/\rho_1' + 1/\rho_2'' - 1/\rho_2' > 0\,, \tag{38}$$

ceea ce (vezi (32)) conduce la a scrie

$$\rho'' < \rho'. \tag{39}$$

(Amintim că ambele cantități sînt pozitive.) Dimpotrivă, dacă $G_1 + G_2 < 0$, expresia din (38) schimbă de semn ; or, ținînd seama de (35), aceasta conduce la *aceeași* inegalitate (39). Rotația de axe efectuată în acest ultim caz are deci rostul de a face ca raza de curbură mai mare să corespundă axei Ox. Este vorba așadar de o convenție de notație, și nu de un fapt mecanic.

În condițiile de mai sus, contactul exterior este întotdeauna posibil. Contactul interior e posibil numai dacă avem (vezi (32), (35))

$$1/\rho_1' + 1/\rho_2' > 0\,, \qquad 1/\rho_1'' + 1\alpha/\rho_2'' > 0\,. \tag{40}$$

Dacă de pildă avem $\rho_2' < 0$, $\rho_2'' < 0$, așadar suprafața $\mathcal{S}_1$ realizează contactul în interiorul suprafeței $\mathcal{S}_2$, din (40) urmează

$$\rho_1' < -\rho_2', \qquad \rho_1'' < -\rho_2''\,, \tag{41}$$

ceea ce este ușor de înțeles intuitiv (vezi fig. 10.12.2).

2° Cele de mai sus rămîn valabile dacă $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$ sînt suprafețe de rotație cu axele în cruce. Alegînd drept axe Ox_j, Oy_j tangentele la cercul paralel, respectiv la meridianul din O pe $\mathcal{S}_j$ $(j = 1,2)$, trebuie să luăm $2\alpha = 90°$, și relația (25) devine

$$\Delta = (G_1 - G_2)^2\,. \tag{42}$$

Dacă $G_1 - G_2 > 0$, atunci $\sqrt{\Delta} = G_1 - G_2$, și din (28), (14) și (15), obținem

$$1/\rho' = 1/\rho_1' + 1/\rho_2''\,, \qquad 1/\rho'' = 1/\rho_1'' + 1/\rho_2'. \tag{43}$$

Din (29) urmează

$$\sin 2\beta = -(G_1 - G_2) : \sqrt{\Delta} = -1\,, \qquad \cos 2\beta = 0\,, \tag{44}$$

astfel că, ținînd seama și de (20), avem

$$\beta = 3\pi/4, \qquad \alpha_1 = \pi, \qquad \alpha_2 = \pi/2. \tag{45}$$

Dacă însă $G_1 - G_2 < 0$, atunci $\sqrt{\Delta} = -(G_1 - G_2)$, și (43) se înlocuiește prin

$$1/\rho' = 1/\rho_1'' + 1/\rho_2', \qquad 1/\rho'' = 1/\rho_1' + 1/\rho_2''\,. \tag{46}$$

Pentru a calcula unghiurile, din (29) deducem acum

$$\sin 2\beta = -(G_1 - G_2) : \sqrt{\Delta} = 1\,, \quad \cos 2\beta = 0\,, \tag{47}$$

și deci, utilizînd și (20) :

$$\beta = \pi/4, \qquad \alpha_1 = \pi/2, \qquad \alpha_2 = 0. \tag{48}$$

3° Să presupunem că punctul O este un punct ombilical pe ambele suprafețe (vezi G. Vrănceanu [1], vol. 2, § 15.1), așadar că

$$\rho_1' = \rho_1'' = \rho_1, \qquad \rho_2' = \rho_2'' = \rho_2\,. \tag{49}$$

Acesta este de pildă cazul unor corpuri de rotaţie în jurul normalei comune în O. Poziţia reciprocă a axelor este indiferentă, şi putem alege $2\alpha = 0$. Din (14) şi (25) deducem

$$G_1 = G_2 = 0, \qquad \Delta = 0. \tag{50}$$

Pentru a obţine soluţia, trebuie să folosim direct (22), de unde

$$1/\rho' = 1/\rho'' = H_1 + H_2 = 1/\rho_1 + 1/\rho_2. \tag{51}$$

Poziţia axelor Oxy este indiferentă.

4° Formulele de mai sus rămîn utilizabile pentru a studia contactul a două sfere. Pentru contactul exterior, rămîne valabilă relaţia (51). Dacă contactul este interior — fie de exemplu $\rho_2 < 0$ — trebuie să avem $\rho_1 < -\rho_2$, iar (51) ia forma

$$1/\rho' = 1/\rho'' = 1/\rho_1 - 1/|\rho_2|. \tag{52}$$

5° Conform observaţiei de la pag. 672, putem examina în acelaşi mod şi cazuri în care unul din corpuri este un cilindru. Dacă $\mathcal{S}_1$ şi $\mathcal{S}_2$ sînt cilindri cu axele paralele, raţionamentele din 4° rămîn valabile: este suficient să luăm în (32) şi (35)

$$1/\rho_1'' = 1/\rho_2'' = 0. \tag{53}$$

6° Fie că $\mathcal{S}_1$ este o sferă de rază ρ_1, iar $\mathcal{S}_2$ este un cilindru circular de rază ρ_2. Vom lua drept axe Ox_2 şi Oy_2 — generatoarea, respectiv tangenta la cercul paralel în O. Axele Ox_1y_1 pot fi alese arbitrar, astfel că le vom face să coincidă cu Ox_2y_2. Formulele din 1° rămîn valabile, şi avem mai întîi

$$1/\rho_1' = 1/\rho_1'' = 1/\rho_1, \quad 1/\rho_2'' = 1/\rho_2, \quad 1/\rho_2' = 0. \tag{54}$$

În cazul contactului exterior, din (14) urmează

$$G_1 + G_2 = 1/\rho_2 > 0, \tag{55}$$

astfel că din (32) obţinem

$$1/\rho' = 1/\rho_1, \qquad 1/\rho'' = 1/\rho_1 + 1/\rho_2. \tag{56}$$

În cazul contactului interior (sferă de rază $\rho_1 > 0$ într-un tub cilindric de rază $\rho_2 < 0$), condiţia de posibilitate a contactului este $\rho_1 < -\rho_2$. De data aceasta, (55) se înlocuieşte cu

$$G_1 + G_2 = 1/\rho_2 < 0, \tag{57}$$

astfel că trebuie să utilizăm formulele (35), de unde urmează

$$1/\rho' = 1/\rho_1 + 1/\rho_2 = 1/\rho_1 - 1/|\rho_2|, \quad 1/\rho'' = 1/\rho_1. \tag{58}$$

După cum se vede, în ambele cazuri avem $\rho' > \rho'' > 0$.

§ 13. PROBLEMA CONTACTULUI ELASTIC FĂRĂ FRECARE

a) *Condiția la limită. Ecuația integrală a problemei*

Să considerăm acum cele două corpuri de frontiere $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}_2$ raportate la coordonatele $Ox_1y_1z_1$ și $Ox_2y_2z_2$. Să presupunem că frontierele lor sînt de clasă C^1, așadar forțele ce le fac să intre în contact sînt pentru fiecare din ele echivalente cu cîte o rezultantă dirijată după normala comună în punctul de contact inițial.

Domeniul de contact va fi notat cu $\mathscr{D}$; punctele de pe $\mathscr{S}_1$, respectiv $\mathscr{S}_2$, care în urma deformației coincid, vor fi notate cu $\boldsymbol{x}^1$ și $\boldsymbol{x}^2$, deplasările elastice corespunzătoare vor fi notate cu $\boldsymbol{u}^1$ și $\boldsymbol{u}^2$.

Ca și în problema ștanței, vom neglija valorile pe $\mathscr{D}$ ale componentelor u_1 și u_2 ale deplasării, și ne vom fixa atenția asupra deplasării normale $u_3 \equiv w$. Vom presupune că eventualele deplasări rigide ale celor două corpuri se reduc la niște translații $-\delta_1$ și $-\delta_2$, paralele cu normala comună în O. Prin urmare, deplasările *totale* [6]) ale punctelor $\boldsymbol{x}^1$ și $\boldsymbol{x}^2$ vor fi egale cu $w_1 - \delta_1$, respectiv $w_2 - \delta_2$.

Întrucît numai puncte aflate pe aceeași verticală intră în contact, abscisele și ordonatele punctelor $\boldsymbol{x}^1$ și $\boldsymbol{x}^2$ coincid. După deformație, cotele lor devin

$$z_1^* = z_1 + w_1 - \delta_1, \qquad z_2^* = z_2 + w_2 - \delta_2. \tag{1}$$

Distanța dintre punctele $\boldsymbol{x}^1$ și $\boldsymbol{x}^2$ devine după deformație

$$z_1^* + z_2^* = z_1 + z_2 + w_1 + w_2 - (\delta_1 + \delta_2). \tag{2}$$

Să introducem notațiile

$$z = z_1 + z_2, \qquad \delta = \delta_1 + \delta_2. \tag{3}$$

(De altfel, determinarea separată a cantităților δ_1 și δ_2 nu e nici posibilă, și nu are nici sens mecanic.) Cu aceasta, relația (2) se va scrie

$$z^* = z + w_1 + w_2 - \delta. \tag{4}$$

Dar întrucît în $\mathscr{D}$ avem evident $z^* = 0$, din (4) obținem

$$w_1 + w_2 = \delta - z \text{ în } \mathscr{D}, \tag{5}$$

[6]) Două corpuri deformabile, presate unul asupra celuilalt, suportă deplasări de ansamblu — egale cu o „translație la infinit", adică în punctele cele mai îndepărtate — peste care se suprapune deplasarea elastică locală. Necesitatea de a considera astfel de translații la infinit provine din faptul că soluția lui Hertz (9.4.35) este regulată la infinit, așadar nu cuprinde nici un termen care să descrie o deplasare de ansamblu.

ceea ce este similar cu (2.17). Ținînd acum seama de expresia (12.18) a distanței z, obținem *în axele determinate în* § 12 :

$$w_1 + w_2 = \delta - \frac{1}{2} x^2/\rho' - \frac{1}{2} y^2/\rho'' \quad \text{în } \mathscr{D}. \tag{6}$$

Să privim acum cele două corpuri în contact ca fiind aproximate prin niște semispații elastice — ceea ce este îngăduit în vecinătatea lui $\mathscr{D}$, dacă $d(\mathscr{D})$ este mic față de razele de curbură. Fiecare din aceste semispații este supus unei sarcini normale *necunoscute*, repartizate pe un domeniu de contact de asemenea *necunoscut*. Dar acest domeniu este *același* pentru ambele semispații ; sarcina va fi și ea *aceeași* (în mărime și semn, întrucît axele Oz_1 și Oz_2 sînt opuse).

Se înțelege că acest punct de vedere nu neglijează forma și poziția reciprocă reală a celor două corpuri : căci tocmai acești factori definesc membrul al doilea din condiția la limită (6).

Or, pentru un semispațiu elastic, deducem din (2.10), (2.11)

$$w|_{z=0} = [(1 - \nu)/2\pi\mu] \iint_{\mathscr{D}} [p(\xi, \eta)/\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] \, \mathrm{d}D. \tag{7}$$

Întrucît constantele elastice ale celor două corpuri sînt în general diferite, vom nota — ca și în (2.14) —

$$\theta_1 = (1 - \nu_1)/2\pi\mu_1, \qquad \theta_2 = (1 - \nu_2)/2\pi\mu_2. \tag{8}$$

Întrucît avem $\mathscr{D}_1 \equiv \mathscr{D}_2$ și $p_1(x, y) = p_2(x, y)$, din (7) urmează

$$w_j|_{z=0} = \theta_j \iint_{\mathscr{D}} [p(\xi, \eta)/\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] \, \mathrm{d}D, \qquad j = 1, 2. \tag{9}$$

Introducînd aceste expresii în (6), obținem în definitiv

$$\delta - \frac{1}{2} x^2/\rho' - \frac{1}{2} y^2/\rho'' = (\theta_1 + \theta_2) \iint_{\mathscr{D}} [p(\xi, \eta)/\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] \, \mathrm{d}D \quad \text{în } \mathscr{D}, \tag{10}$$

ceea ce constituie ecuația integrală a problemei, deplin similară cu (5.2).

b) *Ștanța echivalentă și semispațiul echivalent*

Soluția problemei de contact se obține deci din cea a problemei ștanței paraboloidale, prin simpla înlocuire a coeficientului θ cu suma $\theta_1 + \theta_2$, și prin introducerea în ecuația integrală a problemei, a coeficienților ρ', ρ'' din § 12.

Altfel spus, problema contactului elastic este *identică* cu problema penetrației unei ștanțe paraboloidale de configurație caracterizată prin mărimile (12.28) (*ștanța echivalentă*), într-un semispațiu elastic definit prin intermediul constantelor (8) (*semispațiul echivalent*).

Notînd cu H curbura medie în origine a ștanței echivalente, deducem din (12.16) relația

$$H = H_1 + H_2. \tag{11}$$

Pentru coeficientul ei de rotunjire h, căpătăm din (12.28)

$$h = \rho''/\rho' = 1 - 2\sqrt{\Delta}/(H + \sqrt{\Delta}). \tag{12}$$

În fine, din (10) se vede că materialul semispațiului echivalent este caracterizat de coeficientul

$$\theta = \theta_1 + \theta_2. \tag{13}$$

Problema are sens numai dacă $H > 0$ și $0 \leqslant h \leqslant 1$ (admițînd și cazul limită $h = 0$). Desigur, aceasta trebuie asigurat prin natura corpurilor în contact.

Introducînd (6.3) în (12.14), căpătăm mai întîi

$$G_1 = [(1-h_1)/(1+h_1)]\, H_1, \quad G_2 = [(1-h_2)/(1+h_2)]\, H_2. \tag{14}$$

Introducînd mai departe aceste expresii în (12.25), obținem

$$\Delta = \frac{(1-h_1)^2}{(1+h_1)^2} H_1^2 + 2\,\frac{(1-h_1)(1-h_2)}{(1+h_1)(1+h_2)} (\cos 4\alpha)\; H_1 H_2 + \frac{(1-h_2)^2}{(1+h_2)^2} H_2^2; \tag{15}$$

astfel, întrucît avem $h_1, h_2 \in [0,1]$, conchidem evident că

$$0 \leqslant \sqrt{\Delta} \leqslant H. \tag{16}$$

Din (12) urmează acum și $h \in [0,1]$. Desigur, ștanța echivalentă este cu atît mai turtită, cu cît $\sqrt{\Delta}$ este mai apropiat de H. Pentru ca h să depășească o valoare dată h_0, trebuie să avem

$$\sqrt{\Delta}/H \leqslant (1-h_0)\,/\,(1+h_0), \tag{17}$$

(vezi (12)), ceea ce se poate verifica în fiecare problemă concretă, în funcție de valorile ρ_1', ρ_1'', ρ_2', ρ_2'' și α cunoscute.

Cu aceasta, rezultatele din §§ 5—8 și 11 se transpun acum cuvînt cu cuvînt pentru problema contactului a două corpuri elastice.

Formulele (5.32) și (5.42)—(5.44) pentru mărimile a_1, a, b, δ rămîn valabile. Rămîne valabilă și relația (7.9) care permite determinarea raportului b/a, precum și toate formulele (7.12)—(7.21). Cele spuse în §§ 7 și 8 relativ la rolul redus al excentricității elipsei de contact, conduc la a afirma acum că soluția problemei contactului a două corpuri elastice depinde de *proprietățile mecanice ale celor două corpuri* — exprimate prin inter-

mediul cantității θ din (13) —, de *sarcina totală* P, și de *suma curburilor medii ale celor două corpuri* — exprimată prin intermediul cantității H din (11). Dimpotrivă, ea este *practic independentă de coeficienții de rotunjire* (sau de curburile gaussiene) *și de poziția reciprocă a celor două corpuri*, exprimate prin intermediul coeficientului de rotunjire h al ștanței echivalente, definit în (12) — atîta timp cît acesta nu este prea mic.

Configurația fiecărui corp în parte (și în particular și forma domeniului de contact) se manifestă prin intermediul expresiei $p(\xi,\eta)$, care păstrează forma (5.5).

Dacă unul din corpuri este rigid, mărimea θ_j corespunzătoare lui este nulă (vezi (8) pentru $\mu_j = \infty$). Dacă unul din corpuri este un semispațiu, atunci avem $H_j = 0$.

Calculele efectuate pentru determinarea deplasărilor și tensiunilor în cazul semispațiului elastic solicitat de o ștanță paraboloidală își păstrează valabilitatea în vecinătatea imediată a domeniului de contact — singura porțiune a corpului care ne interesează, dat fiind că fenomenul (vezi § 11) are un caracter puternic localizat. În particular, rămîn valabile cele spuse privitor la poziția și solicitarea punctelor celor mai periclitate.

c) *Exemplu: contactul dintre roată și șină*

Să considerăm schematic problema contactului roții de locomotivă de frontieră $\mathscr{S}_2$ cu șina de frontieră $\mathscr{S}_1$.

Fie că raza roții (roată alergătoare) este de 60 cm, iar raza de curbură a suprafeței șinei — de 30 cm. Ambele corpuri sînt executate din oțel carbon avînd constantele $E \cong 2{,}15 \cdot 10^6$ kgf/cm² și $\nu \cong 0{,}3$.

Desigur, avem de utilizat formulele din § 12, c, exemplul 2°. Avem mai întîi

$$1/\rho_1' = (1/30)\ \text{cm}^{-1}, \quad 1/\rho_1'' = 0, \quad 1/\rho_2' = (1/60)\ \text{cm}^{-1}, \quad 1/\rho_2'' = 0, \tag{18}$$

astfel că din (12.14), (12.15) urmează

$$H_1 = -G_1 = (1/60)\ \text{cm}^{-1}, \quad H_2 = -G_2 = (1/120)\ \text{cm}^{-1}. \tag{19}$$

Din (11) și (12.42) obținem acum

$$H = (1/40)\ \text{cm}^{-1}, \quad \sqrt{\Delta} = -(G_1 - G_2) = (1/120)\ \text{cm}^{-1}, \tag{20}$$

și mai departe, din (12.28) sau (12.46):

$$1/\rho' = (1/60)\ \text{cm}^{-1}, \quad 1/\rho'' = (1/30)\ \text{cm}^{-1}. \tag{21}$$

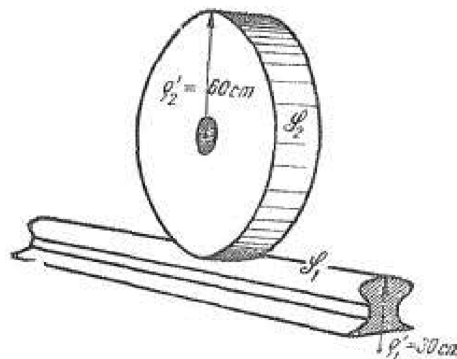


Fig. 10.13.1

Din (12) — sau direct din definiția (6.2) — avem de asemenea

$$h = 1/2. \tag{22}$$

Valorile $H = (1/40)$ cm^{-1} și $h = 1/2$ caracterizează ştanţa echivalentă. Mai departe, din (8) rezultă

$$\theta_1 = \theta_2 = (1-\nu)/2\pi\mu = (1-\nu^2)/\pi E = 1347 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{kgf}, \tag{23}$$

şi deci din (13) căpătăm pentru caracterizarea semispaţiului echivalent,

$$\theta = 2694 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{kgf}. \tag{24}$$

Soluţia ecuaţiilor lui Hertz se obţine folosind tabloul de la pag. 644, de unde pentru $h = \mathrm{f}(k) = 1/2$ căpătăm

$$k = 0{,}776. \tag{25}$$

Valorile $\mathrm{K}(k)$ şi $\mathrm{E}(k)$ se obţin din tabelele de integrale eliptice complete (vezi § 4, pag. 632; nu este recomandabilă o precizie exagerată, date fiind ipotezele simplificatoare pe care se bazează teoria contactului). Obţinem

$$\mathrm{K}(0{,}776) = 1{,}971, \qquad \mathrm{E}(0{,}776) = 1{,}288. \tag{26}$$

Din formulele (5.42)—(5.44) şi (5.32) avem pe rînd

$$\begin{gathered} a = 0{,}0374 \ P^{1/3} \text{ cm}, \quad b = 0{,}0236 \ P^{1/3} \text{ cm}, \quad D = \pi ab = 0{,}002773 \ P^{2/3} \text{ cm}^2, \\ \delta = 0{,}0000213 \ P^{2/3} \text{ cm}, \quad a_1 = 541 \ P^{1/3} \text{ kgf/cm}^2. \end{gathered} \tag{27}$$

Presiunea pe domeniul de contact este deci cunoscută sub forma

$$p(\xi, \eta) = 541 \ P^{1/3} \sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2} \text{ kgf/cm}^2, \tag{28}$$

unde a, b au valorile din (27), iar P se măsoară în kgf.

Cantităţile din (27) pot fi obţinute şi cu ajutorul formulelor aproximative din § 7— cu toate că avem $k \cong 0{,}8$. Din (7.9) deducem mai întîi

$$b/a = h^{2/3} = 0{,}63, \tag{29}$$

astfel că din (7.18) şi (7.21) urmează

$$\delta = 0{,}0000216 \ P^{2/3} \text{ cm}, \qquad a_1 = 553 \ P^{1/3} \text{ kgf}. \tag{30}$$

Coeficientul a_1 se poate obţine şi din (7.43), folosind valoarea δ din (30):

$$a_1 = 521 \ P^{1/3} \text{ kgf}. \tag{31}$$

Formulele (7.41) şi (7.42) şi aceeaşi valoare pentru δ dau atunci

$$ab = 0{,}000916 \ P^{2/3} \text{ cm}^2. \tag{32}$$

Din (29) şi (32) deducem acum

$$a = 0{,}038 \ P^{1/3} \text{ cm}, \qquad b = 0{,}024 \ P^{1/3} \text{ cm}. \tag{33}$$

După cum se vede, erorile comise datorită utilizării formulelor aproximative sînt de ordinul a cel mult 2—3 %, așadar mult mai mici decît cele ce trebuie să provină din diferitele presupuneri simplificatoare ce stau la baza teoriei contactului.

Luînd $P = 7800$ kgf (de unde $P^{1/3} = 19{,}83$), obținem din (27):

$$a = 0{,}742 \text{ cm}, \ b = 0{,}468 \text{ cm}, \ D = 1{,}09 \text{ cm}^2, \ \delta = 0{,}0084 \text{ cm}, \ a_1 = 10.730 \text{ kgf/cm}^2. \tag{34}$$

Dimensiunile liniare ale domeniului de contact sînt deci cu adevărat mici față de razele de curbură. De asemenea, penetrația este suficient de mică pentru ca să fie îngăduită scrierea condițiilor la limită pe suprafața *nedeformată* a corpurilor în contact.

Presiunea maximă din (34) este cu mult peste limita de plasticitate a oțelurilor uzuale. Pentru aprecierea rezistenței șinei și a roții trebuie folosită formula (11.1). Faptul că diferența $\sigma_3 - \sigma_2$ atinge 6 500 kgf/cm² la o adîncime de 2—4 mm, arată că deformarea plastică este inevitabilă.

OBSERVAȚIE. Problema—de mare importanță practică — a contactului dintre roată și șină, a fost de repetate ori examinată: N. Beliaev [3]; H. Poritsky [1] (cu rezultate apropiate de cele ale lui Beliaev); Z. Rudakov [1]; G. Filonenko [1] (cu o evaluare aproximativă a efectelor dinamice, care rezultă a fi considerabile).

d) Exemplu: bula elastică pe un semispațiu rigid

Să considerăm o bulă de oțel de frontieră $\mathscr{S}_1$ așezată pe un semispațiu rigid de frontieră $\mathscr{S}_2$; contactul are loc sub acțiunea greutății proprii a bulei. Pentru același material ca în exemplul **c**, avem deci

$$\theta_1 = 1347 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{kgf}, \quad \theta_2 = 0. \tag{35}$$

Luînd pentru greutatea specifică a oțelului valoarea de $7{,}8 \cdot 10^{-3}$ kgf/cm³, obținem

$$P = 32{,}7 \cdot 10^{-3} \, R^3 \text{ kgf}, \tag{36}$$

raza R a bulei fiind exprimată în centimetri. Mai departe, avem

$$H_1 = 1/R, \quad H_2 = 0, \quad H = 1/R, \quad h = 1, \quad k = 0, \tag{37}$$

și deci din (5.42), (5.44) și (5.32) urmează

$$a = b = 2{,}18 \cdot 10^{-3} R^{4/3} \text{ cm}, \quad \delta = 4{,}76 \cdot 10^{-6} R^{5/3} \text{ cm}, \quad a_1 = 3\,310 \ R^{1/3} \text{ kgf/cm}^2. \tag{38}$$

Dimensiunile liniare ale domeniului $\mathscr{D}$ cresc mai repede decît raza bulei, astfel că pentru valori mari ale lui R, teoria contactului elastic nu mai poate fi aplicată. Raportul a/R are valoarea 1/100 pentru $R \cong 1$m (așadar $P \cong 33$ t), și scade pînă la 1/10 pentru $R \cong 1$ km. Cazurile realizabile în practică sînt deci cu siguranță cuprinse în domeniul de valabilitate al teoriei contactului elastic. De altfel, pentru $R \geqslant 40$ cm, avem deja $a_1 \geqslant 11\,000$ kgf/cm².

§ 14. DESPRE ALTE METODE ȘI PROBLEME

Vom da aci unele indicații privitoare la problema ștanței pentru configurații diferite de cele considerate în §§ 4 și 5, pentru anumite cazuri particulare de astfel de configurații, precum și pentru alte proprietăți mecanice ale suprafețelor în contact.

Raționamentele de pînă aci sînt formal valabile oricare ar fi valorile constantelor ρ', ρ''. Dar cazul unor constante ρ', ρ'' *foarte mici* cer un studiu aparte; punctul de contact inițial are caracterul unui „vîrf", dimensiunile lui $\mathscr{D}$ nu sînt mici față de ρ',ρ'', și problema se apropie de cea a unei ștanțe *conice*. Această din urmă problemă a fost rezolvată de A. Love [3] și — prin alte metode — de A. Lurie [4], § 5.7, și I. Sneddon [1], § 10.52.

Fie acum că *una* din constantele ρ', ρ'' este *foarte mare*. Întrucît avem $\rho'' \leqslant \rho'$, din tabloul de la pag. 644 urmează $k \cong 1$, și deci $b \ll a$. Prin urmare, nici în acest caz domeniul de contact nu va avea dimensiuni mici în raport cu razele de curbură. Pentru $1/\rho' \rightarrow 0$, acțiunea ștanței echivalează *în primă aproximație* cu cea a unui cilindru parabolic, de curbă directoare

$$Z = \frac{1}{2}\, y^2/\rho''. \tag{1}$$

Acest cilindru intră în contact cu semispațiul în lungul unei generatoare. Domeniul de contact este alungit și îngust, iar lungimea sa nu poate fi determinată. Astfel de ștanțe au fost studiate de A. Dinnik [1] și N. Beliaev [3]. Punctele cele mai solicitate se găsesc la adîncimea $z = 0{,}78\ b$ (cu tensiuni tangențiale ce variază foarte puțin între $0{,}7 - 1{,}1\ b$), unde $2b$ este lățimea domeniului de contact. (Rezultatul este similar celui de la pag. 666 pentru domenii de contact eliptice; aceasta se vede ușor dacă înlocuim acolo pe a prin $b/\sqrt{1-k^2}$.) Presiunea maximă este $a_1 = 2P/\pi\, b$ (unde P este sarcina pe unitatea de lungime pe linia de contact inițial), iar tensiunea tangențială maximală este aproximativ egală cu $0{,}32\ a_1$. Criteriul de rezistență are deci aceeași formă ca în (11.1).

Contactul cilindrilor este studiat ca *problemă plană* de către L. Galin [4], capitolul 1 (cu o analiză detaliată a lucrărilor privitoare la această chestiune); S. Mihlin [1], §§ 68—71; N. Mushelișvili [5], capitolul 6; I. Ștaerman [1], capitolul 2 (continuat de B. Romalis [2]), și [2]. Menționăm aci dificultatea de a se determina deplasările și penetrația δ. Această dificultate poate fi pusă în legătură cu observațiile din § 7.10 asupra soluției lui Kelvin și Somigliana. Pentru determinarea lui δ, vezi de exemplu I.S.Rabinovici [1]; Tsu Tao Loo [1]. Pentru anumite chestiuni speciale, vezi M. Dlugaci [1], capitolul 4; A. Kalandia [2], [3]; I. S. Rabinovici [2]; B. Romalis [1].

Condiția $1/\rho' = 0$ nu echivalează însă cu (1). Într-adevăr, problema poate fi studiată reținîndu-se în $Z = \varphi(X, Y)$ termeni de ordin superior. (Termeni de ordin impar nu pot apare: în acest caz ștanța n-ar fi exterioară semispațiului.)

Dacă *ambele* cantități ρ', ρ'' sînt *foarte mari*, sîntem conduși la problema contactului *de ordin superior*: distanța dintre ștanță și semispațiu este un infinit mic de ordin de mărime superior ordinului 2. Ecuația (5.4) se înlocuiește cu o ecuație în care în membrul al doilea apar termeni de grad 4. Această problemă a fost abordată de I. Ștaerman [1], § 4.3 (fără determinarea stării elastice în semispațiu); vezi și H. Deresiewicz [6].

Problema contactului poate fi mai ușor studiată pentru o ștanță *de rotație*. A. Lurie [4], §§ 5.4—5.7, rezolvă complet problema ștanței cu bază circulară plană, problema contac-

tului de ordin 2 şi superior, şi problema ştanţei conice. De remarcat că odată cu creşterea ordinului contactului, punctul de presiune maximă se deplasează către periferia discului de contact. Aceleaşi probleme au fost tratate de către I. Sneddon [1], § 10.52, prin intermediul unor anumite ecuaţii integrale duale şi al transformării lui Mellin. Vezi încă lucrarea iniţială a lui V. Abramov [1]. Dintre lucrările mai recente, vezi E. Deutsch [7]; I. Snedden [4]; I. Ufliand [2], părţile III şi IV.

În ultimul deceniu, problema de contact a fost intens studiată de către V. Dovnorovici [1] (ştanţe definite de funcţii polinomiale, aplicaţii ale metodei lui Ritz); K. Egorov [1], V. Gubenko [2]—[4], V. Gubenko şi V. Mosakovskii [1] (domeniu de contact în formă de coroană circulară); V. Gubenko [1] (tehnica diferenţierii fracţionare; vezi şi N. Rostovţev [5]); V. Mosakovskii şi V. Gubenko [1] (echivalenţă între problemele plane şi cele pentru ştanţa cu bază plană circulară); M. Leonov [1], [2] şi G. Popov [1], [2] (domeniu de contact circular); L. Payne [1] (simetrie axială); N. Rostovţev [1]—[4] (probleme plane şi axial simetrice). Unele din aceste rezultate se referă la cazul sarcinii *excentrice*.

O atenţie sporită se acordă problemei *contactului cu frecare* (tensiuni normale *şi* tangenţiale în $\mathscr{D}$). Dacă legea de frecare este cea a lui Coulomb, se vede uşor că în $\mathscr{D}$ trebuie să existe porţiuni în care punctele celor două suprafeţe sînt *antrenate* împreună în deformaţie, şi porţiuni în care suprafeţele *alunecă* una pe cealaltă. Determinarea liniei de separaţie între aceste porţiuni pune probleme extrem de dificile. Cu referire la acest cerc de idei, menţionăm mai întîi lucrarea de pionierat a lui E. Reissner şi H. Sagocci [1]; a se vedea apoi C. Cattaneo [1], [2]; H. Deresiewicz [1], [2]; E. Deutsch [8]; L. Goodman [1]; V. Gubenko [4]; M. Hetenyi şi P. MacDonald [1]; I. Kizina şi D. Griliţkii [1]; J. Lubkin [1]; R. Mindlin [3]; R. Mindlin şi H. Deresiewicz [1]; V. Mosakovskii [3], [7]; V. Mosakovskii şi N. Fotieva [1]; V. Mosakovskii et al. [1]; M. Pacelli [1], [2]; A. de Pater [1]; N. Rostovţev [3]; J. Smith şi Chang Ken Lin [1]; I. Ufliand [1]; P. Vermeulen şi K. Johnson [1]; W. Wernitz [1]. Menţionăm în mod special aplicaţiile metodelor operaţionale, aparţinînd lui R. Muki [2], I. Sneddon [3], I. Ufliand [2] (cap. 7—12).

Printre problemele referitoare la unele corpuri de *configuraţie specială*, vezi V. Alexandrov [1]; B. Abramian et al. [1]; N. Arutiunian şi B. Abramian [2].

Pentru cazul corpurilor neomogene, a se vedea cu titlu de exemplu V. Mosakovskii [6].

Lucrări ca cele ale lui N. Kilcevskii [4], [5] şi E. Kostiuk [1] prezintă metode de studiu bazate pe utilizarea calculatoarelor electronice.

Printre cercetările cu caracter experimental, vezi de exemplu L. Dobrovolskii şi V. Kopitov [1], [2]; W. Goldsmith şi P. Lyman [1]; A. Orlov şi S. Pineghin [1].

Problemele de contact referitoare la *stratul* elastic sînt abordate de către V. Alexandrov [1], [2]; V. Alexandrov şi V. Babeşko [1]; L. Keer [1], [2]; I. Ufliand [2]. Vezi încă şi B. Korenev [3] (aplicaţii la problema plăcilor pe fundaţie elastică) şi D. Şerman [8], § 3.3.

Pentru problema *dinamică* a contactului — oscilaţii întreţinute sau nu — şi pentru problema şocului corpurilor elastice, vezi N. Borodacev [1], [2], [4]; A. Dinnik [1] (cap. 4,5 şi 9); W. Goldsmith [1]; N. Kilcevskii [1]; I. Meteliţin [1]; M. Mişicu [4]; V. Zakorko şi N. Rostovţev [1].

Problema contactului pentru corpuri *care nu sînt elastice* este studiată într-un mare număr de lucrări. Citām aci, cu titlu de exemplu, G. Graham [1] (corpuri visco-elastice); N. Kilcevskii şi V. Boiko [1] (zone plastice); M. Predeleanu [1] (fluaj); R. Shield şi D. Drucker [1] (sarcini-limită).

ANEXĂ

Vom aminti aci — în genere fără demonstrații — anumite elemente de analiză și de teoria funcțiilor complexe. Unele rezultate (în particular cele utilizate cu titlu de exemplu în cap. 5 și 6) vor fi expuse în detaliu. Altele vor fi numai schițate, pentru a sugera cel puțin temeiul anumitor calcule și raționamente.

Adesea vom da enunțurile în condiții mai restrictive, urmărind nu rigoarea formulării (pentru teorii al căror loc nu e să fie studiat aci), ci sesizarea fenomenului matematic.

Ca bibliografie generală pentru §§ 4—11 recomandăm: L. Ahlfors [1]; A. Markușevici [1]; I. Privalov [2]; V. Smirnov [2], volumul 3, partea 2; S. Stoilov [1]; G. Valiron [1], capitolele 12—15. Un bogat material asupra teoriei funcțiilor complexe cu aplicații la problemele mecanicii este dat de C. Iacob [5], capitolele 1—3, și M. Lavrentiev și V. Șabat [1].

§ 1. FUNCȚII DE O VARIABILĂ

a) Clase de funcții

Date fiind două numere reale $a < b$, mulțimea numerelor r cu proprietatea $a \leqslant r \leqslant b$ poartă numele de *interval închis* (sau *segment*) și se notează $[a, b]$. Mulțimea numerelor r cu proprietatea $a < r < b$ se numește *interval deschis* și se notează $]a, b[$.

Notația $r \in [a, b]$ înseamnă „r *aparține* intervalului $[a, b]$".

O funcție (reală sau complexă) $f(r)$ se numește *continuă* în $r_0 \in [a, b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon, r_0)$ astfel încît

$$|f(r) - f(r_0)| < \varepsilon \text{ pentru } |r - r_0| < \delta(\varepsilon, r_0) \tag{1}$$

(așadar, dacă diferența $f(r) - f(r_0)$ tinde la zero odată cu $r - r_0$).

Dacă limitele din membrul al doilea există, atunci se notează

$$f(r_0 + 0) = \lim_{r \to r_0,\ r > r_0} f(r), \qquad f(r_0 - 0) = \lim_{r \to r_0,\ r < r_0} f(r). \tag{2}$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca $f(r)$ să fie continuă în $r_0 \in [a, b]$ este ca limitele din (2) să existe, să fie finite, egale, și egale cu $f(r_0)$:

$$f(r_0 - 0) = f(r_0 + 0) = f(r_0). \tag{3}$$

Orice punct în care funcţia $f(r)$ nu este continuă, se numeşte *punct de discontinuitate*. Un punct în care limitele din (2) există, sînt finite, dar nu verifică (3), se numeşte *punct de discontinuitate de prima speţă*.

Dacă $f(r)$ este continuă în *toate* punctele intervalului $[a, b]$, ea se zice a fi *continuă pe* $[a, b]$. (Tot astfel, pe $]a, b[$.) Mulţimea funcţiilor continue pe $[a, b]$ poartă numele de *clasa* $C^0[a, b]$ (sau pe scurt *clasa* C^0, dacă intervalul se subînţelege).

Dacă numărul δ din (1) este *independent* de r_0, funcţia este *uniform continuă* în $[a, b]$. Orice funcţie uniform continuă este şi continuă. (Reciproca este valabilă numai pentru funcţii continue într-un interval închis şi mărginit.)

Dacă există un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel că pentru orice sistem *finit* de intervale $[a_i, b_i]$ disjuncte (fără puncte comune) din $[a, b]$ avem

$$\sum_{i=1}^{p} |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad \sum_{i=1}^{p} |a_i - b_i| < \delta(\varepsilon), \tag{4}$$

atunci funcţia $f(r)$ este *absolut continuă*. Orice funcţie absolut continuă este şi uniform continuă (nu şi reciproc!).

Noţiunile de continuitate uniformă şi absolută nu precizează natura dependenţei dintre mărimile ε şi δ, adică dintre valorile $r - r_0$ şi valorile $f(r) - f(r_0)$. Cel mai simplu tip de legătură între acestea este dat de condiţia ca să existe un număr $\mu > 0$, astfel încît pentru oricare $r_1, r_2 \in [a, b]$, raportul

$$|f(r_1) - f(r_2)| : |r_1 - r_2|^{\mu} \tag{5}$$

să fie mărginit. Dacă (5) este mărginit pentru un anumit μ, el rămîne mărginit pentru orice $\nu < \mu$. Pornind de aci, se spune că $f(r)$ satisface în $[a, b]$ *condiţia lui Hölder* [1]) (sau este *hölderiană*) de exponent μ, dacă există două constante $\mu > 0$, $H > 0$, aşa ca

$$|f(r_1) - f(r_2)| \leqslant H\,|r_1 - r_2|^{\mu} \quad \text{pentru} \quad r_1, r_2 \in [a, b] \tag{6}$$

(adică $f(r_1) - f(r_2)$ tinde spre zero *cel puţin tot atît de repede* ca $|r_1 - r_2|^{\mu}$).

Dacă această condiţie este satisfăcută pentru r_2 arbitrar, dar r_1 *fix*, se spune că $f(r)$ este hölderiană *în punctul* r_1 (relativ la $[a, b]$).

μ este *cel mai mare* exponent, iar H, *cea mai mică* constantă pentru care condiţia (6) este satisfăcută. Rolul esenţial îl joacă aci μ, de existenţa căreia depinde faptul dacă raportul (5) este mărginit sau nu; valoarea acestei margini poate fi modificată prin înmulţirea funcţiei cu o constantă.

Orice funcţie hölderiană este continuă: pentru $\delta \leqslant (\varepsilon/H)^{1/\mu}$, condiţia (1) rezultă îndeplinită. Este deci firesc ca clasa funcţiilor hölderiene să

[1]) Întrucît pentru $\mu = 1$ această condiţie a fost iniţial considerată de către R. Lipschitz, ea este ades numită *condiţia lui Lipschitz de ordin* μ.

fie notată C^0_μ. (Valoarea $\mu = 0$ trebuie exclusă, întrucît în acest caz (6) atrage după sine numai mărginirea funcției.) Reciproca nu este adevărată.

Funcția $f(r)$ se numește *derivabilă* dacă raportul

$$[f(r) - f(r_0)] : [r - r_0] \tag{7}$$

are o limită finită pentru $r \to r_0$. Această limită se notează $f'(r)$.

Dacă $f(r)$ este derivabilă și cu derivată mărginită (în particular, continuă) pe $[a, b]$, din teorema creșterilor finite rezultă că ea aparține clasei C^0_1. Există însă funcții în C^0_1 care nu sînt totuși derivabile: acesta este de pildă cazul funcției $f(r) = |r|$ în orice interval ce conține originea.

Funcțiile din clasa C^0_1 posedă însă o proprietate importantă: ele sînt absolut continue. (Reciproca nu este adevărată.) O funcție derivabilă cu derivată mărginită (în particular, continuă) este deci absolut continuă.

Dacă $\mu > 1$, din (6) rezultă că $f'(r) \equiv 0$, așadar $f(r) = \text{const}$. Eliminînd acest caz banal, se ia întotdeauna $0 < \mu \leqslant 1$.

În definitiv, condiția lui Hölder poate fi privită ca o proprietate *intermediară* între cea de continuitate și cea de derivabilitate (cu prima derivată continuă).

Funcțiile pentru care $f'(r) \in C^0[a, b]$ se numesc *netede*.

În general, se notează cu $C^p_\mu[a, b]$ (sau C^p_μ, dacă intervalul se subînțelege) clasa funcțiilor de p ori derivabile și pentru care $f^{(p)}(r) \in C^0_\mu[a, b]$.

Ținînd seama de cele de mai sus, avem evident

$$C^{p+1} \subset C^p_\mu \subset C^p_\nu \subset C^p \quad \text{pentru } 0 < \nu < \mu \leqslant 1,$$

unde $C^{p+1} \neq C^p_1$, și $C^p_\nu \neq C^p$ pentru orice $\nu > 0$. (Semnul „$\subset$" — incluziune — arată că termenul din membrul întîi este o parte a celui din membrul al doilea.)

Dacă $f(r)$ este definită în $[a, b]$ și acest interval poate fi împărțit într-un număr finit de subintervale în care $f(r)$ aparține unei anumite clase C^p_μ vom spune că $f(r)$ aparține clasei C^p_μ *pe porțiuni*. Vom avea astfel de-a face cu funcții continue pe porțiuni, netede pe porțiuni etc.

O funcție se numește *cu variație mărginită* pe $[a, b]$ dacă, considerînd o *diviziune* d oarecare: $a = r_0 < r_1 < \ldots < r_{i-1} < r_i < \ldots < r_n = b$ a intervalului $[a, b]$, și formînd suma

$$v = \sum_{i=1}^{n} |f(r_i) - f(r_{i-1})|, \tag{8}$$

mulțimea valorilor v pentru toate diviziunile posibile ale lui $[a, b]$ este mărginită. În acest caz, există o margine superioară strictă, care se numește *variație totală* a funcției. Clasa acestor funcții se notează $V[a, b]$, sau pe scurt V.

Funcțiile cu variație mărginită posedă proprietăți importante. Astfel, orice funcție cu variație mărginită este diferența a două funcții monoton crescătoare. De aci se deduce că orice funcție cu variație mărginită este continuă, abstracție făcînd cel mult de o mulțime cel mult numerabilă de puncte de discontinuitate de prima speță.

Există funcții continue (și chiar derivabile) care *nu sînt* cu variație mărginită.

Funcțiile absolut continue (în particular deci, funcțiile de clasă C_1^0) sînt însă cu variație mărginită. (Reciproca nu este adevărată.)

Prin urmare, *orice rezultate pentru $f \in V$ rămîn valabile pentru funcțiile absolut continue; mai particular, pentru $f \in C_1^0$; mai particular încă, pentru funcțiile derivabile cu derivata mărginită; mai particular în fine, pentru $f \in C^1$.*

De asemenea, ele sînt valabile pentru funcțiile ce satisfac *condițiile lui Dirichlet*: funcții continue (afară de un număr finit de discontinuități de prima speță) și al căror interval de definiție poate fi împărțit într-un număr finit de subintervale în care funcția este monotonă. (O funcție *monotonă* pe porțiuni este evident cu variație mărginită.) Mai particular, ele rămîn valabile pentru funcțiile continue (afară de un număr finit de discontinuități de prima speță) cu un număr finit de maxime și minime în intervalul de definiție.

Pe viitor, cînd un rezultat va fi formulat pentru $f \in V$, nu vom mai sublinia toate aceste categorii de funcții pentru care el rămîne în particular valabil.

Definițiile de mai sus pot fi convenabil extinse și asupra funcțiilor de mai multe variabile. (Vezi de ex. M. Nicolescu et al. [1], vol. 1, cap. 8.)

b) Integrale

Trecind la proprietățile integrale ale funcțiilor, precizăm că în general, vom face uz de *integrala în sensul lui Riemann.*

Să considerăm toate diviziunile posibile d ale unui interval $[a, b]$ și să considerăm *norma* $\nu(d) = \max(r_i - r_{i-1})$ a acestei diviziuni. O funcție $f(r)$ se numește *integrabilă* pe $[a, b]$, dacă există un număr I cu proprietatea ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel ca pentru orice diviziune de normă $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ și pentru orice puncte $\rho_i \in [r_{i-1}, r_i]$, să avem

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i)(r_i - r_{i-1}) \right| < \varepsilon. \tag{9}$$

Numărul I se numește ***integrala definită*** a funcției $f(r)$ de la a la b:

$$I = \int_a^b f(r)\,dr. \tag{10}$$

O funcție al cărei *modul* este integrabil, se numește *absolut integrabilă* pe $[a,b]$. Orice funcție integrabilă pe un interval mărginit este totodată mărginită și absolut integrabilă. Reciproca nu este adevărată.

Condiţii suficiente de integrabilitate sînt: $f(r) \in V[a, b]$ sau $f(r) \in C^0[a, b]$ pe porţiuni (cel mult cu discontinuităţi de speţa întîia).

Ca funcţie de limita sa superioară, integrala definită este o funcţie continuă şi cu variaţie mărginită. În punctele de continuitate ale lui $f(r)$, avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_{r_0}^{r} f(r)\, \mathrm{d}r = f(r). \tag{11}$$

Dacă intervalul de integrare este infinit, sau dacă $f(r)$ nu este mărginită, avem de-a face cu *integrale improprii*, a căror valoare — în anumite împrejurări — poate fi definită prin procese de trecere la limită convenabile.

Pentru chestiunile amintite în acest paragraf, vezi M. Nicolescu et al. [1]; G. Valiron [1], §§ 3.26—3.31; §§ 3.35—3.38; §§ 4.42—4.47; §§ 4.54—4.58; capitolul 5; M. Zamansky [1], capitolele 7, 10 şi 13.

§2. DISTRIBUŢII DE O VARIABILĂ

Să începem prin a aminti noţiunea de *funcţională*: o lege de corespondenţă de la o mulţime de *funcţii* (domeniul ei de definiţie), la o mulţime de *numere* — reale sau complexe — (codomeniul, sau domeniul valorilor funcţionalei).

O funcţională $\mathfrak{F}$ se numeşte *omogenă* şi *aditivă*, dacă pentru orice pereche de funcţii f_1, f_2 şi orice pereche de numere a_1, a_2 avem

$$\mathfrak{F}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \mathfrak{F}(f_1) + a_2 \mathfrak{F}(f_2), \tag{1}$$

(desigur, dacă ambii membri din (1) au sens).

Mai departe, $\mathfrak{F}$ se numeşte *continuă* dacă pentru orice şir de funcţii din domeniul ei de definiţie $f_n(r)$ ce tind către $f(r)$, avem

$$\lim \mathfrak{F}(f_n) = \mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}(\lim f_n). \tag{2}$$

(Evident, aceasta implică în prealabil definirea noţiunii de limită.)

O funcţională omogenă, aditivă şi continuă, se numeşte *funcţională liniară*.

Două funcţionale sînt *egale*, dacă posedă acelaşi domeniu de definiţie şi au acelaşi efect asupra tuturor funcţiilor din el.

Pentru orice pereche de funcţii reale integrabile f, g definite în $]-\infty, \infty[$, se poate considera numărul, numit *produsul* lor *scalar*:

$$< f, g > = \int f(r)\, g(r)\, \mathrm{d}r \tag{3}$$

(limitele de integrare infinite vor fi subînţelese). Pentru $g(r)$ dat, relaţia (3) pune în corespondenţă oricărei funcţii $f(r)$ numărul $< f, g >$. Se verifică uşor că aceasta este o funcţională liniară.

Asemenea cu (3), se poate considera şi funcţia, numită *produsul de convoluţie* al lui $f(r)$ cu $g(r)$:

$$h(r) = f(r) * g(r) = \int f(\rho)\, g(r - \rho)\, \mathrm{d}\rho. \tag{4}$$

Este evident că convoluţia este o operaţie comutativă şi asociativă.

Aceste noţiuni conduc la generalizări importante, dacă plecăm nu de la integralele din (3), (4), ci direct de la ideea de funcţională.

Pentru aceasta, să considerăm funcţionala care pune în corespondenţă fiecărei funcţii $\varphi(r)$, valoarea ei în originea $r = 0$:

$$\varphi(r) \Rightarrow \varphi(0). \tag{5}$$

Se verifică uşor că această funcţională este liniară. Dacă ea ar putea fi scrisă sub forma (3), ar trebui să existe o funcţie $\delta(r)$ aşa încît

$$< \delta, \varphi > = \int \delta(r)\, \varphi(r)\, \mathrm{d}r = \varphi(0). \tag{6}$$

Or, se poate demonstra că *nu există nici o funcţie integrabilă* $\delta(r)$ care să verifice (6), astfel că această relaţie poate fi gîndită numai ca o transcriere formală a relaţiei (5).

Să considerăm acum mulţimea $\mathcal{K}$ a funcţiilor indefinit derivabile şi identic nule în afara unui anumit interval finit (eventual altul pentru fiecare din ele). Acestea se numesc *funcţii fundamentale*; funcţionalele liniare definite în $\mathcal{K}$ se numesc *distribuţii* (sau *funcţii generalizate*), iar mulţimea lor se notează $\mathcal{K}'$.

Prin urmare, (5) defineşte o distribuţie, care nu poate fi redusă la o funcţie propriu zisă; ea se numeşte *funcţia delta* — cu toate că în fapt nu este o funcţie.

Funcţia $\delta(r)$ poate fi introdusă şi cu ajutorul unor *funcţii de tip delta* $\delta_n(r)$, care sînt absolut integrabile şi verifică — pentru orice numere reale a, b — relaţiile

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \delta_n(r)\, \mathrm{d}r = \begin{cases} 1 & \text{dacă } 0 \in\,]a, b[, \\ 0 & \text{dacă } 0 \notin\,]a, b[. \end{cases} \tag{7}$$

Limita oricărui astfel de şir de funcţii este tocmai $\delta(r)$, care poate fi deci privită ca fiind (euristic) definită de proprietăţile (în fond contradictorii)

$$\delta(r) = 0 \quad \text{pentru} \quad r \neq 0; \qquad \delta(0) = \infty; \qquad \int \delta(r)\, \mathrm{d}r = 1. \tag{8}$$

Prin urmare, funcţia $\delta(r)$ definită de (5) este tocmai *funcţia delta a lui Dirac*, de uz frecvent în fizica teoretică.

Dacă vom interpreta funcţiile „obişnuite" ca descriind acţiunea unor factori mecanici sau fizici repartizaţi, (8) poate fi înţeleasă în schimb ca descrierea unei acţiuni *concentrate*, aplicate în originea O. Întrucît nu există nici o funcţie integrabilă cu proprietăţile (6) sau (8), aceasta poate fi privit numai ca un drum euristic, conducînd la descrierea acţiunilor concentrate, prin distribuţii.

Mai departe, dacă o funcţie $g(r)$ descrie efectul în r al unei anumite acţiuni în origine, şi dacă $f(r)$ este un factor de proporţionalitate, care evaluează intensitatea acţiunii g — este vizibil că produsul de convoluţie este apt să descrie *superpoziţia* de astfel de acţiuni, fiecare cu intensitatea ei, dacă efectul depinde numai de distanţa $r - \rho$.

Cu ajutorul relaţiilor (5), (6), putem considera şi funcţia $\delta(r-\rho)$, care pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}$ posedă proprietatea

$$< \delta(r-\rho),\ \varphi(r) > = \varphi(\rho), \tag{9}$$

ceea ce se poate scrie şi sub forma

$$\delta * \varphi = \varphi. \tag{10}$$

Pentru orice $f, g \in \mathcal{K}$ avem uşor (întrucît derivatele există)

$$< f', g > = f\,g \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int f\,g'\,\mathrm{d}r = < f, -g' >. \tag{11}$$

Aceasta permite să se *definească* derivarea într-un sens generalizat, chiar dacă f, g nu mai sînt funcţii fundamentale. În particular, pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}$ avem:

$$< f', \varphi > = < f, -\varphi' >, \tag{12}$$

astfel că derivata *de orice ordin* a *oricărei* distribuţii $f \in \mathcal{K}'$ (inclusiv, de pildă, a funcţiei δ) are sens.

Se poate arăta că operaţia de derivare este o operaţie *continuă* în $\mathcal{K}'$ (şi chiar şi în mulţimi mai largi de distribuţii). De exemplu, pentru funcţia lui Heaviside (care nu aparţine lui $\mathcal{K}$):

$$H(r) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } r < 0, \\ 1 \text{ pentru } r > 0, \end{cases} \tag{13}$$

se găseşte uşor

$$[H(r)]' = \delta(r). \tag{14}$$

Regulile obişnuite de derivare (pentru sume, produse etc.) rămîn valabile. De exemplu se obţine uşor

$$[r\,H(r)]' = r\,\delta(r) + H(r).$$

Dar întrucît avem

$$r\,H(r) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } r < 0, \\ r \text{ pentru } r > 0, \end{cases}$$

rezultă imediat $[rH(r)]' = H(r)$, astfel că egalitatea de mai sus dă

$$r\,\delta(r) = 0. \tag{15}$$

Acelaşi rezultat se poate obţine remarcînd că

$$< r\,\delta(r), \varphi(r) > = < \delta(r), r\,\varphi(r) > = [r\,\varphi(r)]\big|_{r=0} = 0, \tag{16}$$

aşadar că efectul „funcţiei" $r\,\delta(r)$ asupra oricărei funcţii fundamentale este acelaşi cu efectul funcţionalei „zero", care face să corespundă oricărei funcţii fundamentale, numărul zero.

Pentru trei funcţii, $f, g, \varphi \in \mathcal{K}$, dacă punem $h = f * g$ (vezi (4)) avem

$$< h, \varphi > = \int h(r)\,\varphi(r)\,\mathrm{d}r = \int\left[\int f(\rho)\,g(r-\rho)\,\mathrm{d}\rho\right]\varphi(r)\,\mathrm{d}r =$$

$$= \iint f(\rho)\,g(R)\,\varphi(R+\rho)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}R, \tag{17}$$

ceea ce sugerează să se definească convoluţia a două distribuţii prin intermediul a două operaţii succesive:

$$< f * g, \varphi > = < g(R), < f(\rho), \varphi(R+\rho) >>. \tag{18}$$

Convoluţia $f * g$ în $\mathcal{K}'$ este de asemenea comutativă şi asociativă.

Pentru convoluţia $\delta * f$, unde $f \in \mathcal{K}'$, avem succesiv

$$< \delta * f, \varphi > = < f(R), < \delta(\rho), \varphi(R+\rho) >> = < f(R), \varphi(R) >,$$

astfel că distribuţia $\delta * f$ are acelaşi efect asupra oricărei funcţii din $\mathcal{K}$, ca şi funcţia f, şi deci

$$\delta * f = f. \tag{19}$$

În mod similar, avem

$$< \delta' * f, \varphi > = < f(R), < \delta'(\rho), \varphi(R+\rho) >> = < f(R), < \delta(\rho),$$

$$-\varphi'(R+\rho) >> = < f(R), -\varphi'(R) > = < f'(R), \varphi(R) >,$$

ceea ce înseamnă că

$$\delta' * f = f'. \tag{20}$$

Notînd cu $\mathfrak{D}$ un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți, deducem din (20)

$$\mathfrak{D}\,\delta * f = \mathfrak{D} f. \tag{21}$$

Să calculăm acum produsul scalar

$$< (f*g)', \varphi > = < f*g, -\varphi' > = < g(R), < f(\rho), -\varphi'(R+\rho) >> =$$
$$= < g(R), < f'(\rho), \varphi(R+\rho) >> = < f' * g, \varphi >.$$

Ținînd seama și de comutativitate, aceasta conduce la egalitatea

$$(f*g)' = f' * g = f * g'. \tag{22}$$

Această relație poate fi evident generalizată sub forma

$$\mathfrak{D}(f*g) = \mathfrak{D}f * g = f * \mathfrak{D}g. \tag{23}$$

Relațiile (22) pot fi privite ca fiind de același tip cu formulele de derivare în raport cu un parametru sub semnul integrală.

Cele de mai sus pot fi extinse pentru funcții de mai multe variabile. Astfel, $\delta(x, y)$ este funcționala care acționează după formula

$$< \delta(x,y), \varphi(x,y) > = \varphi(0, 0). \tag{24}$$

O definiție euristică a acestei funcționale poate fi dată asemănător cu cea din (8); ea poate fi de asemenea înțeleasă ca descriind o anumită acțiune concentrată în plan printr-un proces de trecere la limită pentru șiruri de funcții de tip delta de două variabile, asemenea cu (7).

Pentru un studiu detaliat al teoriei distribuțiilor, vezi L. Schwartz [1], [2] (mai ales cap. 2 și 3); I. Ghelfand și G. Șilov [1] (pentru primele noțiuni, în special vol. 1, cap. 1 și 3). Pentru o introducere euristică simplă, vezi I. Sneddon [1], § 1.4. Funcția δ este amănunțit studiată (inclusiv indicații cu caracter istoric) de B. van der Pol și H. Bremmer [1], capitolul 5. Pentru unele aplicații importante, vezi H. Carslaw și J. Jaeger [1], capitolul 11. Vezi de asemenea R. Courant [1], capitolul 6, anexă; R. Cristescu și Gh. Marinescu [1]; A. Erdelyi [1].

§ 3. DOMENII ȘI FUNCȚII DE PUNCT ÎN PLAN

Pentru majoritatea noțiunilor fundamentale privind mulțimile de puncte din plan, a se vedea de exemplu N. Luzin [1]; M. Nicolescu et al. [1], volumul 2, capitolele 7 și 16; G. Valiron [1], §§ 1.15—1.16; M. Zamansky [1], capitolele 8—12.

a) Mulțimi de puncte. Domenii în $\mathcal{E}_2$

Amintim aci simbolurile de *apartenență* $\in$, de *incluziune* $\subset$, de *reuniune* sau *sumă* $\cup$ (sau $+$), de *mulțime vidă* $\emptyset$, de *complementară* $\complement\,\mathfrak{M}$ a unei mulțimi $\mathfrak{M}$.

Dacă pentru $x, y \in \mathfrak{M}$ este definită o *distanţă* $\rho(x, y)$, atunci $\mathfrak{M}$ se numeşte *spaţiu metric*. Exemplul cel mai comun este cel al *spaţiului euclidian* (sau *aritmetic*) cu m dimensiuni $\mathcal{E}_m$, alcătuit din mulţimea tuturor sistemelor ordonate de m numere reale: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Pentru $m = 1, 2, 3$, avem de-a face cu dreapta reală, cu planul, respectiv cu spaţiul euclidian tridimensional. Distanţa este definită aci de

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}. \tag{1}$$

Se numeşte *bulă* (deschisă, respectiv închisă) cu centrul în a şi de rază r, mulţimea $B(a,r)$ a punctelor x care satisfac condiţia $\rho(x, a) < r$, respectiv $\rho(x, a) \leqslant r$. O bulă în $\mathcal{E}_2$ se numeşte *disc* (sau *disc circular*).

Un punct x_0 se numeşte *limită* a unui şir de puncte x_n dacă $\lim \rho(x_n, x_0) = 0$ pentru $n \to \infty$. Aceasta se notează $x_0 = \lim x_n$, sau încă $x_n \to x_0$.

Un şir x_n pentru care $\lim \rho(x_n, x_m) = 0$ pentru $n, m \to \infty$, se numeşte *fundamental*. Un şir care posedă o limită se numeşte *convergent*.

Mai departe, presupunem cunoscute noţiunile de *vecinătate*, de *punct interior*, de *punct de acumulare*, *punct frontieră*, de *frontieră* fr $\mathfrak{M}$ a unei mulţimi $\mathfrak{M}$; de mulţime *deschisă*, *închisă*, *perfectă*, *densă* în altă mulţime sau în ea însăşi — care se construiesc toate pornind de la noţiunea de bulă.

O mulţime se numeşte *mărginită* dacă există o bulă care o conţine.

O mulţime se numeşte *compactă* dacă orice submulţime infinită a ei conţine un şir fundamental. În $\mathcal{E}_m$, orice mulţime mărginită este compactă (teorema lui Weierstrass şi Bolzano).

O mulţime $\mathfrak{M}$ se numeşte *conexă*, dacă *nu există* două mulţimi deschise $\mathcal{G}_1$ şi $\mathcal{G}_2$ astfel încît

$$\mathfrak{M} \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2, \quad \mathfrak{M} \cap \mathcal{G}_1 \neq \emptyset, \quad \mathfrak{M} \cap \mathcal{G}_2 \neq \emptyset, \quad (\mathfrak{M} \cap \mathcal{G}_1) \cap (\mathfrak{M} \cap \mathcal{G}_2) = \emptyset.$$

Intuitiv, aceasta revine la a spune că ea nu este alcătuită din două „bucăţi" separate.

O mulţime deschisă şi conexă se numeşte *domeniu*.

O mulţime perfectă şi conexă se numeşte *continuu*.

În cele ce urmează, ne vom mărgini la a considera *mulţimi de puncte în* $\mathcal{E}_2$. Completat cu punctul de la infinit (exterior oricărui disc), el se numeşte *planul închis*.

Vom avea frecvent de-a face cu *domenii*, precum şi cu mulţimi mărginite şi închise, care vor fi numite pe scurt *compacte*.

Vom nota adesea cu $\mathscr{D}$ domeniile în $\mathcal{E}_2$, şi cu $\mathscr{L}$ frontierele lor. (Notaţiile corespunzătoare în $\mathcal{E}_3$ vor fi $\mathscr{V}$ şi $\mathscr{S}$.) Dacă $\mathscr{D}$ este mărginit, atunci $\mathscr{D} + \mathscr{L}$ este un compact.

Întrucît vom întîlni frecvent domenii de tipul bulei, precizăm că frontiera unei bule se va nota cu S: în $\mathcal{E}_3$ ea se numeşte *sferă*, iar în $\mathcal{E}_2$, *cerc*. Dacă raza bulei (sau sferei) este egală cu 1, (bula unitate, sau sfera unitate), vom folosi notaţiile B_1 (sau S_1). În $\mathcal{E}_2$, pentru a evita eventualele confuzii, se vor folosi notaţiile menţionate mai jos, la pag. 695.

Uneori, se va folosi denumirea de disc și pentru domenii altfel definite — dar atunci vor trebui date precizări suplimentare (de ex., *disc eliptic* pentru domeniul a cărui frontieră este o *elipsă*).

Amintim aci *teorema lui Borel și Lebesgue*: dacă un compact din $\mathcal{E}_2$ (chiar din $\mathcal{E}_m$) este conținut în reuniunea unei familii infinite de mulțimi deschise, atunci există o subfamilie *finită* a acestei familii, a cărei reuniune o conține de asemenea.

Considerînd funcții de punct f *continue* definite în $\mathcal{E}_2$ și cu valori tot în $\mathcal{E}_2$, se poate demonstra că *imaginea* unui compact $\mathfrak{M}$ (adică mulțimea punctelor $f(x)$, pentru $x \in \mathfrak{M}$) este de asemenea un compact; imaginea unei mulțimi conexe este conexă; o funcție continuă pe un compact este uniform continuă.

Un domeniu $\mathfrak{M}$ se numește *simplu conex* dacă complementara sa $\complement\mathfrak{M}$ față de planul închis este conexă. (Astfel, un disc este un domeniu simplu-conex; în schimb, mulțimea deschisă a punctelor pentru care $\rho(x, a) > r$ nu are această proprietate, deoarece complementara sa este alcătuită din discul închis, *plus* punctul de la infinit. (Vezi și mai departe pag. 697 și pag. 743.)

Un domeniu se numește *multiplu conex*, și anume m-conex, dacă $\complement\mathfrak{M}$ este alcătuită din m componente disjuncte. Astfel, interiorul unei coroane circulare este un domeniu dublu conex.

b) Curbe-frontieră. Domenii simplu conexe și multiplu conexe

Domeniile plane cu care vom avea de-a face vor fi caracterizate prin frontierele lor, care vor fi întotdeauna niște *curbe* în sensul lui C. Jordan. Pentru a le defini pe acestea din urmă, să considerăm planul raportat la un sistem de coordonate carteziene ortogonale x_1, x_2 și să considerăm funcțiile

$$x_1 = x_1(r), \quad x_2 = x_2(r), \quad r \in [a, b]. \tag{2}$$

Dacă funcțiile (2) sînt *uniforme* (unei valori date r îi corespunde o singură valoare x_1 și o singură valoare x_2) și *continue*, atunci mulțimea punctelor (x_1, x_2) parcurse în sensul definit de sensul de creștere al lui r poartă numele de *curbă jordaniană*, sau, dacă confuzia nu este posibilă, *curbă*. Pentru a evita apariția de eventuale puncte multiple pe frontieră, se consideră *curbe jordaniene simple*, așadar curbe pentru care egalitățile $x_1(r') = x_1(r'')$ și $x_2(r') = x_2(r'')$ pentru $r', r'' \in]a, b[$ atrag $r' = r''$. Dacă concluzia de mai sus rămîne valabilă pentru $r', r'' \in [a, b]$, curba se numește *deschisă*. Dacă pe lîngă egalitatea $r' = r''$ e posibilă și egalitatea $r' = a$, $r'' = b$, ea se numește *închisă*.

Condiția ca curba să fie simplă revine la a spune că funcțiile (2) stabilesc o corespondență *biunivocă* și *bicontinuă* între punctele segmentului $[a, b]$ și punctele curbei.

Un ansamblu de curbe jordaniene simple care nu se intersectează va purta numele de *linie jordaniană simplă* (sau, pe scurt, *linie*). Pe viitor vom considera *numai domenii definite prin frontiera lor, o linie jordaniană simplă.*

Orice curbă jordaniană simplă închisă $\mathscr{L}$ împarte planul în două domenii disjuncte, ea însăşi constituind frontiera lor comună: unul din aceste domenii este mărginit şi simplu conex, iar celălalt este nemărginit şi dublu conex.

Vom nota cu indicele „+" domenii mărginite, şi cu „−" domenii nemărginite.

Un domeniu mărginit a cărui frontieră este o curbă simplă închisă jordaniană se va nota cu $\mathscr{D}^+$; domeniul nemărginit exterior acestei curbe se va nota $\mathscr{D}^-$; curba însăşi se va nota $\mathscr{L}$; uneori, îi vom atribui şi indicele suplimentar „$_0$". Este evident că $\mathscr{D}^- = \complement(\mathscr{D}^+ + \mathscr{L})$.

Un domeniu a cărui frontieră $\mathscr{L}$ este compusă dintr-o curbă simplă închisă $\mathscr{L}_0$ şi m curbe simple închise $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_m$ interioare curbei $\mathscr{L}_0$ şi exterioare una în raport cu cealaltă, se va nota cu tot $\mathscr{D}^+$. Este vizibil că $\mathscr{D}^+ = \mathscr{D}_0^+ \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} \mathscr{D}_j^-\right)$.

Dacă $\mathscr{L}_0$ este în întregime aruncată la infinit, astfel că $\mathscr{L}$ este compusă numai din curbele interioare $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_m$, *plus* punctul de la infinit, domeniul se va nota cu $\mathscr{D}^-$. Avem desigur $\mathscr{D}^- = \bigcap_{j=1}^{m} \mathscr{D}_j^-$.

$\mathscr{D}^+$ şi $\mathscr{D}^-$ sînt de acelaşi tip cu $\mathscr{D}_0^+$, respectiv $\mathscr{D}_0^-$ (un domeniu mărginit, fără sau cu goluri, respectiv planul nemărginit cu unul sau mai multe goluri). Dar în general (cînd $\mathscr{L} \neq \mathscr{L}_0$), $\mathscr{D}^-$ *nu este* complementara lui $\mathscr{D}^+ + \mathscr{L}$.

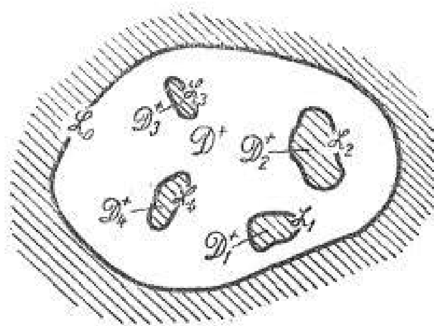


Fig. A.3.1

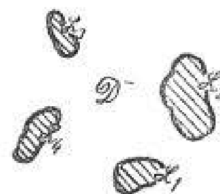


Fig. A.3.2

Dacă confuzia nu este posibilă, vom nota pe $\mathscr{D}^+$ sau $\mathscr{D}^-$ simplu prin $\mathscr{D}$. Uneori, vom folosi caractere greceşti oblice sau ruseşti: Д, Л etc. Subliniem că, pentru discul unitate, vom folosi întotdeauna (vezi de ex. §§ 7, 8, 9, 11) notaţia $Д^+$, iar pentru planul cu un orificiu circular de rază 1, notaţia $Д^-$. Frontiera comună a acestor domenii (cercul unitate) se va nota γ.

Aceleaşi notaţii vor fi folosite uneori şi pentru domenii de tip $\mathscr{D}^+$ sau $\mathscr{D}^-$ — caz în care frontiera lor va fi notată cu $\mathcal{Л}$. Ţinînd seama de context, nu există risc de confuzie. (Vezi de ex. § 6, unde notaţiile $Д^+$, $Д^-$ apar în ambele accepţiuni.)

OBSERVAŢIE. Notaţiile sînt alese în aşa fel încît corpul elastic să poată ocupa domenii de oricare din aceste tipuri : $\mathscr{D}_0^+$, $\mathscr{D}_0^-$, $\mathscr{D}^+$, $\mathscr{D}^-$. În schimb, nu are sens să considerăm un corp definit de exemplu de reuniunea $\bigcup_{j=1}^{m} \mathscr{D}_j^+$.

Dacă trebuie să punem în evidenţă interiorul sau exteriorul corpului, vom scrie $\mathscr{D}^i$, respectiv $\mathscr{D}^e$. Dacă $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0$, putem avea $\mathscr{D}^i = \mathscr{D}_0^+$, dar şi $\mathscr{D}^i = \mathscr{D}_0^-$, şi deci $\mathscr{D}^e = \mathscr{D}_0^-$, respectiv $\mathscr{D}^e = \mathscr{D}_0^+$. Dacă frontiera nu se reduce la $\mathscr{L}_0$, interiorul va fi $\mathscr{D}^+$ sau $\mathscr{D}^-$, iar exteriorul va fi $\complement(\mathscr{D}^+ + \mathscr{L})$, respectiv $\complement(\mathscr{D}^- + \mathscr{L})$.

Dacă confuzia nu este posibilă (în special, dacă $\mathscr{L}$ se reduce la $\mathscr{L}_0$) vom folosi numai indicii $+$, $-$.

Dacă $\mathscr{L}$ este compusă din curbe închise, orice punct frontieră poate fi unit cu orice punct exterior sau interior printr-o curbă jordaniană care nu are puncte comune cu frontiera, exceptînd punctul iniţial considerat. Astfel de puncte se numesc *accesibile*, şi proprietatea de mai sus este echivalentă cu afirmaţia că orice punct-frontieră al unui domeniu mărginit de o astfel de linie jordaniană este accesibil atît din interior, cît şi din exterior.

Orice curbă jordaniană interioară unui domeniu şi care uneşte două puncte frontieră ale acestuia, se numeşte *tăietură*. Un domeniu mărginit de o linie jordaniană este simplu conex, dacă şi numai dacă orice tăietură îl transformă într-o mulţime neconexă. Tot astfel, un domeniu este m-conex dacă şi numai dacă există o tăietură care îl transformă într-un domeniu $(m-1)$—conex.

Un domeniu $\mathscr{D}^+$ cu m componente interioare ale frontierei este $(m+1)$-conex : unind fiecare $\mathscr{L}_j$ cu $\mathscr{L}_0$, se obţine un domeniu mărginit şi simplu conex $\tilde{\mathscr{D}}^+$. Aceeaşi afirmaţie este valabilă pentru domeniul $\mathscr{D}^-$ cu aceleaşi m componente interioare ale frontierei în acest caz, componentele $\mathscr{L}_j$ trebuie unite cu punctul de la infinit la care s-a redus $\mathscr{L}_0$. Domeniul astfel obţinut se notează $\tilde{\mathscr{D}}^-$.

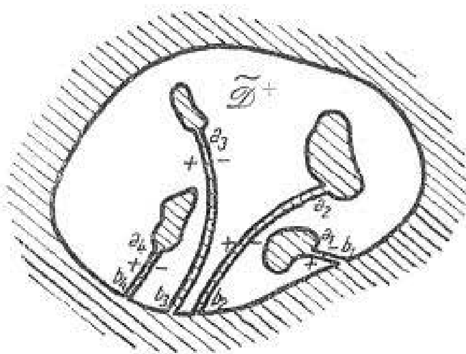


Fig. A.3.3

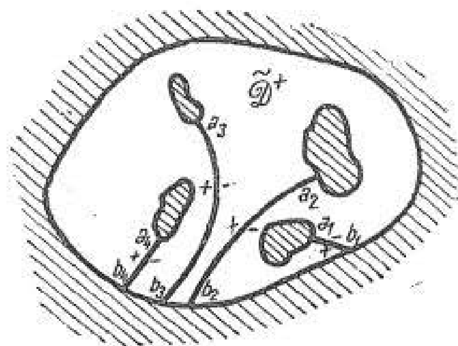


Fig. A.3.4

Desigur, dacă punctul de la infinit nu este un punct-frontieră, ci un punct interior pentru domeniul infinit considerat, ordinul de conexiune descreşte cu o unitate (vezi de ex. pag. 694).

Subliniem că punctele ce aparţin tăieturilor trebuie privite ca ansamblul a *două* puncte, geometric confundate, dar situate pe *borduri* (margini) diferite ale tăieturii ; o tăietură nu poate fi traversată. Bordurile ei se pot nota cu $\pm$ (de ex., în aşa fel încît $\mathscr{L}_0$ să fie parcurs în sensul trigonometric cînd trecem de la bordul $-$ la bordul $+$).

Pentru a înţelege intuitiv semnificaţia practicării de tăieturi, vezi figurile A.3.3. şi A.3.4. Vezi şi mai departe figurile A.5.2 şi A.5.3.

Uneori se admit în alcătuirea lui $\mathscr{L}$ şi curbe $\mathscr{L}_j$ deschise : acestea pot corespunde cazului-limită cînd un orificiu interior se reduce la o fisură interioară a corpului. Cazul unei curbe $\mathscr{L}_0$ deschise şi cu capetele aruncate la infinit corespunde unor domenii nemărginite de tipul semiplanului, cu sau fără orificii.

c) Elemente geometrice fundamentale

Pentru orice domeniu mărginit $\mathscr{D}$, se poate defini *diametrul* său

$$d(\mathscr{D}) = \sup \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \text{pentru } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{D}. \tag{3}$$

Pentru a indica faptul că domeniul $\mathscr{D}$ se reduce la un punct (de ex. în urma unui proces de deformare continuă), vom putea scrie $d(\mathscr{D}) \to 0$.

Nu insistăm aci asupra definirii în general a ariei domeniilor plane, întrucît chestiunea este mult mai delicată decît pare la prima vedere.

Amintim numai că, dacă funcţiile (2) ce definesc frontiera sînt *cu variaţie mărginită*, atunci $\mathscr{D}$ posedă o arie. Mai mult, se poate demonstra că o curbă este *rectificabilă* (adică pe ea are sens noţiunea de *lungime a arcului de curbă*), dacă şi numai dacă funcţiile (2) sînt cu variaţie mărginită. În acest caz, locul parametrului r îl poate lua lungimea arcului, care va fi notată cu s.

Curbele definite de funcţii (2) de clasă C^p, $p \geqslant 1$, precum şi de funcţii de clasă C_1^0, sînt cu certitudine rectificabile. Pe viitor, *vom considera numai domenii mărginite de linii jordaniene rectificabile.*

Pentru aria domeniului mărginit $\mathscr{D}^+$ vom avea prin definiţie

$$D = \iint_{\mathscr{D}^+} \mathrm{d}D. \tag{4}$$

(Elementul de arie $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ în $\mathscr{E}_2$ se va nota cu $\mathrm{d}D$.)

Pentru coordonatele x_1^0, x_2^0 ale centrului său de greutate avem

$$x_1^0 = D^{-1}\iint_{\mathscr{D}^+} x_1\,\mathrm{d}D, \quad x_2^0 = D^{-1}\iint_{\mathscr{D}^+} x_2\,\mathrm{d}D. \tag{5}$$

Pentru momentele de inerție în axe oarecare, vom folosi notațiile

$$J_{11} = \iint\limits_{\mathscr{D}^+} x_2^2 \,\mathrm{d}D, \quad J_{12} = \iint\limits_{\mathscr{D}^+} x_1 x_2 \,\mathrm{d}D, \quad J_{22} = \iint\limits_{\mathscr{D}^+} x_1^2 \,\mathrm{d}D. \tag{6}$$

Momentul polar de inerție (momentul în raport cu originea) va fi

$$J_0 = J_{11} + J_{22}. \tag{7}$$

În cazul particular al unor axe centrale ($x_1^0 = x_2^0 = 0$), vom nota momentele cu I_{11}, I_{22}, I_{12}, I_0. În axe oarecare, avem evident

$$I_{11} = \iint\limits_{\mathscr{D}^+} (x_2 - x_2^0)^2 \,\mathrm{d}D, \quad I_{22} = \iint\limits_{\mathscr{D}^+} (x_1 - x_1^0)^2 \,\mathrm{d}D,$$

$$I_{12} = \iint\limits_{\mathscr{D}^+} (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) \,\mathrm{d}D. \tag{8}$$

Utilizîndu-se formulele (4)—(6), obținem teorema lui Steiner

$$J_{11} = I_{11} + D(x_2^0)^2, \; J_{22} = I_{22} + D(x_1^0)^2, \; J_{12} = I_{12} + D\, x_1^0 x_2^0, \tag{9}$$

ceea ce evidențiază caracterul minimal al momentelor centrale I_{11}, I_{22}, I_0.

În axe centrale principale de inerție (unic determinate pentru un domeniu dat) avem $I_{12} = 0$. (Pentru poziția lor, vezi mai jos § 7, pag. 739.) Momentele centrale principale de inerție se vor nota I_1, I_2, astfel că în axe paralele cu acestea avem

$$J_{11} = I_1 + D(x_2^0)^2, \qquad J_{22} = I_2 + D(x_1^0)^2, \qquad J_{12} = D\, x_1^0 x_2^0. \tag{10}$$

Pentru ca toate aceste integrale să aibă sens, este suficient ca domeniul $\mathscr{D}^+$ să fie măsurabil Jordan [2]), deci ca curbele frontieră să fie definite de funcții (2) de clasă $C^0 \cap V$.

Dacă funcțiile (2) sînt de clasă C^1 și derivatele lor nu se anulează (pentru aceeași valoare a lui r), curba se numește *netedă*.

Întrucît ecuația normalei la o curbă plană este

$$[x_1 - x_1(r)] : x_1'(r) = [x_2 - x_2(r)] : x_2'(r),$$

rezultă că o curbă netedă are peste tot o normală (și deci și o tangentă) ce variază continuu cu r — ceea ce explică denumirea.

Evident, o astfel de curbă este rectificabilă, iar lungimea arcului de curbă e dată de

$$s - s_0 = \int_{r_0}^{r} \sqrt{[x_1'(r)]^2 + [x_2'(r)]^2}\,\mathrm{d}r. \tag{11}$$

---

[2]) Ceea ce înseamnă că frontiera sa are arie nulă.

Pe viitor, vom alege întotdeauna drept parametru r pentru astfel de curbe, chiar lungimea arcului de curbă s.

Dacă curba considerată este jordaniană, închisă, cu derivate $x_1'(s)$, $x_2'(s)$ continue, şi dacă $x_1'(a+0) = x_1'(b-0)$, $x_2'(a+0) = x_2'(b-0)$, ea se va numi *curbă netedă închisă*.

Un ansamblu finit de curbe jordaniene netede deschise cu capete comune două cîte două şi care nu se intersectează reciproc, se numeşte *curbă netedă pe porţiuni*. O astfel de curbă poate fi deschisă sau închisă. Ea are deci un număr finit de puncte de discontinuitate pentru direcţia tangentei (puncte unghiulare).

Un ansamblu finit de curbe netede pe porţiuni care nu se intersectează reciproc se numeşte *linie netedă pe porţiuni*.

Vom nota cu $\boldsymbol{s}$ versorul tangentei, şi cu $\boldsymbol{n}$ versorul normalei la curbă, dirijaţi în aşa fel încît axele $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ să fie orientate la fel ca axele (x_1, x_2) (aşadar cu sensul trigonometric de la $\boldsymbol{n}$ spre $\boldsymbol{s}$). Dacă curba considerată este închisă, vom alege în genere pentru $\boldsymbol{n}$ direcţia normalei *exterioare*; în acest caz, sensul crescător al valorilor lui s coincide cu sensul direct trigonometric. Atunci cînd curba este o componentă interioară a frontierei unui corp elastic, necesitatea de a alege drept normală, normala *exterioară corpului*, obligă de a lua pentru $\boldsymbol{n}$ normala interioară la curbă. Sensul de parcurs pe curbă va fi în acest caz cel retrograd.

Notînd cu n_1, n_2 cosinuşii directori ai normalei $\boldsymbol{n}$, şi cu $\hat{\theta}$ unghiul de la direcţia axei Ox_1 la direcţia $\boldsymbol{n}$, (aceasta este un caz particular al notaţiei ce va fi introduse în fig. A.7.3 pentru o rotaţie *oarecare* a axelor), avem formulele

$$x_1'(s) = \cos(\boldsymbol{s}, x_1) = -\cos(\boldsymbol{n}, x_2) = -n_2 = -\sin\hat{\theta},$$
$$x_2'(s) = \cos(\boldsymbol{s}, x_2) = \cos(\boldsymbol{n}, x_1) = n_1 = \cos\hat{\theta}. \tag{12}$$

Presupunerea că curbele-frontieră sînt netede pe porţiuni nu este totuşi îndestulătoare: chiar pentru a defini raza de curbură, trebuie să facem uz de formula

$$R = (x_1'^2 + x_2'^2)^{3/2} : (x_1' x_2'' - x_2' x_1''). \tag{13}$$

Dacă dorim ca curbura $1/R$ să varieze continuu cel puţin pe porţiuni, trebuie ca funcţiile (2) să fie de clasă cel puţin C^2 pe porţiuni.

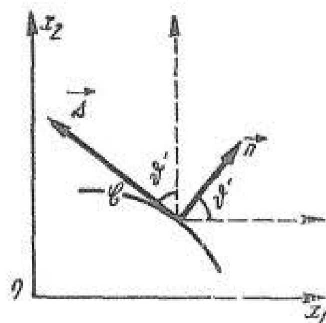


Fig. A.3.5

În general, se pot considera curbe de clasă C_μ^p, definite de funcţii (2) de clasă C_μ^p. Dacă aceste funcţii sînt desfăşurabile în serii după puterile parametrului, curba se numeşte *analitică*. Este uşor de înţeles ce înseamnă *curbă* (respectiv *linie*) *de clasă* C_μ^p *pe porţiuni*, *analitică pe porţiuni* etc. În particular, curbele jordaniene sînt curbe de clasă C^0, cele netede sînt de clasă C^1, cele cu curbură continuă — de clasă C^2 etc.

Cel mai adesea este suficient să ne limităm la aşa-numitele *curbe Liapunov*, care satisfac următoarele condiţii:

a) sînt netede pe porţiuni;

b) există un număr d astfel încît dreptele paralele cu normala la curbă într-un punct $\boldsymbol{x}$ intersectează cel mult odată acea porţiune a curbei care e situată în interiorul cercului $S(\boldsymbol{s}; d)$;

c) există o constantă $H > 0$ şi o constantă $0 < \mu \leqslant 1$, astfel încît pentru normalele $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_0$ în două puncte $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_0$ avem

$$\widehat{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_0)} \leqslant H\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^{\mu}. \tag{14}$$

În aceste relaţii, numerele d, H, μ *nu sînt* funcţii de punct.

Condiţia *a*) arată că curbele Liapunov au tangentă ce variază continuu pe porţiuni. Condiţia *b*) poate fi interpretată ca o condiţie suficientă pentru a putea scrie ecuaţiile (2) sub forma $x_2 = f(x_1)$. Condiţia *c*) este o condiţie de mărginire uniformă a variaţiei direcţiei normalei (sau tangentei).

Întrucît curbura este definită prin formula

$$1/R = \mathrm{d}\,\widehat{(\boldsymbol{s}, x_1)}/\mathrm{d}s, \tag{15}$$

se vede că condiţia (14) este apropiată de condiţia ca curba să fie de clasă C^2. În fapt, se poate demonstra că dacă curba este cu curbură continuă, condiţiile lui Liapunov sînt satisfăcute. Curbele Liapunov pot fi deci privite ca intermediare între curbele de clasă C^1 şi C^2.

d) Funcţii de punct în plan

Vom avea de repetate ori de-a face cu funcţii de punct (reale sau complexe) definite în anumite domenii sau pe anumite linii din plan.

Pentru funcţiile de punct din plan, se pot da generalizări ale noţiunilor din § 1. Dar în ce priveşte funcţiile de punct pe anumite linii rectificabile, este mai simplu ca acestea să fie privite ca funcţii de lungimea arcului de curbă pe fiecare componentă a liniilor considerate. Evident, astfel de funcţii pot aparţine diferitelor clase C^p_μ.

În particular, prezintă deosebit interes funcţiile ce satisfac condiţia

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant H\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^{\mu}. \tag{16}$$

Dacă $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0 \in \mathfrak{M}$, funcţia f se zice că este *hölderiană pe* $\mathfrak{M}$.

Dacă $\mathfrak{M}$ este o linie, condiţia (16) trebuie să fie separat verificată pe fiecare din curbele ce intră în alcătuirea acesteia. Pe o curbă netedă, $f(\boldsymbol{x})$ poate fi privită ca funcţie de s.

Apropierea dintre formulele (14) şi (16) este vizibilă.

Menţionăm încă faptul că pe o curbă Liapunov, cosinuşii directori n_1, n_2 şi cosinusul unghiului φ format de normala într-un punct $\boldsymbol{x}$ cu direcţia din $\boldsymbol{x}$ în alt punct $\boldsymbol{x}_0$, sînt funcţii hölderiene.

Printr-un oarecare abuz de notaţie, dacă o curbă este de clasă C^p_μ (sau V) în raport cu un parametru definit pe o altă curbă, fie ea $\mathscr{L}$, vom scrie că ea este de clasă $C^p_\mu(\mathscr{L})$ (sau $V(\mathscr{L})$).

Pentru detalii asupra clasificării funcţiilor şi curbelor, vezi C. Miranda [1], § 1; F. Gahov [1], § 1.2; N. Musheli̇şvili [4], capitolul 1 şi Anexa 1; I. Vekua [1], §§ 1.1 şi 1.2.

Unele din aceste proprietăţi (de ex. cele relative la curbele Liapunov) pot fi generalizate şi la cazul *suprafeţelor* din $\mathscr{E}_3$.

În cele ce urmează, vom folosi frecvent formule de legătură între valorile unor funcţii în $\mathscr{D}$, şi valorile lor pe $\mathscr{L}$. De fiecare dată în aceste formule vor interveni *valorile la limită* ale funcţiilor, în sensul definit în (1.1.6)—(1.1.8) — cu modificările cuvenite de notaţii : $\mathscr{D}$ şi $\mathscr{L}$, în loc de $\mathscr{V}$ şi $\mathscr{S}$. Dacă $\mathscr{L}$ este o curbă simplă închisă, avem deci

$$\begin{aligned} f^+(\boldsymbol{x}_0) &= \lim f(\boldsymbol{x}) \text{ pentru } \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}^+,\ \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{L}, \\ f^-(\boldsymbol{x}_0) &= \lim f(\boldsymbol{x}) \text{ pentru } \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}^-,\ \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{L}, \end{aligned} \tag{17}$$

(dacă aceste limite există!). În cazul unei frontiere cu mai multe componente, indicii +, — trebuie înlocuiţi prin *i*, *e* (vezi pag. 696). Dacă în alcătuirea frontierei intră curbe deschise, pentru acestea se poate defini (ţinînd seama de sensul de parcurs) o vecinătate „dreaptă" şi una „stîngă" a fiecărui punct care nu este un capăt, şi deci se pot considera şi aci valori la limită de tip (17).

e) Formule integrale

Cea mai frecvent utilizată formulă integrală — făcînd uz de valori în domeniu, şi de valori la limită ale anumitor funcţii — va fi formula lui Riemann-Ostrogradskii (vezi de ex. M. Nicolescu et al. [1], vol. 2, cap. 9)

$$\oint_{\mathscr{C}} [P_1(x_1,x_2)\, n_1 + P_2(x_1,x_2)\, n_2]\, \mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{A}^+} (P_{1,1} + P_{2,2})\, \mathrm{d}D, \tag{18}$$

unde am notat cu $\mathscr{C}$ frontiera domeniului (simplu conex sau multiplu conex) $\mathscr{A}^+ \subseteq \mathscr{D}$.

Această formulă este valabilă dacă $\mathscr{C}$ este o curbă netedă pe porţiuni, iar funcţiile P_1, P_2 au derivate parţiale de primul ordin mărginite şi integrabile (în particular, continue) în $\mathscr{A}^+$. Pentru detalii asupra cadrului de valabilitate al acestei formule (şi în general al formulelor stokiene) vezi O. Kellog [1], § 4.12; K. Krickeberg [1]; M. Nicolescu et al. [1], volumul 2, capitolele 9 şi 19; S. Stoilov [1], volumul 2, § 1.2; vezi de asemenea I. Ghelfand şi G. Şilov [1], § 3.1, pct. 1.

Ţinînd seama de (12), putem pune (18) şi sub forma

$$\oint_{\mathscr{C}} P_1\, \mathrm{d}x_2 - P_2\, \mathrm{d}x_1 = \iint_{\mathscr{A}^+} (P_{1,1} + P_{2,2})\, \mathrm{d}D. \tag{19}$$

Dacă $\mathscr{A}^+$ este multiplu conex, sensul de parcurs este cel direct pe componenta exterioară a lui $\mathscr{C}$, şi cel retrograd pe componentele interioare.

§ 4. FUNCŢII DE PUNCT CA FUNCŢII DE DOUĂ VARIABILE COMPLEXE CONJUGATE

a) *Variabile* $\mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{z}}$

Toate formulele din capitolele 5 şi 6 presupun că avem de-a face cu planul raportat la coordonate carteziene ortogonale x_1, x_2, aşadar planul în care s-a stabilit o corespondenţă biunivocă între puncte şi perechile ordonate de numere reale (x_1, x_2). Ataşînd fiecărui punct numărul complex $\mathfrak{z} = x_1 + \mathrm{i}\, x_2$ (punctul de la infinit se notează $\mathfrak{z}_\infty$), rezultă că orice funcţie de punct $G(x_1, x_2)$ poate fi privită ca funcţie de variabila complexă $\mathfrak{z}$.

Proprietăţile acestei funcţii nu apar însă ca o generalizare firească a celor ale funcţiei iniţiale. În afară de aceasta, dacă — aşa cum este frecvent cazul — funcţia $G(x_1, x_2)$ este dată prin intermediul unei „formule", care permite construirea valorii $G(x_1, x_2)$ prin operaţii precizate asupra numerelor x_1, x_2 — această formulă nu poate fi în general transcrisă numai cu ajutorul variabilei $\mathfrak{z}$.

Introducînd însă şi operaţia de *conjugare*, şi considerînd variabilele complexe conjugate

$$\mathfrak{z} = x_1 + \mathrm{i}x_2, \quad \bar{\mathfrak{z}} = x_1 - \mathrm{i}x_2, \tag{1}$$

obţinem evident

$$x_1 = \mathrm{Re}\,\mathfrak{z} = \frac{1}{2}(\mathfrak{z} + \bar{\mathfrak{z}}), \quad x_2 = \mathrm{Im}\,\mathfrak{z} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathfrak{z} - \bar{\mathfrak{z}}). \tag{2}$$

Prin urmare, este convenabil ca orice funcţie (reală sau complexă) de punct $G(x_1, x_2)$ să fie pusă sub forma

$$G(x_1, x_2) \equiv G(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}), \tag{3}$$

unde membrul al doilea poate fi întotdeauna *efectiv* scris cu ajutorul unei formule, dacă membrul întîi posedă această proprietate.

(Remarcăm că, printr-un anumit abuz de notaţie, vom păstra simbolul funcţional G, independent de faptul că avem de-a face cu variabilele x_1, x_2 sau $\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}$.)

Desigur, $\bar{\mathfrak{z}}$ este în fapt o funcţie (chiar funcţie continuă) de $\mathfrak{z}$. Aceasta nu este însă o funcţie derivabilă, întrucît raportul

$$\frac{\delta\bar{\mathfrak{z}}}{\delta\mathfrak{z}} = \frac{\delta x_1 - \mathrm{i}\delta x_2}{\delta x_1 + \mathrm{i}\delta x_2} = \frac{1 - (\delta x_2/\delta x_1)^2}{1 + (\delta x_2/\delta x_1)^2} - 2\mathrm{i}\,\frac{(\delta x_2/\delta x_1)}{1 + (\delta x_2/\delta x_1)^2} \tag{4}$$

nu posedă o limită unic determinată pentru $\delta\mathfrak{z} \to 0$.

Tocmai aceasta explică motivul pentru care nu este convenabil a privi funcţia G ca funcţie de *o singură* variabilă complexă $\mathfrak{z}$.

Dacă pentru un $\mathfrak{z}$ dat, valoarea funcţiei $G(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ este deplin determinată (aşadar, dacă G depinde de punct, şi nu şi de drumul pe care acest

punct a fost atins), funcţia se numeşte *uniformă*. Dacă pentru $\mathfrak{z}' \neq \mathfrak{z}''$ avem $G(\mathfrak{z}', \bar{\mathfrak{z}}') \neq G(\mathfrak{z}'', \bar{\mathfrak{z}}'')$, funcţia se numeşte *univalentă*.

Aşadar, pentru o funcţie uniformă, unui punct $\mathfrak{z}$ îi corespunde cel mult o valoare $G(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$; pentru o funcţie univalentă, unei valori G îi corespunde cel mult un punct $\mathfrak{z}$ în aşa fel încît $G = G(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$.

b) *Operatori diferenţiali*

Să privim formulele (1) ca definind o schimbare de variabile *independente*. Folosind pentru derivatele parţiale în raport cu $\mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{z}}$ notaţia adoptată în § 1.1, pag. 33, avem deci

$$G_{,\mathfrak{z}} = \frac{1}{2}(G_{,1} - \mathrm{i}G_{,2}), \quad G_{,\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{1}{2}(G_{,1} + \mathrm{i}G_{,2}), \tag{5}$$

sau încă

$$G_{,1} = G_{,\mathfrak{z}} + G_{,\bar{\mathfrak{z}}}, \quad G_{,2} = \mathrm{i}(G_{,\mathfrak{z}} - G_{,\bar{\mathfrak{z}}}). \tag{6}$$

De aci obţinem uşor mai departe

$$G_{,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{1}{4}(G_{,11} + G_{,22}) = \frac{1}{4}\Delta G, \quad G_{,\mathfrak{z}\mathfrak{z}} = \frac{1}{4}(G_{,11} - G_{,22} - 2\mathrm{i}\, G_{,12}), \tag{7}$$

(unde Δ este operatorul lui Laplace în 2 variabile).

Avînd în vedere utilizarea coordonatelor polare

$$\mathfrak{z} = R \exp(\mathrm{i}\chi), \tag{8}$$

se stabilesc şi formulele

$$\begin{aligned} G_{,R} &= [\exp(\mathrm{i}\chi)]\, G_{,\mathfrak{z}} + [\exp(-\mathrm{i}\chi)]\, G_{,\bar{\mathfrak{z}}}, \\ G_{,\chi} &= \mathrm{i}R\{[\exp(\mathrm{i}\chi)]\, G_{,\mathfrak{z}} - [\exp(-\mathrm{i}\chi)]\, G_{,\bar{\mathfrak{z}}}\}, \end{aligned} \tag{9}$$

sau încă

$$G_{,\mathfrak{z}} = \frac{1}{2}[\exp(-\mathrm{i}\chi)]\,[G_{,R} - \mathrm{i}R^{-1}\, G_{,\chi}]. \tag{10}$$

(Expresia derivatei în raport cu $\bar{\mathfrak{z}}$ obţinîndu-se — ca şi în (5) de altfel — prin trecerea în membrul al doilea la cantitatea conjugată.)

Din (7) şi (10) căpătăm încă pentru operatorul lui Laplace

$$\Delta G = G_{,11} + G_{,22} = 4G_{,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = G_{,RR} + R^{-1}\, G_{,R} + R^{-2}\, G_{,\chi\chi}. \tag{11}$$

Pentru orice funcţie complexă de clasă C^1

$$f(x_1, x_2) \equiv f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = f_1(x_1, x_2) + \mathrm{i}f_2(x_1, x_2) \tag{12}$$

unde f_1, f_2 sînt reale, obţinem din (5) formulele

$$f_{,\mathfrak{z}} = \frac{1}{2}\,[(f_{1,1} + f_{2,2}) + \mathrm{i}\,(f_{2,1} - f_{1,2})],$$
$$f_{,\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{1}{2}\,[(f_{1,1} - f_{2,2}) + \mathrm{i}\,(f_{2,1} + f_{1,2})]. \tag{13}$$

În particular, avem evident (compară cu (4))

$$\bar{\mathfrak{z}}_{,\mathfrak{z}} = 0, \tag{14}$$

ceea ce subliniază caracterul *exterior* al operaţiei de conjugare, şi permite să considerăm formal variabilele $\mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{z}}$ ca *variabile independente* din punctul de vedere al proprietăţilor diferenţiale.

Subliniem faptul că toate operaţiile care îşi au originea în (1)—(6) au un caracter formal : $\mathfrak{z}$ şi $\bar{\mathfrak{z}}$ nu sînt variabile independente, „derivatele" din (5) nu sînt în fapt derivate (limite de rapoarte de creşteri elementare) etc. Totuşi, acest mod a raţiona este extrem de util, şi el poate fi riguros fundamentat. (Vezi L. Ahlfors [1], § 2.1, pag. 41—42). Totodată, el poate fi privit ca un drum euristic ce conduce la anumite rezultate, întotdeauna cu putinţă de verificat à-posteriori.

„A integra în raport cu $\mathfrak{z}$" — înseamnă *a găsi o funcţie a cărei derivată* — în sensul din (5) — *în raport cu să fie funcţia dată*. În calcularea acestor integrale nu e deci vorba nici odată de drumuri de integrare, de condiţii la limită etc. Din (14) se vede limpede de ce este îngăduit să tratăm aci pe $\mathfrak{z}$ şi $\bar{\mathfrak{z}}$ ca variabile *independente*, din punctul de vedere al proprietăţilor legate de operaţiile de derivare. Anumite precauţiuni sînt desigur necesare (vezi de ex. N. Musheli̦şvili [5], § 2.2) — dar raţionamente ca de exemplu cele din (5.2)—(5.4) sînt întotdeauna permise ; iar formula lui Pompeiu (vezi mai jos, pag. 710) permite să înlăturăm orice dubiu, chiar şi în cazul unor funcţii care nu sînt funcţii analitice de *o singură* variabilă complexă.

Pentru a găsi extremele funcţiei $G(x_1, x_2)$, trebuie să căutăm soluţiile sistemului

$$G_{,1} = G_{,2} = 0, \tag{15}$$

şi să verificăm dacă în punctele corespunzătoare avem

$$(G_{,12})^2 - G_{,11}\,G_{,22} < 0. \tag{16}$$

În acest caz, avem un maximum sau un minimum, după cum $G_{,11}$ (sau — ceea ce este acelaşi lucru — $G_{,22}$) este negativ sau pozitiv.

Ţinînd seama de (5)—(10), putem înlocui (15) prin ecuaţia

$$G_{,\bar{\mathfrak{z}}} = 0\,, \tag{17}$$

sau încă, dacă este convenabil să facem uz de coordonate polare :

$$G_{,R} - \mathrm{i}\,R^{-1}\,G_{,\chi} = 0, \tag{18}$$

Întrucît avem

$$(G_{,12})^2 - G_{,11}\,G_{,22} = 4\,[G_{,\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\;G_{,\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}} - (G_{,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}})^2] =$$
$$= R^{-2}\,[(G_{,R\chi} - R^{-1}\,G_{,\chi})^2 - G_{,RR}\,(G_{,\chi\chi} + RG_{,R})], \tag{19}$$

de aci deducem uşor condiţiile ce înlocuiesc condiţia (16).

În fine, întrucît avem

$$G_{,\mathfrak{z}\mathfrak{z}} = \frac{1}{4}\,[\exp(-2i\chi)]\,[(G_{,RR} - R^{-1}G_{,R} - R^{-2}G_{,\chi\chi}) - 2i\,(R^{-1}G_{,R\chi} - R^{-2}G_{,\chi})],$$

deducem ușor

$$G_{,11} = G_{,\mathfrak{z}\mathfrak{z}} + G_{,\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}} + 2G_{,\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{1}{2}(G_{,RR} - R^{-1}G_{,R} - R^{-2}G_{,\chi\chi})\cos 2\chi -$$

$$-(R^{-1}G_{,R\chi} - R^{-2}G_{,\chi})\sin 2\chi + \frac{1}{2}(G_{,RR} + R^{-1}G_{,R} + R^{-2}G_{,\chi\chi}), \tag{20}$$

ceea ce permite să determinăm natura extremului în variabile complexe sau polare.

Aceste criterii *își pierd valabilitatea pe frontiera* domeniului; de aceea este necesar să se considere și valoarea la limită a derivatei normale $G_{,n}|_{\mathscr{L}}$, și să se caute și extremele derivatei tangențiale pe frontieră $G_{,s}|_{\mathscr{L}}$.

Dacă $\mathfrak{z}$ se deplasează pe o curbă $\mathscr{C}$ de clasă C^1, din (1) și (3.12) urmează

$$\mathfrak{z}'(s) = x_1'(s) + ix_2'(s) = -n_2 + in_1 = i(\cos\hat{\vartheta} + i\sin\hat{\vartheta}),$$

adică

$$\mathfrak{z}'(s) = i\exp(i\hat{\vartheta}), \quad \exp(i\hat{\vartheta}) = -i\mathfrak{z}'(s). \tag{21}$$

Prin urmare, pentru versorii $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}$ definiți în (3.12), putem folosi *notațiile* complexe (acestea nu sînt egalități!)

$$\boldsymbol{s} = (x_1', x_2') = \mathfrak{z}'(s), \quad \boldsymbol{n} = (x_2', -x_1') = -i\mathfrak{z}'(s); \tag{22}$$

(înmulțirea cu $-i$ corespunde, evident, rotirii de 90° în sens retrograd).

Ținînd seama de (5), avem pentru orice funcție complexă $f_1 + i f_2$:

$$f_{,\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}'(s) = \frac{1}{2}\,[(f_{,1}x_1' + f_{,2}x_2') + i(f_{,1}x_2' - f_{,2}x_1')],$$

de unde, utilizînd și (3.12):

$$f_{,\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}'(s) = \frac{1}{2}(f_{,s} + i f_{,n}), \tag{23}$$

și analog

$$f_{,\bar{\mathfrak{z}}}\,\overline{\mathfrak{z}'(s)} = \frac{1}{2}(f_{,s} - i f_{,n}). \tag{24}$$

Pentru o funcție complexă oarecare deducem de aci

$$f_{,s} = f_{,\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}'(s) + f_{,\bar{\mathfrak{z}}}\,\overline{\mathfrak{z}'(s)}, \quad f_{,n} = -\,\mathrm{i}\,[f_{,\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}'(s) - f_{,\bar{\mathfrak{z}}}\,\overline{\mathfrak{z}'(s)}]. \tag{25}$$

Dacă f este reală, atunci (24) decurge din (23) prin conjugare, iar (25) conduce la

$$f_{,s} = 2\,\mathrm{Re}\,[f_{,\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}'(s)], \quad f_{,n} = 2\,\mathrm{Im}\,[f_{,\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}'(s)]. \tag{26}$$

c) *Integrala definită. Condiții de uniformitate*

Integrala curbilinie

$$I(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \int_{P_0}^{P} f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})\,\mathrm{d}\mathfrak{z} + g(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} \tag{27}$$

— unde f, g sînt funcții complexe *uniforme* — se poate calcula prin separarea părților reală și imaginară; aceasta conduce la a calcula două integrale curbilinii reale pe curbe care merg din punctul P_0 în punctul (fix sau variabil) P. În general, astfel de integrale nu sînt uniforme.

Ca funcție de limita sa superioară, integrala (27) este o funcție derivabilă:

$$I_{,\mathfrak{z}} = f, \quad I_{,\bar{\mathfrak{z}}} = g. \tag{28}$$

Pentru a stabili condițiile în care (27) este o funcție uniformă, trebuie să utilizăm analogul complex al formulei lui Riemann-Ostrogradski (3.19), care poartă numele de *formula complexă a lui Stokes* (L. Milne-Thomson [3], § 3.25):

$$\oint_{\mathscr{C}} f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})\,\mathrm{d}\mathfrak{z} + g(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = 2\mathrm{i}\iint_{\mathscr{A}^+} (f_{,\bar{\mathfrak{z}}} - g_{,\mathfrak{z}})\,\mathrm{d}D, \tag{29}$$

unde $\mathscr{C}$ este frontiera domeniului mărginit $\mathscr{A}^+$ (eventual multiplu conex).

Această formulă se demonstrează ușor, ținînd seama de relațiile (13), separînd partea reală de cea imaginară, și utilizînd (3.19). În particular, din (29) urmează

$$\mathrm{Re}\oint_{\mathscr{C}} f\,\mathrm{d}\mathfrak{z} = -\,2\,\mathrm{Im}\iint_{\mathscr{A}^+} f_{,\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}D, \quad \mathrm{Im}\oint_{\mathscr{C}} f\,\mathrm{d}\mathfrak{z} = 2\,\mathrm{Re}\iint_{\mathscr{A}^+} f_{,\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}D. \tag{30}$$

Să admitem acum că $I(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ din (27) este uniformă în $\mathscr{D}$. De aci urmează evident

$$\oint_{\mathscr{C}} f\,\mathrm{d}\mathfrak{z} + g\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = 0 \tag{31}$$

pe *orice* curbă închisă $\mathscr{C}$ situată în $\mathscr{D}$. Comparînd relaţiile (29) şi (31), rezultă că în *orice* porţiune $\mathscr{A}^+ \subseteq \mathscr{D}$, trebuie să avem

$$\iint_{\mathscr{A}^+} (f_{.\bar{z}} - g_{.z})\, \mathrm{d}D = 0. \tag{32}$$

Or, dacă o funcţie continuă este diferită de zero într-un punct, există un domeniu de măsură (arie) nenulă în care ea îşi păstrează semnul. Prin urmare, din (32) urmează condiţia *necesară* de uniformitate :

$$f_{.\bar{z}} = g_{.z} \quad \text{în } \mathscr{D}. \tag{33}$$

Fie acum, dimpotrivă, condiţia (33) satisfăcută. Din (33) şi (29) rezultă deci că (31) este verificată pe frontiera $\mathscr{C}$ a *oricărui* domeniu $\mathscr{A}^+ \subseteq \mathscr{D}$.

Să presupunem mai întîi că $\mathscr{D}$ este simplu conex. Atunci *orice* curbă simplă închisă $\mathscr{C}$ conţinută în $\mathscr{D}$ defineşte un domeniu simplu conex $\mathscr{A}^+$, pe frontiera căruia este verificată relaţia (31). Prin urmare, integrala $I(z, \bar{z})$ calculată pe *orice* curbă din $\mathscr{D}$, nu depinde de curbă, ci numai de capetele sale, şi (33) rezultă a fi totodată o condiţie *suficientă* de uniformitate a integralei (27).

Să presupunem în fine că $\mathscr{D}$ este multiplu conex. În acest caz, există curbe simple închise $\mathscr{C}'$ conţinute în $\mathscr{D}$, care definesc domenii $\mathscr{A}^+$ multiplu conexe : de exemplu, o curbă $\mathscr{C}^j$ care conţine în interior o componentă $\mathscr{L}_j$. Întrucît (29) este valabilă pe frontiera lui $\mathscr{A}^+$, urmează (ţinînd seama de sensul opus de parcurs pe $\mathscr{C}^j$ şi $\mathscr{L}_j$, şi presupunînd că funcţiile f, g sînt prelungibile pe $\mathscr{L}_j$) :

$$\oint_{\mathscr{C}^j} f\,\mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}\bar{z} = \oint_{\mathscr{L}_j} f\,\mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{34}$$

Întrucît nu există nici un motiv pentru ca această din urmă integrală să fie nulă, înseamnă că integrala pe $\mathscr{C}^j$ poate fi diferită de zero, şi deci valorile integralei $I(z, \bar{z})$ pe două curbe deschise ce formează împreună o curbă $\mathscr{C}'$ *care conţine în interiorul ei o componentă* $\mathscr{L}_j$ *a frontierei*, pot fi diferite.

Prin urmare, (33) este condiţia *necesară şi suficientă* de uniformitate a integralei (27) numai în cazul unui domeniu simplu conex. În cazul unui domeniu multiplu conex, ea rămîne numai ca condiţie *necesară* de uniformitate.

Să considerăm acum — mai general — o funcţie de punct $\varphi(z, \bar{z})$ cu proprietăţi care vor permite apoi să cuprindem şi cazul integralei (27) în $\mathscr{D}$ multiplu conex drept caz particular.

Pentru variaţia unei funcţii φ între punctele A, B din $\mathscr{D}$, vom folosi notaţia

$$[\varphi]_A^B = \varphi(z_B, \bar{z}_B) - \varphi(z_A, \bar{z}_A). \tag{35}$$

Desigur, orice curbă închisă $\mathscr{C}'$ poate fi privită ca parcursă pornind dintr-un punct al ei P^- şi sosind în punctul P^+, punctele P^- şi P^+ fiind confundate geometric. Variaţia funcţiei φ se va scrie

$$[\varphi]_{P^- \mathscr{C}' P^+} = \varphi(\mathfrak{z}_{P^+}, \bar{\mathfrak{z}}_{P^+}) - \varphi(\mathfrak{z}_{P^-}, \bar{\mathfrak{z}}_{P^-}). \tag{36}$$

Dacă această variaţie nu depinde de P, vom scrie mai simplu

$$[\varphi]_{P^- \mathscr{C}' P^+} = [\varphi]_{\mathscr{C}'}, \tag{37}$$

subînţelegînd că $\mathscr{C}'$ e parcursă în sens direct.

Condiţia de uniformitate a funcţiei φ într-o porţiune $\mathscr{D}' \subseteq \mathscr{D}$ se scrie deci

$$[\varphi]_{\mathscr{C}'} = 0 \tag{38}$$

pentru *orice* curbă închisă $\mathscr{C}'$ din $\mathscr{D}'$.

Să demonstrăm că : dacă o funcţie de punct $\varphi(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$, este continuă în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$, uniformă în orice porţiune simplu conexă a lui $\mathscr{D}$, şi satisface pentru orice puncte P, Q ce pot fi privite ca aparţinînd unei tăieturi, condiţia

$$[\varphi]_{P^+}^{Q^+} = [\varphi]_{P^-}^{Q^-}, \tag{39}$$

atunci variaţia ei pe orice curbă închisă $\mathscr{C}'$ din $\mathscr{D}$ depinde numai de variaţia ei pe componentele interioare ale frontierei, cuprinse în $\mathscr{C}'$.

Într-adevăr, să atribuim rolul curbei $\mathscr{C}'$ la două curbe simple închise $\mathscr{L}_j'$, $\mathscr{L}_j''$ care nu se intersectează, sînt conţinute în $\mathscr{D}$, şi cuprind în interior numai componenta $\mathscr{L}_j$ a frontierei.

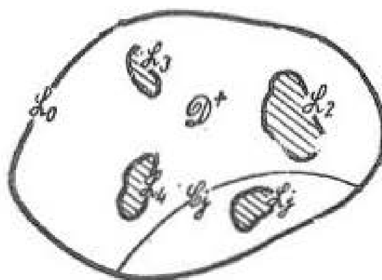


Fig. A.4.1 a

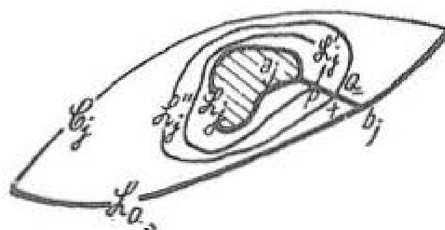


Fig. A.4.1 b

Fie $\mathscr{C}_j$ o curbă care separă din $\mathscr{D}$ un domeniu dublu conex care conţine ambele curbe $\mathscr{L}_j'$, $\mathscr{L}_j''$. Fie $a_j b_j$ o tăietură care transformă acest domeniu într-un domeniu simplu conex. În fine, fie P şi Q punctele de intersecţie ale acestei tăieturi cu $\mathscr{L}_j'$ şi $\mathscr{L}_j''$.

Întrucît curba $Q^- \mathscr{L}_j'' Q^+ P^+ \mathscr{L}_j' P^- Q^-$ este situată într-o porţiune simplu conexă din $\mathscr{D}$, urmează că variaţia funcţiei φ în lungul ei este nulă. (Curba $\mathscr{L}_j''$ este parcursă în sens direct, iar $\mathscr{L}_j'$, în sens retrograd.) Avem prin urmare, ţinînd seama de (39) şi de sensul de parcurs :

$$[\varphi]_{P^- \mathscr{L}_j' P^+} = [\varphi]_{Q^- \mathscr{L}_j'' Q^+}.$$

Punctele P, Q fiind oarecare, rezultă evident că variațiile funcției φ nu depind de alegerea lor; întrucît funcția φ este continuă în $\mathscr{D} + \mathscr{L}$, avem în definitiv

$$[\varphi]_{\mathscr{L}'_j} = [\varphi]_{\mathscr{L}''_j} = [\varphi]_{\mathscr{L}_j}. \tag{40}$$

Rezultatul rămîne valabil dacă $\mathscr{C}'$ are puncte duble. El se poate generaliza la curbe închise care conțin în interior mai multe componente interioare ale frontierei; în acest caz avem

$$[\varphi(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})]_{\mathscr{C}'} = \sum_{j=1}^{m} n_j \, [\varphi]_{\mathscr{L}_j}, \tag{41}$$

unde n_j este diferența dintre numărul de drumuri închise parcurse pe $\mathscr{C}'$ în sens direct în jurul lui $\mathscr{L}_j$, și numărul celor parcurse în sens retrograd.

În figura A.4.2 am considerat din nou domeniul din figura A.3.1, și o curbă închisă $\mathscr{C}' = P_0PP_0$. Aceasta poate fi descompusă în suma curbei închise P_0aefhijPlmnoP_0, situată în întregime în domeniul simplu conex $\widetilde{\mathscr{D}}^+$, și a anumitor curbe închise care conțin fiecare cîte o singură componentă interioară a frontierei. Tăieturile de pe figura A.3.3. sînt identice

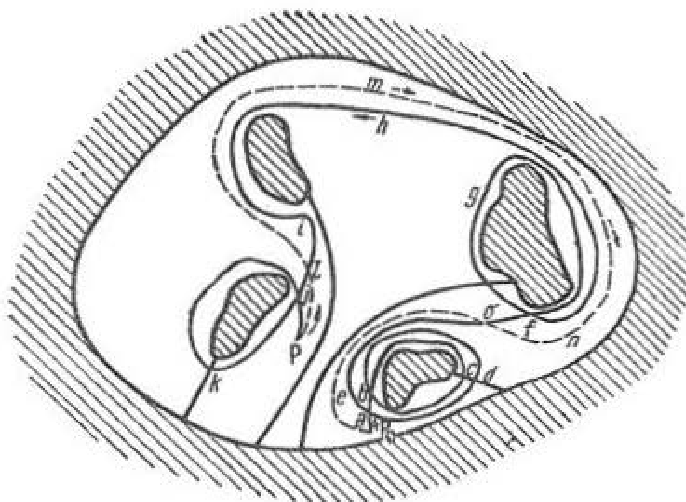


Fig. A.4.2

cu cele de pe figura A.4.2; ele sînt trasate în așa fel încît să traverseze *numai* aceste curbe închise, și nici o porțiune a curbei date a cărei traversare poate fi evitată.

Prin urmare, în acest exemplu avem

$$[\varphi]_{\mathscr{C}'} = -2\,[\varphi]_{\mathscr{L}_1} + [\varphi]_{\mathscr{L}_2} - [\varphi]_{\mathscr{L}_4}.$$

Putem studia acum aspectul integralei (27) pe orice curbă din $\mathscr{D}^+$. Într-adevăr, dacă condiția (33) este satisfăcută, aceasta este o funcție uniformă în orice porțiune simplu conexă din $\mathscr{D}^+$. Întrucît funcțiile f și g sînt uniforme, ea satisface și condiția (39). Prin urmare, i se pot aplica cele spuse despre funcția $\varphi(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$.

Pe orice curbă închisă $\mathscr{C}'$ avem evident

$$[I]_{\mathscr{C}'} = \oint_{\mathscr{C}'} f\,\mathrm{d}\mathfrak{z} + g\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}\,. \tag{42}$$

În particular, vom nota

$$I_j = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\,[I(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})]_{\mathscr{L}_j} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\mathscr{L}_j} f\,\mathrm{d}\mathfrak{z} + g\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}\,. \tag{43}$$

Întrucît am presupus că f și g sînt uniforme, integralele (43) sînt niște constante, numite *constantele ciclice* [3]) sau *perioadele* integralei $I(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})$.

Evident, orice curbă deschisă $\mathscr{C}$ mergînd din P_0 în P poate fi completată cu o curbă deschisă $\mathscr{C}_1$ mergînd din P în P_0, formînd astfel o curbă închisă $\mathscr{C}'$. Alegînd pentru $\mathscr{C}_1$ o curbă simplă deschisă (care nu conține deci în interior nici o componentă interioară a frontierei), făcînd uz de formula (41) și ținînd seama de sensul de parcurs, obținem

$$[\mathrm{I}]_{\mathscr{C}+\mathscr{C}_1} = \sum_{j=1}^{m} n_j\,[I]_{\mathscr{L}_j}\,,$$

de unde

$$\int_{P_0\mathscr{C}P} f\mathrm{d}\mathfrak{z} + g\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \int_{P_0\mathscr{C}_1P}(f\,\mathrm{d}\mathfrak{z} + g\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}) + \sum_{j=1}^{m} n_j \oint_{\mathscr{L}_j} f\,\mathrm{d}\mathfrak{z} + g\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}\,,$$

ceea ce se va scrie mai pe scurt

$$\mathrm{I}(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = I_1(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) + 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m} n_j\,I_j\,, \tag{44}$$

unde integrala $I_1(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})$ poate fi calculată pe *orice* curbă $\mathscr{C}_1$ între P_0 și P, care nu iese din $\widetilde{\mathscr{D}}^+$, așadar *nu traversează* tăieturile.

În exemplul din figura A.4.2., integrala I_1 poate fi calculată de pildă pe curba P_0onmlP. Avem deci

$$I(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = I_1(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) + 2\pi\mathrm{i}\,(-\,2I_1 + I_2 - I_4).$$

Din (44) rezultă deci : condiția *necesară și suficientă* pentru ca integrala (27) să fie o funcție uniformă în domeniul multiplu conex $\mathscr{D}^+$, este ca să fie satisfăcută condiția (33), *și* ca perioadele I_j din (43) să fie nule.

d) Formula lui D. Pompeiu [1], [2]

Să considerăm o curbă simplă închisă $\mathscr{C}$ în $\mathscr{D}$ și să presupunem că ea nu cuprinde în interior nici o componentă a frontierei. Domeniul simplu conex mărginit de $\mathscr{C}$ se va nota cu $\mathscr{A}^+$. Să notăm cu $\mathrm{Z} = X_1 + \mathrm{i}\,X_2$ un punct curent în $\mathscr{D}$ și să considerăm funcția

$$g(\mathrm{Z},\bar{\mathrm{Z}};\mathfrak{z}) = \frac{f(\mathrm{Z},\bar{\mathrm{Z}})}{\mathrm{Z}-\mathfrak{z}} \tag{45}$$

[3]) Uneori, acest nume este atribuit constantelor $2\pi\mathrm{i}I_j$.

pentru un punct oarecare, însă fix, $\mathfrak{z} \in \mathscr{A}^+ \subseteq \mathscr{D}$, f fiind o funcție uniformă $f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) \in C^1(\mathscr{D}) \cap \cap C^0(\mathscr{D} + \mathscr{L})$.

Trasînd un cerc γ' definit de $|Z - \mathfrak{z}| = \varepsilon$, și o tăietură de la γ' la $\mathscr{C}$, putem aplica formula (29) funcției (45). Obținem evident

$$\oint_{\mathscr{C}} \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - \mathfrak{z}} dZ - \oint_{\gamma'} \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - \mathfrak{z}} dZ = 2i \iint_{\mathscr{A}^+} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \left[\frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - \mathfrak{z}} \right] dX_1 dX_2. \tag{46}$$

Trecînd la coordonate polare $Z = \mathfrak{z} + \varepsilon \exp(i\theta)$ pe γ', obținem cu ajutorul primei teoreme a mediei

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma'} \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - \mathfrak{z}} dZ = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}; \varepsilon, \theta)}{\varepsilon \exp(i\theta)} \varepsilon i \exp(i\theta) d\theta = 2\pi i f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}),$$

astfel că (46) conduce la *formula lui Pompeiu*

$$f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - \mathfrak{z}} dZ - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathscr{A}^+} \frac{\partial f(Z, \bar{Z})}{\partial \bar{Z}} \frac{dX_1 dX_2}{Z - \mathfrak{z}}. \tag{48}$$

În felul acesta se obțin valorile funcției f în $\mathscr{A}^+$ dacă se cunosc valorile sale pe $\mathscr{C}$, și valorile derivatei sale în $\mathscr{A}^+$. Prin urmare, formula lui Pompeiu dă soluția ecuației $f_{,\bar{\mathfrak{z}}} = F$, dacă F și valoarea la limită a lui f sînt cunoscute.

Formula rămîne adevărată dacă $\mathscr{C}$ este frontiera unui domeniu multiplu conex conținut în $\mathscr{D}$ — și, în particular, dacă $\mathscr{C} = \mathscr{L}$ și $\mathscr{A}^+ = \mathscr{D}$ — cu condiția ca formula complexă a lui Stokes (29) să-și păstreze valabilitatea.

Trecînd în (48) la cantități complex conjugate și notînd apoi funcția $\bar{f}$ din nou cu f, obținem și

$$f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} \frac{f(Z, \bar{Z})}{\bar{Z} - \bar{\mathfrak{z}}} d\bar{Z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathscr{A}^+} \frac{\partial f(Z, \bar{Z})}{\partial Z} \frac{dX_1 dX_2}{\bar{Z} - \bar{\mathfrak{z}}}. \tag{49}$$

Studiul amănunțit al formulei de tip Pompeiu (cadru de valabilitate, operatori diferențiali și integrali asociați etc.) ține de teoria funcțiilor analitice generalizate. Pentru detalii, vezi I. Vekua [1], capitolul 1.

§ 5. FUNCȚII ANALITICE DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

Un deosebit interes îl prezintă studiul funcțiilor care din punct de vedere analitic sînt funcții de *o singură* variabilă complexă:

$$f = f(\mathfrak{z}). \tag{1}$$

a) *Funcții uniforme. Serii. Singularități*

Vom considera deocamdată numai funcții *uniforme* de $\mathfrak{z}$. Definițiile funcțiilor continue, hölderiene, cu variație mărginită, sînt similare celor din domeniul real.

Dacă funcția considerată este *diferențiabilă* ca funcție de x_1, x_2 (sau, ceea ce e același lucru, de $\mathfrak{z}$, $\bar{\mathfrak{z}}$), atunci (1) echivalează cu

$$f_{,\bar{\mathfrak{z}}} = 0. \tag{2}$$

În acest caz, $f(\mathfrak{z})$ posedă o derivată unică

$$f'(\mathfrak{z}) = f_{,\mathfrak{z}}, \tag{3}$$

care nu depinde de direcția după care e atins punctul $\mathfrak{z}$. O astfel de funcție se numește *monogenă* sau *olomorfă* (într-un punct, respectiv un domeniu).

Ținînd seama de (4.5), obținem din (2) condițiile necesare pe care le verifică partea reală și partea imaginară a oricărei funcții monogene $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$: *ecuațiile lui Cauchy-Riemann*

$$f_{1,1} = f_{2,2}, \qquad f_{1,2} = -f_{2,1}. \tag{4}$$

Verificarea ecuațiilor (4) nu este suficientă pentru a asigura monogeneitatea. Dacă însă f_1 și f_2 sînt diferențiabile (sau chiar numai continue) atunci funcția $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ pentru care ecuațiile (4) sînt verificate, rezultă a fi monogenă (vezi de ex. I. Privalov [2], § 2.4).

Din ecuațiile (4) urmează că funcțiile f_1, f_2 satisfac ecuația lui Laplace. Astfel de funcții se numesc *armonice conjugate*.

Orice funcție armonică poate fi privită ca parte reală (sau imaginară) a unei funcții de o variabilă complexă, de clasă cel puțin C^2. (Vom vedea că este suficient ca funcția să fie presupusă de clasă C^1.) Acest fapt explică strînsa legătură dintre teoria funcțiilor de o variabilă complexă și studiul ecuației lui Laplace sau al unor ecuații înrudite (ecuația lui Poisson, ecuația biarmonică). Pentru o expunere consecventă a acestui punct de vedere în integrarea ecuației lui Laplace, vezi de exemplu C. Iacob [5], capitolul 1; S. Stoilov [1], volumul 2, §§ 1.1–1.8; capitolul 2.

Condiția (2) se cere satisfăcută pe *orice* drum parcurs de punctul $\bar{\mathfrak{z}}$ în acel domeniu în care f are forma (1). Aceasta înseamnă că ecuațiile (2) sau (4) se înțeleg ca fiind satisfăcute în toate punctele *interioare*, dar nu în puncte frontieră ale domeniului de definiție. Acest fapt obligă la a considera numai *domenii* (mulțimi deschise și conexe) ca mulțimi de definiție pentru funcțiile ce ne vor interesa. Dacă anumite proprietăți vor fi valabile și pe frontieră, aceasta se va specifica aparte.

Făcînd uz de (4.5), ecuațiile (4) se pot pune și sub forma

$$f_{1,\mathfrak{z}} = \mathrm{i} f_{2,\mathfrak{z}}, \qquad f_{1,\bar{\mathfrak{z}}} = -\mathrm{i} f_{2,\bar{\mathfrak{z}}}. \tag{5}$$

Din (4.24) deducem ca condiție echivalentă cu (2), condiția

$$f_{,s} = \mathrm{i} f_{,n}, \tag{6}$$

verificată pentru *orice* curbă din interiorul domeniului de definiție. În acest caz, din (4.23) obținem pentru $f = f(\mathfrak{z})$:

$$f_{,\mathfrak{z}}\mathfrak{z}'(s) = f_{,s} = \mathrm{i}\, f_{,n} \,. \tag{7}$$

Ecuația (6) conduce la generalizarea formală a ecuațiilor (4):

$$f_{1,n} = f_{2,s}, \quad f_{1,s} = -f_{2,n} \,. \tag{8}$$

În cele ce urmează ne vom ocupa mai întîi de funcții olomorfe definite în domenii $\mathscr{D}$, mărginite de linii $\mathscr{L}$ cu componente închise.

Dacă $f(\mathfrak{z})$ este olomorfă în $\mathscr{D}$, atunci pentru orice curbă netedă pe porțiuni $\mathscr{C}$ (închisă sau deschisă) cuprinsă în $\mathscr{D}$, poate fi definită integrala

$$\int_{\mathscr{C}} f(\mathfrak{z})\,\mathrm{d}\mathfrak{z}, \tag{9}$$

a cărei valoare depinde în general atît de funcția $f(\mathfrak{z})$, cît și de curba $\mathscr{C}$. Un rezultat fundamental îl constituie *teorema lui Cauchy*: dacă $f(\mathfrak{z})$ este olomorfă în $\mathscr{D}$, atunci avem

$$\oint_{\mathscr{C}} f(\mathfrak{z})\,\mathrm{d}\mathfrak{z} = 0, \tag{10}$$

unde $\mathscr{C}$ este frontiera oricărui domeniu (eventual multiplu conex) $\mathscr{A}^+ \subset \mathscr{D}$.

Teorema rămîne valabilă și pe $\mathscr{L}$, dacă $f(\mathfrak{z}) \in C^0(\mathscr{D} + \mathscr{L})$. Dacă $\mathscr{A}^+$ este multiplu conex, (10) se înțelege ca *sumă* a integralelor luate pe toate componentele lui $\mathscr{L}$ (în sens direct pe $\mathscr{L}_0$, și în sens retrograd pe $\mathscr{L}_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$).

Dacă $\mathscr{D}$ este simplu conex, din (10) urmează că integrala (9) nu depinde de drumul (deschis) $\mathscr{C}$, ci numai de $f(\mathfrak{z})$ și de capetele acestui drum. În acest caz, funcția

$$g(\mathfrak{z}) = \int_{\mathfrak{z}_0}^{\mathfrak{z}} f(\mathfrak{z})\,\mathrm{d}\mathfrak{z} \tag{11}$$

privită ca funcție de limita superioară de integrare este de asemenea olomorfă în $\mathscr{D}$, întrucît ea este uniformă și monogenă, derivata ei fiind

$$g'(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{z}). \tag{12}$$

Orice funcție $g(\mathfrak{z})$ ce verifică relația (12) se numește *o primitivă* a lui $f(\mathfrak{z})$. Integrala definită (11) este una din primitivele lui $f(\mathfrak{z})$, și calculul cu primitive poate fi folosit în domeniul complex, ca și în cel real.

Ținînd seama de cele spuse relativ la integrala (4.27), din (4.43), (4.44) avem pentru $f(\mathfrak{z})$ olomorfă într-un domeniu multiplu conex:

$$\int_{\mathscr{C}} f(\mathfrak{z})\,\mathrm{d}\mathfrak{z} = \int_{\mathscr{C}_1} f(\mathfrak{z})\,\mathrm{d}\mathfrak{z} + 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{m} n_j\, I_j, \tag{13}$$

unde

$$I_j = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_j} f(\mathfrak{z})\,\mathrm{d}\mathfrak{z} \,. \tag{14}$$

Curba $\mathscr{C}_1$ are aceleași capete și același sens cu $\mathscr{C}$, și nu traversează nici una din tăieturile ce transformă domeniul $\mathscr{D}$ într-un domeniu simplu conex $\tilde{\mathscr{D}}$. Funcția $\int_{\mathscr{C}_1} f(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{z}$ este deci uniformă. Asupra naturii funcției (13) vom reveni în (60).

Teorema lui Cauchy (10) conduce la *formula lui Cauchy* : dacă $f(\mathfrak{z})$ este olomorfă în $\mathscr{D}$, atunci pe orice curbă închisă $\mathscr{C}$ interioară lui $\mathscr{D}$ avem

$$f(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{C}} \frac{f(t)}{t-\mathfrak{z}}\,dt, \qquad \mathfrak{z} \in \mathscr{A}^+, \quad \mathscr{C} = \mathrm{fr}\,\mathscr{A}^+, \quad t \in \mathscr{C}. \tag{15}$$

Formula rămîne valabilă pentru un ansamblu de curbe închise, situate în interiorul lui $\mathscr{D}$, și definind un domeniu $\mathscr{A}^+ \subset \mathscr{D}$. Ea rămîne valabilă și pe $\mathscr{L}$, dacă $f(\mathfrak{z}) \in C^0(\mathscr{D} + \mathscr{L})$.

Prin derivare, căpătăm din (15)

$$f^{(n)}(\mathfrak{z}) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\mathscr{C}} \frac{f(t)}{(t-\mathfrak{z})^{n+1}}\,dt; \quad \mathfrak{z} \in \mathscr{D}, \quad t \in \mathscr{C}. \tag{16}$$

Orice funcție olomorfă în $\mathscr{D}$ are deci derivate de orice ordin în $\mathscr{D}$, și împărțirea funcțiilor în clase C^p își pierde sensul. Despre existența și comportarea derivatelor (16) pe $\mathscr{L}$ nu se poate spune nimic a-priori.

În vecinătatea oricărui punct $\mathfrak{z}_0$ aparținînd domeniului ei de olomorfie, funcția $f(\mathfrak{z})$ poate fi scrisă sub forma unei dezvoltări în *serie Taylor* :

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)^n, \tag{17}$$

unde

$$f_n = \frac{f^{(n)}(\mathfrak{z}_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{C}} f(t)(t-\mathfrak{z}_0)^{-n-1}\,dt; \qquad t \in \mathscr{C}, \quad n \geqslant 0. \tag{18}$$

Un punct în care (17) nu este valabilă se numește *punct singular* (de caracter uniform — întrucît $f(\mathfrak{z})$ este uniformă).

Reciproc, considerînd serii de forma (17), unde coeficienții sînt niște numere complexe *oarecare*, se poate demonstra :

a) *prima teoremă a lui Abel* : dacă seria (17) este convergentă în $\mathfrak{z}_1$, ea este absolut convergentă în interiorul cercului $S(\mathfrak{z}_0, |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_0|)$;

b) *teorema lui Cauchy-Hadamard* : seria (17) este absolut convergentă în interiorul cercului $S(\mathfrak{z}_0, R^0)$ (numit *cerc de convergență*) unde [4])

$$1/R^0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n|}; \tag{19}$$

[4]) Dată fiind o mulțime de numere reale a_n, se notează $\overline{\lim}\, a_n$ acela dintre punctele de acumulare ale mulțimii situat cel mai la dreapta pe axa reală.

în exteriorul acestui cerc, seria este divergentă; despre convergența ei pe însuși cercul considerat, nu se poate spune nimic a priori.

Convergența seriei (17) este uniformă în orice compact interior cercului de convergență.

În interiorul cercului de convergență, suma seriei (17) este o funcție olomorfă, iar seria (17) rezultă a fi chiar seria Taylor a acestei funcții. În felul acesta, se stabilește în fond identitatea între definiția olomorfiei după Cauchy (cu ajutorul noțiunii de monogeneitate) și definiția analiticității după Weierstrass (cu ajutorul seriilor de puteri convergente).

Există deci o corespondență biunivocă între funcțiile olomorfe și seriile Taylor corespunzătoare lor: aceasta este *teorema de unicitate* pentru seriile Taylor (fără echivalent în domeniul real).

Din convergența uniformă a seriei (17) rezultă că derivata de orice ordin a sumei sale poate fi obținută prin derivare termen cu termen. Raza de convergență a seriilor astfel obținute este deci tot R^0 (ceea ce rezultă și direct din (19)).

Din (18) urmează, în *interiorul* cercului de convergență:

$$|f_n| \leqslant M(R)/R^n, \quad n \geqslant 0, \quad \text{unde } M(R) = \max |f(z)|, |z - z_0| = R. \tag{20}$$

În particular, pentru $R < R^0$ avem evident $M(R) \leqslant M$, și deci

$$|f_n| \leqslant M/R^n \text{ pentru } R < R^0. \tag{21}$$

Coincidența între dezvoltările în serii Taylor (convergente) și funcțiile olomorfe într-un cerc conduce la considerarea *seriilor Laurent*:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n (z - z_0)^n. \tag{22}$$

Partea corespunzătoare indicilor $n \geqslant 0$ poartă numele de *parte regulată*; cea corespunzătoare indicilor $n < 0$, de *parte principală* a seriei.

Partea regulată este o serie Taylor, convergentă în interiorul cercului $S(z_0, R^0)$. Prin intermediul unei inversiuni $Z = 1/(z - z_0)$, partea principală din (22) devine partea regulată a unei funcții de Z, nule în origine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} Z^n. \tag{23}$$

Notînd cu $1/R^1$ raza de convergență a seriei în Z obținute, avem din (19):

$$R^1 = \overline{\lim} \sqrt[n]{|f_{-n}|}. \tag{24}$$

Prin urmare, partea principală a dezvoltării (22) converge absolut și uniform în orice punct $|Z| < 1/R^1$, așadar în exteriorul cercului $S(z_0, R^1)$.

Orice serie Laurent este deci absolut convergentă în interiorul unei *coroane circulare*, și uniform convergentă în orice compact interior coroanei considerate. Valoarea R^1 depinde numai de coeficienții părții principale, iar R^0, numai de coeficienții părții regulate a funcției. Pentru ca dezvoltarea să aibă sens, trebuie desigur să avem $R^1 < R^0$.

În această coroană, suma $f(z)$ a seriei (22) este olomorfă, și avem

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{C}} f(t)(t - z_0)^{-n-1}\,dt\,; \quad t \in \mathscr{C}, n = 0, +1, +2, \ldots, \qquad (25)$$

ceea ce generalizează (18); $\mathscr{C}$ este o curbă simplă închisă din interiorul coroanei, și care conține în interior cercul de rază R^1.

În cazul particular în care $f(z)$ este olomorfă în interiorul unui cerc cu centrul în z_0, avem $f_n = 0$ pentru $n < 0$ (vezi (10)).

Făcînd uz de o translație și o omotetie, vom scrie adesea (22) sub forma

$$(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \zeta^n, \qquad (26)$$

unde

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(\sigma)\,\sigma^{-n-1}\,d\sigma, \qquad (27)$$

unde am notat cu γ cercul-unitate, cu $\sigma = \exp\,(i\theta)$ un punct curent de pe γ, cu ζ un punct curent din plan. (Aceasta presupune că $f(\zeta)$ e prelungibilă pe γ.)

Dacă seria (26) se reduce la partea ei regulată, funcția este olomorfă în interiorul unui cerc cu centrul în origine, *inclusiv* în origine. Dacă $f_n = 0$ pentru $n > m \geqslant 0$ (și desigur și pentru $n < 0$), funcția se reduce la un polinom de grad m. Relațiile (18) arată legătura dintre anularea coeficienților f_n de la un anumit indice în sus, și proprietatea funcției de a fi un polinom (deci, de a avea derivate nule de la un anumit ordin în sus). În acest caz, chestiunea de convergență nu se pune, suma are sens pentru orice punct la distanță finită (dar nu și în punctul de la infinit !) și deci avem $R^0 = \infty$.

Dacă funcția nu este un polinom, dar totuși avem $R^0 = \infty$, ea se numește *funcție întreagă* (exemple elementare : exp ζ, sin ζ).

Dacă seria (26) se reduce la partea sa principală, funcția este olomorfă în exteriorul unui cerc cu centrul în origine, *inclusiv* în punctul de la infinit. Dacă $f_{-n} = 0$ pentru $n > m > 0$, funcția se reduce la un polinom în $1/\zeta$, și suma are sens în orice punct din plan, cu excepția originii : avem deci $R^1 = 0$. O funcție a cărei parte principală este un polinom de grad m în $1/\zeta$ se zice că are un *pol* de ordin m în origine (sau în general în punctul z_0, corespunzător originii în transformarea despre care am vorbit mai sus). Întrucît atașăm termenul constant la partea regulată a funcției, rezultă că punctul de la infinit poate fi eventual un pol de ordin zero (pentru alte puncte, utilizarea acestei noțiuni nu are sens). O astfel de funcție este deci olomorfă într-o coroană circulară de raze $R^1 = 0$ și R^0, *ceea ce nu trebuie confundat cu proprietatea de olomorfie în cercul de rază* R^0.

O funcție care nu are alte singularități în afară de poli se numește *meromorfă*. Orice funcție meromorfă poate fi pusă sub forma raportului a două funcții întregi. Într-un domeniu mărginit, o funcție meromorfă poate avea numai un număr finit de poli.

Dacă partea principală din (26) are o infinitate de termeni, originea (sau punctul z_0 care-i corespunde) se numește *punct singular esențial* (de caracter uniform) al funcției considerate.

O deosebită importanță o are *reziduul* funcției $f(\mathfrak{z})$ în $\mathfrak{z}_0$:

$$f_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} f(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}. \tag{28}$$

Dacă $\mathscr{C}$ conține în interior *mai mulți* poli (dar nu și alte singularități), integrala (28) rezultă egală cu *suma* reziduurilor respective. Această teoremă — care poartă numele de *teorema reziduurilor* — permite calcularea simplă a anumitor integrale curbilinii.

Dacă $\mathfrak{z}_0$ este un pol de ordin p, putem scrie

$$f(\mathfrak{z}) = (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)^{-p}\, g(\mathfrak{z}), \qquad g(\mathfrak{z}_0) \neq 0, \tag{29}$$

și atunci pentru reziduul în $\mathfrak{z}_0$ obținem valoarea

$$f_{-1} = [(p-1)!]^{-1}\, g^{(p-1)}(\mathfrak{z}_0). \tag{30}$$

Nu insistăm aci asupra teoremelor clasice relative la funcțiile olomorfe sau meromorfe. Pentru informații, vezi oricare din tratatele indicate la pag. 684.

b) *Funcții multiforme*

Vom aminti acum unele proprietăți esențiale ale funcțiilor *multiforme*, pornind de la două funcții elementare.

Fie mai întîi funcția

$$\mathfrak{z} = \zeta^p, \quad p \text{ întreg}, \quad p \geqslant 2. \tag{31}$$

Această funcție este uniformă, dar nu și univalentă; notînd

$$\mathfrak{z} = R \exp(i\chi), \quad \zeta = \rho \exp(i\theta), \tag{32}$$

și ținînd seama că

$$\exp(2\pi i) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1, \tag{33}$$

constatăm că celor p puncte distincte

$$\zeta_k = \rho \exp\left[i\left(\theta + k\frac{2\pi}{p}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \tag{34}$$

le corespunde un același punct $\mathfrak{z} = \rho^p \exp(ip\theta)$.

Funcția (31) devine însă univalentă dacă restrîngem domeniul ei de definiție la un domeniu care să nu conțină puncte (34) distincte, de pildă la un sector

$$k(2\pi/p) < \theta < (k+1)(2\pi/p). \tag{35}$$

Să considerăm acum funcția

$$\mathfrak{z} = \zeta^{1/p}, \quad p \text{ întreg}, \quad p \geqslant 2, \tag{36}$$

care este (abstracție făcînd de notație) inversa funcției (31). Această funcție este univalentă, dar nu și uniformă. Într-adevăr, întrucît pentru orice k întreg avem

$$\zeta = \rho \exp(i\theta) = \rho \exp[i(\theta + 2k\pi)], \tag{37}$$

din (36) rezultă mai departe

$$\mathfrak{z}_k = \sqrt[p]{\rho} \exp\left[i\left(\frac{\theta}{p} + k\frac{2\pi}{p}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \tag{38}$$

așadar p puncte distincte în planul $\mathfrak{z}$.

Prin urmare dacă punctul ζ descrie o curbă închisă $\mathscr{D}$ care nu trece prin origine și nu o cuprinde în interior, atunci drept imagine a lui $\mathscr{D}$ în planul $\mathfrak{z}$ se obțin p curbe închise distincte $\mathscr{L}$, rotite unele față de altele de unghiuri $2\pi/p$ și care în transformarea $\zeta = \mathfrak{z}^p$ au toate aceeași imagine $\mathscr{D}$. Într-un domeniu în care nu există curbe închise care conțin în interior originea, funcția (36) se zice că are p *ramuri* uniforme (deci olomorfe). Pentru a le deosebi între ele, este suficient să precizăm valoarea $\mathfrak{z}_{0;k}$ ce corespunde unui anumit punct ζ_0.

Dacă însă curba $\mathscr{D}$ conține originea în interior, imaginea sa este o curbă deschisă, și e necesară parcurgerea lui $\mathscr{D}$ de p ori pentru ca punctul-imagine să revină în planul $\mathfrak{z}$ la poziția inițială. Ramurile funcției nu mai sînt deci separate, și prin variația lui ζ se trece continuu de pe o ramură a funcției pe alta.

Efectuînd o tăietură de la $\mathscr{D}$ la origine, se obțin din nou p ramuri distincte, continui și uniforme, ale funcției *în domeniul modificat.* Dar pe cele două borduri ale tăieturii funcția ia valori (are determinări) *diferite*, care trebuie precizate stabilind ramura pe care ne aflăm (așadar, prin continuitate).

Să luăm drept exemplu cazul $p = 3$:

$$\mathfrak{z} = \zeta^{1/3}. \tag{39}$$

Din (38) avem deci

$$\mathfrak{z} = \zeta^{1/3} = \sqrt[3]{\rho} \exp\left[i\left(\frac{\theta}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2. \tag{40}$$

Luînd drept curbă $\mathscr{D}$ cercul-unitate γ din planul ζ, obținem imaginile din figurile A.5.1 sau A.5.2, după cum considerăm domeniul $\mathscr{D}^+$ (discul unitate), sau același domeniu tăiat în lungul semiaxei ξ_1 negative, așadar după segmentul $[-1, 0]$. În aceste figuri, am însemnat cu indici ('), (''), (''') punctele-imagine ce corespund primei, celei de a doua și celei de a treia parcurgeri a cercului γ în același sens. În figura A.5.2, segmentul $[-1, 0]$ are trei imagini (duble) posibile. Întrucît pe semi-axa ξ_1 negativă avem $\theta = \pi$, putem nota aci

$$\zeta = -\mathrm{T} = \mathrm{T} \exp(i\pi), \quad 0 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 1, \tag{41}$$

astfel că din (40) deducem (folosind formula lui Euler (9.6))

$$\mathfrak{z} = \zeta^{1/3} = \begin{cases} (1/2)\sqrt[3]{\mathrm{T}}(1 + i\sqrt{3}), \\ -\sqrt[3]{\mathrm{T}}, \\ (1/2)\sqrt[3]{\mathrm{T}}(1 - i\sqrt{3}). \end{cases} \tag{42}$$

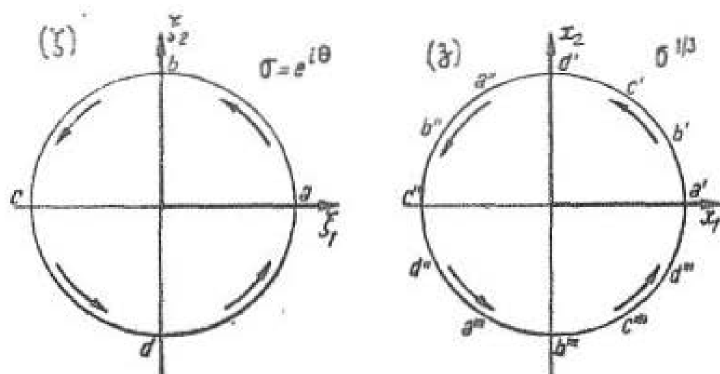


Fig. A.5.1

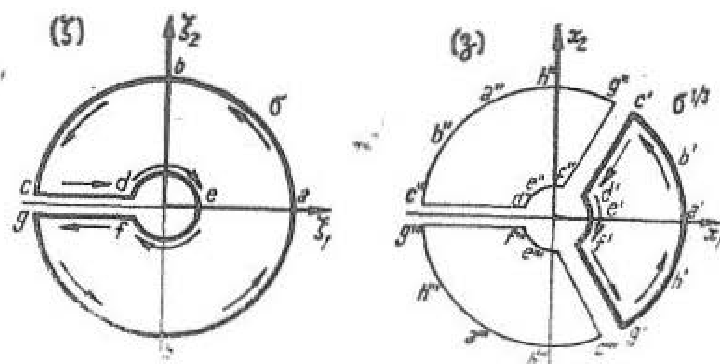


Fig. A.5.2

Pentru a separa ramurile funcţiei, să considerăm de pildă punctul $\zeta_0 = 1$, căruia îi corespund imaginile $z_{0;0} = 1$, $z_{0;1} = -(1/2)(1 - i\sqrt{3})$ şi $z_{0;2} = -(1/2)(1 + i\sqrt{3})$ (adică punctele a', a'', a''' din fig. A.5.2). Ramura corespunzătoare lui $k = 0$ dă atunci valorile

$$\zeta^{1/3} = \begin{cases} (1/2)\sqrt[3]{1}\,(1 + i\sqrt{3}) & \text{pe bordul superior,} \\ (1/2)\sqrt[3]{1}\,(1 - i\sqrt{3}) & \text{pe bordul inferior.} \end{cases} \tag{43}$$

Ramura $k = 1$ dă valorile $-\sqrt[3]{1}$ pe bordul superior, respectiv $(1/2)\sqrt[3]{1}\,(1 + i\sqrt{3})$ pe cel inferior. În fine, ramura $k = 2$ dă valorile $(1/2\sqrt[3]{1}\,(1 - i\sqrt{3})$, respectiv $-\sqrt[3]{1}$ pe bordurile considerate.

Alegînd $p = 2$, obţinem funcţia cu două ramuri (vezi fig. A.5.3)

$$z = \zeta^{1/2}. \tag{44}$$

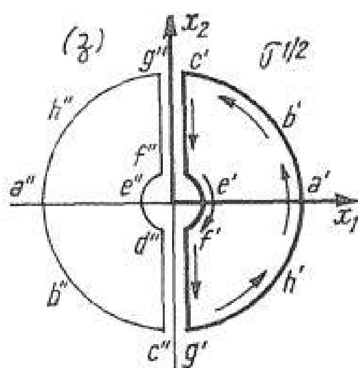


Fig. A.5.3

Din (41) urmează pentru ramura $k = 0$

$$\zeta^{1/2} = \begin{cases} \mathrm{i}\sqrt{\mathrm{T}} & \text{pe bordul superior,} \\ -\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{T}} & \text{pe bordul inferior.} \end{cases} \tag{45}$$

A doua ramură $k = 1$ dă aceleaşi valori, cu semnele schimbate.

În figurile A.5.2 şi A.5.3, imaginile cercului γ tăiat după segmentul $[-1, 0]$, prin intermediul ramurilor $k = 0$ ale funcţiilor (39), respectiv (44), sînt trasate îngroşat.

Funcţia exponenţială

$$\mathfrak{z} = \exp \zeta \tag{46}$$

este, ca şi funcţia (31), uniformă. Dat fiind că avem $\exp(2\pi \mathrm{i}) = 1$, ea e periodică şi deci nu poate fi univalentă. În orice bandă

$$2k\pi < \mathrm{Im}\, \zeta < (2k+1)\pi, \tag{47}$$

ea devine însă univalentă. Spre deosebire de cazul funcţiei (31), pentru funcţia (46) numărul benzilor de univalenţă nu este finit.

Inversa funcţiei exponenţiale este funcţia logaritmică

$$\mathfrak{z} = \ln \zeta,$$

care e univalentă, dar nu şi uniformă.

Dacă ζ parcurge o curbă închisă Π ce nu conţine în interior originea şi nu trece prin ea, drept imagine a ei în planul $\mathfrak{z}$ putem lua oricare dintre curbele închise $\mathscr{L}$, deplasate unele faţă de celelalte cu $2\pi \mathrm{i}$; evident, numărul acestor curbe nu este finit. Dacă însă Π conţine în interior originea, atunci imaginea sa este o curbă deschisă; la parcurgerea repetată a lui Π, punctul $\mathfrak{z}$ descrie un drum continuu alcătuit din curbe deschise cu capete comune, deplasate unele faţă de celelalte cu $2\pi \mathrm{i}$.

Folosind notaţia (4.37), avem pentru orice curbă $\mathscr{C}$ care înconjură *o singură dată* originea în sens direct:

$$[\ln \zeta]_{\mathscr{C}} = 2\pi \mathrm{i}. \tag{49}$$

În domenii în care nu există curbe închise care conţin în interior originea, funcţia logaritmică — spre deosebire de funcţia (36) — admite *o infinitate* de ramuri distincte. Întrucît

$$\mathfrak{z} = \exp(\ln \mathfrak{z}), \quad \mathfrak{z}^{1/p} = \exp[(\ln \mathfrak{z})/p], \tag{50}$$

scriind relaţia (49) în planul $\mathfrak{z}$ conchidem că $[\mathfrak{z}^{1/p}]_{\mathscr{C}} = \exp(2\pi \mathrm{i}/p)$, ceea ce explică motivul pentru care funcţia $\mathfrak{z}^{1/p}$ — spre deosebire de cea logaritmică — este periodică.

Pentru ambele funcţii, originea e un punct singular *de caracter multiform*. Astfel de puncte se numesc *puncte de ramificare*.

Să arătăm cu acest prilej în ce fel formula (49) ne ajută să determinăm natura funcţiei $I(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})$ din (4.27). Anume, după o translaţie de axe, deducem evident

$$[\ln(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j)]_{\mathscr{L}_h} = 2\pi i\delta_{jh}, \quad \mathfrak{z}_j \in \mathscr{D}_j^+, \tag{51}$$

$\mathscr{L}_h$ putînd fi înlocuit cu orice curbă închisă $\mathscr{C}$ care conţine în interior (ocolind-o o singură dată) componenta $\mathscr{L}_h$ a frontierei domeniului multiplu conex $\mathscr{D}$, şi numai pe ea.

(Remarcăm aci că funcţia logaritmică satisface condiţiile (4.37) şi (4.39). Există funcţii multiforme elementare care nu le satisfac, ca de pildă $\mathfrak{z}^{1/p}$ sau $\mathfrak{z}\ln\mathfrak{z}$.)

Pentru funcţia

$$a(\mathfrak{z}) = \sum_{j=1}^{m} I_j \ln(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j), \quad \mathfrak{z}_j \in \mathscr{D}_j^+, \tag{52}$$

unde I_j sînt constantele (4.43), avem deci

$$[a(\mathfrak{z})]_{\mathscr{L}_j} = 2\pi i\, I_j, \tag{53}$$

de unde urmează că funcţia $I_0(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = I(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) - a(\mathfrak{z})$ are perioadele nule. Aşadar, putem scrie

$$I(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = \sum_{j=1}^{m} I_j \ln(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j) + I_0(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}), \tag{54}$$

unde $I_0(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})$ este o funcţie *uniformă* în domeniul multiplu conex $\mathscr{D}$.

Alegerea funcţiei (52) nu este unică. În primul rînd, ea depinde de alegerea punctelor $\mathfrak{z}_j$ în $\mathscr{D}_j^+$. Mai departe, în loc de (51) putem scrie

$$[\ln(\bar{\mathfrak{z}}-\bar{\mathfrak{z}}_j)]_{\mathscr{L}_h} = -2\pi i\delta_{jh}, \quad \mathfrak{z}_j \in \mathscr{D}_j^+, \tag{55}$$

astfel că din (51) şi (55) urmează

$$\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j}{\bar{\mathfrak{z}}-\bar{\mathfrak{z}}_j}\right]_{\mathscr{L}_h} = 2\pi i\delta_{jh}, \quad \mathfrak{z}_j \in \mathscr{D}_j^+. \tag{56}$$

Cu aceasta, sîntem conduşi, în loc de (52), la funcţia

$$2b(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = \sum_{j=1}^{m} I_j \ln\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j}{\bar{\mathfrak{z}}-\bar{\mathfrak{z}}_j}, \tag{57}$$

ceea ce dă — în loc de (54) — reprezentarea

$$I(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} I_j \ln\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j}{\bar{\mathfrak{z}}-\bar{\mathfrak{z}}_j} + I_0(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}). \tag{58}$$

Formula (54) separă termenul multiform din $I(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})$ sub forma unei funcţii de o singură variabilă $\mathfrak{z}$. Formula (58) pune în evidenţă partea imaginară, multiformă, a funcţiei logaritmice, şi o elimină cu totul pe cea reală, uniformă:

$$\ln\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j}{\bar{\mathfrak{z}}-\bar{\mathfrak{z}}_j} = 2i\arg(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j). \tag{59}$$

Odată cu modificarea termenilor logaritmici, se modifică desigur şi funcţia $I_0(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})$; dar caracterul ei de funcţie uniformă rămîne intact.

Aceste formule ne vor fi utile în două cazuri.

Mai întîi, din (54) urmează pentru $f(\mathfrak{z})$ olomorfă în $\mathscr{D}$

$$g(\mathfrak{z}) = \int f(\mathfrak{z})\, \mathrm{d}\mathfrak{z} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \ln (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_j) + g_0(\mathfrak{z}), \tag{60}$$

unde $g_0(\mathfrak{z})$ este uniformă, deci *olomorfă* în $\mathscr{D}$, iar

$$\gamma_j = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_j} f(\mathfrak{z})\, \mathrm{d}\mathfrak{z}. \tag{61}$$

Pe de altă parte, de formula (58) este comod să facem uz pentru a determina funcția armonică f_2 conjugată cu o funcție armonică dată f_1. Anume, din (5) avem

$$f_2(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \int f_{2,\mathfrak{z}}\, \mathrm{d}\mathfrak{z} + f_{2,\bar{\mathfrak{z}}}\, \mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = -\mathrm{i} \int f_{1,\mathfrak{z}}\, \mathrm{d}\mathfrak{z} - f_{1,\bar{\mathfrak{z}}}\, \mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}. \tag{62}$$

Dacă derivatele lui f_1 sînt uniforme, (62) este de tipul integralei (4.27), și atunci

$$f_2(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} f_2^j \ln \frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_j}{\bar{\mathfrak{z}} - \bar{\mathfrak{z}}_j} + f_2^0 (\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}), \tag{63}$$

unde $f_2^0 (\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ este o funcție uniformă, și unde constantele

$$f_2^j = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\mathscr{L}_j} f_{1,\mathfrak{z}}\, \mathrm{d}\mathfrak{z} - f_{1,\bar{\mathfrak{z}}}\, \mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} \tag{64}$$

sînt pur imaginare. Din (59) deducem acum că atît termenii logaritmici cît și funcția uniformă $f_2^0 (\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ au valori reale.

Dacă derivatele funcției f_1 sînt multiforme, poate fi convenabil să separăm mai întîi partea lor multiformă și să determinăm direct componenta corespunzătoare a conjugatei.

Exemplele simple ale funcțiilor (31), (46) pun în evidență legătura dintre proprietățile de uniformitate și univalență. Singura funcție univalentă în tot planul este funcția omografică (vezi § 8, exemplul *a*):

$$\mathfrak{z} = (a\zeta + b)/(c\zeta + d). \tag{65}$$

De aci se vede că funcții multiforme pot apare prin inversarea unor funcții uniforme, care nu sînt univalente în domeniile lor de definiție.

În general, să considerăm funcția uniformă

$$\mathfrak{z} = f(\zeta) = f_0 + f_1 (\zeta - \zeta_0) + f_2 (\zeta - \zeta_0)^2 + \ldots. \tag{66}$$

Dacă $f_1 = f'(\zeta_0) \neq 0$, atunci există un disc cu centrul în ζ_0 și de rază mai mică decît raza de convergență R^0, în care funcția $f(\zeta)$ este univalentă. În domeniul-imagine al acestui disc, funcția $\zeta = f^{-1} (\mathfrak{z})$ este deci uniformă și olomorfă.

Dacă însă $f'(\zeta_0) = 0$, un astfel de disc nu există și funcția inversă nu este desfășurabilă în serie Taylor. În schimb, dacă prima derivată nenulă în ζ_0 este $f^{(p)}(\zeta_0) \neq 0$, $p \geqslant 2$, atunci se obține seria

$$\zeta = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)^{n/p}. \tag{67}$$

Acest raționament sugerează a se considera mai general serii de puteri fracționare, numite *serii Lagrange*:

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)^{\nu/p}. \tag{68}$$

Este evident că sumele unor astfel de serii sînt funcții multiforme, de același tip cu funcția elementară (36). (Notăm că, chiar dacă avem $f'(\zeta_0) \neq 0$, inversa seriei (66) este — în exteriorul discului despre care am vorbit mai sus — de asemenea multiformă.)

Punctul $\mathfrak{z}_0$ poartă numele de *punct critic* (sau *de ramificare*) de ordin p. Dacă termenii cu puteri fracționare sînt în număr finit, el se numește *punct critic algebric*. În caz contrar el se numește *punct critic transcendent*.

Separarea ramurilor uniforme ale funcției multiforme (68) se face — în principiu — la fel ca în cazul funcției elementare (36), așadar prin determinarea domeniului de univalență al funcției inverse.

Notăm că pentru a calcula derivata unei funcții multiforme, trebuie să precizăm întotdeauna ramura uniformă la care ne referim (vezi pag. 712).

c) Prelungire analitică

Să considerăm o funcție $f_0(\mathfrak{z})$, olomorfă într-un domeniu $\mathscr{D}$ de frontieră $\mathscr{L}$. (Indicele „zero" arată aci faptul că funcția este olomorfă, deci uniformă.) Domeniul $\mathscr{D}$ și funcția $f_0(\mathfrak{z})$ *privite împreună* poartă numele de *element* $\{\mathscr{D}, f_0\}$. Un punct-frontieră se numește *regulat*, dacă există un disc cu centrul în acest punct și avînd raza nenulă, disc în care funcția $f_0(\mathfrak{z})$ să fie desfășurabilă în serie Taylor (convergentă).

În felul acesta, prin punctele regulate se realizează *prelungirea* funcției $f_0(\mathfrak{z})$ în afara domeniului ei inițial de definiție $\mathscr{D}$; astfel apare ideea de funcție definită de *mai multe* elemente tayloriene, convergente în discuri ce se acoperă parțial.

Punctele-frontieră care nu sînt regulate se numesc *puncte singulare*. Prin repetarea operației de prelungire, sîntem conduși (în general, după un lanț infinit de operații) la a considera ansamblul elementelor tayloriene obținute prin toate operațiile de prelungire posibile, și mulțimea obținută prin reunirea tuturor discurilor de convergență ale acestor elemente. Această mulțime poartă numele de *domeniu de definiție complet* (weierstrassian) al funcției considerate, iar funcția $f(\mathfrak{z})$ astfel definită, de *funcție analitică completă* (în sensul lui Weierstrass). Domeniul de definiție complet este prin construcție o mulțime deschisă, a cărei frontieră e alcătuită numai din puncte singulare.

Funcția $f(\mathfrak{z})$ la care am fost conduși pornind de la $f_0(\mathfrak{z})$ este în general *multiformă*. Într-adevăr, după un lanț de operații putem reveni în discul de convergență al unui element taylorian — dar fără garanția de a reveni la *același* element. În felul acesta, procesul de prelungire analitică al unei funcții olomorfe poate conduce la funcții multiforme.

Funcţiile uniforme care se pot obţine în cursul procesului de prelungire poartă numele de *ramuri* ale funcţiei multiforme.

Un caz important în care prelungirea analitică se face însă cu păstrarea uniformităţii este dat de *teorema monodromiei*: dacă funcţia olomorfă $f_0(z)$ poate fi prelungită analitic în lungul *oricărei* curbe jordaniene dintr-un domeniu simplu-conex $\mathscr{D}$, atunci funcţia analitică $f(z)$ definită în $\mathscr{D}$ prin acest proces este uniformă, deci olomorfă.

Procesul prelungirii analitice poate fi simplificat dacă se face uz şi de elementele Laurent şi Lagrange. (În vecinătatea unui punct critic sau a unui pol, este necesară o infinitate de elemente tayloriene — pe care le putem înlocui cu un singur element Lagrange sau Laurent.) Mulţimea *tuturor* elementelor obţinute în procesul de prelungire poartă numele de *funcţie analitică completă* (*riemanniană*), iar domeniul ei de definiţie, *domeniu de definiţie complet* (riemannian). Acesta se deosebeşte de domeniul weierstrassian prin aceea că conţine punctele singulare ca puncte interioare.

Există rezultate care afirmă posibilitatea prelungirii analitice şi permit construirea efectivă a funcţiei prelungite.

Astfel, fie că frontiera Π a unui domeniu Δ în care este definită funcţia $f(\zeta)$ conţine un *arc de cerc* Π' (în particular: un segment de dreaptă). Luînd originea în centrul cercului de rază R căruia îi aparţine arcul Π', vom spune că două puncte sînt *simetrice* faţă de Π' dacă ele au acelaşi argument şi produsul afixelor lor este egal cu R^2; în acest sens, punctele ζ, $R^2/\bar{\zeta}$ sînt simetrice. Dacă arcul se reduce la un segment de dreaptă, alegînd această dreaptă drept axă reală, vom spune că punctele ζ, $\bar{\zeta}$ sînt simetrice.

Folosind aceşti termeni, se poate demonstra *principiul simetriei* (Riemann-Schwarz): fie dată funcţia $f(\zeta)$ meromorfă în domeniul Π a cărui frontieră Π conţine un *arc de cerc* Π', pe care funcţia $f(\zeta)$ este prelungibilă prin continuitate, şi fie că imaginea $\mathscr{L}'$ a arcului Π' prin intermediul transformării $z = f(\zeta)$ este de asemenea un arc de cerc. Atunci funcţia $f_*(\zeta)$ definită ca luînd în puncte simetrice cu ζ faţă de Π, valori simetrice cu $z = f(\zeta)$ faţă de $\mathscr{L}'$, este prelungirea analitică (de asemenea meromorfă) a funcţiei $f(\zeta)$ în domeniul astfel extins.

Acest principiu stabileşte deci o legătură simplă între ideea de *prelungire prin continuitate* pe o curbă-frontieră circulară şi cea de *prelungire analitică* dincolo de această curbă, dînd totodată valorile funcţiei astfel prelungite.

El poate fi generalizat sub forma *principiului lui Schwarz*: dacă funcţia $f(\zeta)$, meromorfă în domeniul Δ a cărui frontieră Π conţine un arc *analitic* Π', este prelungibilă prin continuitate pe Π', şi dacă imaginea $\mathscr{L}'$ a acestui arc este de asemenea un arc analitic — atunci funcţia dată poate fi prelungită analitic dincolo de Π'.

Principiul lui Schwarz e mai general decît principiul simetriei, dar el nu permite construirea atît de simplă a funcţiei prelungite.

d) Teoreme de unicitate

O funcție de punct este definită dacă se dă o mulțime de puncte, și o lege după care fiecărui punct i se pune în corespondență un punct (sau un număr) determinat. În anumite împrejurări, este suficient ca această lege să fie stabilită pentru o categorie mai restrînsă de elemente, pentru ca ea să rezulte totuși deplin caracterizată pe o mulțime mai cuprinzătoare.

Astfel, pentru determinarea unui polinom de grad p, este suficient să cunoaștem valoarea sa în $p + 1$ puncte; valori date arbitrar în alte puncte sînt fie inutile, fie nu „concordă" cu cele $p + 1$ valori deja date; de aci rezultă că două polinoame de grad p ale căror valori coincid în $p + 1$ puncte, sînt identice.

Funcțiile olomorfe se bucură de o proprietate analogă. Într-adevăr, fie dată o mulțime de puncte ζ_k care posedă un singur punct de acumulare ζ_0, și o lege care pune în corespondență fiecărui ζ_k un număr complex $\mathfrak{z}_k$. Dacă există o funcție olomorfă $\mathfrak{z} = f(\zeta)$ definită de aceste date, și dacă ea este definită și în ζ_0, atunci ea trebuie căutată sub forma

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta - \zeta_0)^n, \tag{69}$$

unde coeficienții f_n trebuie determinați din condițiile

$$f(\zeta_k) = \mathfrak{z}_k. \tag{70}$$

Pentru aceasta, este necesar ca funcția căutată să fie mai întîi continuă în ζ_0, așadar să existe limita

$$f(\zeta_0) = \lim_{k \to \infty} f(\zeta_k) = \lim_{k \to \infty} \mathfrak{z}_k = f_0, \tag{71}$$

ceea ce determină coeficientul f_0. Mai departe, este necesar să existe derivatele de *orice* ordin în ζ_0, ceea ce conduce la valorile

$$\frac{f^{(p)}(\zeta_0)}{p!} = \lim_{k \to \infty} \frac{f(\zeta_k) - \sum\limits_{n=0}^{p-1} f_n(\zeta_k - \zeta_0)^n}{(\zeta_k - \zeta_0)^p} = f_p. \tag{72}$$

Așadar, *dacă* limitele ce apar în aceste formule există (ceea ce depinde în definitiv de șirurile ζ_k, $\mathfrak{z}_k$), atunci toți coeficienții f_n pot fi determinați și funcția $f(\zeta)$ poate fi scrisă sub forma (69).

Seria din (69) este convergentă, dacă pentru raza ei de convergență avem $R^0 > 0$. *Dacă* și această proprietate (care depinde de coeficienții f_n, așadar tot de numerele ζ_k, $\mathfrak{z}_k$) este satisfăcută, atunci funcția $f(\zeta)$ este construită și are o valoare deplin determinată în *orice* punct din interiorul cercului $S(\zeta_0, R^0)$. (Valori $\mathfrak{z}_k$ în puncte ζ_k care au drept punct de acumulare ζ_0 un punct singular, nu pot conduce la construcția dorită. Rezultatul $R^0 = 0$ va arăta aceasta.)

Prelungirea analitică a acestei funcții se poate face acum pe calea obișnuită, și în acest fel darea șirurilor ζ_k, $\mathfrak{z}_k$ se dovedește suficientă pentru a defini funcția analitică completă, în domeniul ei complet de existență.

Construcţia de mai sus arată că *nu orice* şiruri de valori $\mathfrak{z}_k$ în puncte ζ_k determină o funcţie olomorfă. Iar dacă ele o determină, atunci darea valorilor ei în alte puncte (de pildă, chiar pe o mulţime ce posedă numai *două* puncte de acumulare) este fie superfluă, fie contradictorie.

Din cele de mai sus decurge *teorema de unicitate* (interioară): două funcţii olomorfe care coincid pe o mulţime de puncte ce posedă un punct de acumulare în domeniul lor de olomorfie, coincid. În particular, două funcţii olomorfe ce coincid pe un subdomeniu al domeniului de olomorfie, sau pe un arc de curbă interior acestui domeniu, sau pe un arc-frontieră care conţine un punct regulat, coincid.

De aci rezultă că nu ne putem da arbitrar valorile unei funcţii olomorfe pe o astfel de curbă; în particular, *nu orice funcţie de punct pe o curbă poate fi privită ca valoare pe acea curbă a unei funcţii olomorfe* (compară de ex. cu problema lui Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace).

Raţionamentele de mai sus sînt legate de faptul că punctul ζ_0 apare în definitiv a fi punct interior domeniului de olomorfie. Se poate cerceta chestiunea teoremelor de unicitate (şi deci a datelor strict necesare pentru a defini o funcţie olomorfă, şi mai general o funcţie analitică) chiar pentru puncte-frontieră ale domeniului complet de definiţie. Pentru astfel de teoreme (studiate iniţial de N. Luzin şi I. Privalov [1]), vezi G. Goluzin [1], capitolul 10; A. Markuşevici [1], § 3.6; I. Privalov [1], [2], § 12.4. Aci vom remarca numai că, dacă dezvoltarea din (69) nu este posibilă, rămîne de cercetat posibilitatea ca ζ_0 să nu fie punct de acumulare al mulţimii punctelor date (de ex., $\zeta_0 = 0$ pentru puncte date pe γ). Proprietăţile pretinse în acest caz sînt mult mai puţin severe. Totuşi, şi aci trebuie spus că *nu orice* funcţie dată pe un arc de curbă oarecare poate fi privită ca valoare la limită a unei funcţii olomorfe într-un domeniu a cărui frontieră conţine arcul în chestiune. De exemplu, condiţia ca o funcţie de punct pe cercul-unitate $f(\sigma)$ să fie cu variaţie mărginită este de natură să asigure „acordul" între valorile atribuite funcţiei pe γ, aşa fel ca datele să nu fie contradictorii. Pentru a ne asigura însă că $f(\sigma)$ este chiar valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în discul unitate, e încă nevoie de alte condiţii suplimentare.

De această chestiune ne vom ocupa în § § 10, 11.

§ 6. REPREZENTAREA CONFORMĂ

În studiul aspectelor geometrice ale teoriei, pe primul plan stau următoarele probleme, puse încă de Riemann: dată fiind o funcţie $f(\zeta)$ definită într-un domeniu $\mathcal{D}$ din planul ζ, care sînt proprietăţile geometrice ale domeniului-imagine? Dat fiind un domeniu $\mathscr{D}$ în planul $\mathfrak{z}$ (cu eventuale suprapuneri), există oare o funcţie $f(\zeta)$ aşa fel ca $\mathscr{D}$ să fie imaginea, prin intermediul transformării definite de această funcţie, a unui domeniu $\mathcal{D}$ din planul ζ?

Vom aminti în legătură cu aceste probleme unele rezultate teoretice şi formule de calcul. Ca material bibliografic general, indicăm: C. Caratheodory [1], volumul 2, partea VI, capitolele 2 şi 3; C. Iacob [5], §§ 2.8–2.25; A. Markuşevici [1], §§ 5.1 şi 5.2; I. Privalov [2], § 2.5 şi capitolul 12; S. Stoilov [1], volumul 1, capitolul 5; G. Valiron [1], capitolul 15. Printre

lucrările special consacrate problemei reprezentării conforme, vezi R. Courant şi M. Schiffer [1]; P. Filciakov [1]; D. Gaier [1]; G. Julia [1], [2]; W. Koppenfels şi F. Stallman [1]; L. Lichtenstein [1]; Z. Nehari [1]. Numeroase formule utile în calculul efectiv sînt date de H. Kober [1].

a) Teoreme fundamentale

Fie dat un domeniu mărginit $\mathcal{D}$ de frontieră Λ în planul variabilei $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ şi o funcţie $\omega(\zeta)$ definită în $\mathcal{D}$. Dacă această funcţie este *uniformă*, atunci ea pune în corespondenţă *univocă* fiecărui punct $\zeta \in \mathcal{D}$, un punct din planul variabilei complexe $z = x_1 + ix_2$:

$$z = \omega(\zeta), \tag{1}$$

şi face deci ca domeniului $\mathcal{D}$ să-i corespundă o mulţime de puncte $\mathscr{D}$ din planul z. Dacă funcţia $\omega(\zeta)$ este şi *univalentă*, atunci pentru fiecare punct-imagine z există un singur punct-obiect ζ: corespondenţa este atunci *biunivocă*.

Fie acum că funcţia $\omega(\zeta)$ este *olomorfă* în $\mathcal{D}$ şi — provizoriu — fie şi $\omega'(\zeta) \neq 0$ în $\mathcal{D}$. În acest caz, se demonstrează că mulţimea $\mathscr{D}$ este mărginită, conexă şi deschisă — aşadar imaginea $\mathscr{D}$ a domeniului $\mathcal{D}$ este de asemenea un *domeniu*. Funcţia $\zeta = \omega^{-1}(z)$ care realizează transformarea inversă este şi ea olomorfă în $\mathscr{D}$ şi derivata ei este de asemenea diferită de zero. Imaginea unui cerc infinit mic din $\mathcal{D}$ este tot un cerc infinit mic în $\mathscr{D}$, iar unghiul dintre două elemente liniare din $\mathcal{D}$ coincide în mărime şi sens cu unghiul elementelor-imagine din $\mathscr{D}$. Mărimea $|\omega'(\zeta)|$ este modulul dilatării liniare, iar $\arg \omega'(\zeta)$ este unghiul de rotire al imaginii din $\mathscr{D}$ faţă de elementul-obiect din $\mathcal{D}$.

O astfel de transformare poartă numele de *reprezentare conformă* a domeniului $\mathcal{D}$ pe $\mathscr{D}$. Întrucît $\omega(\zeta)$ este olomorfă, ea este desfăşurabilă în serie Taylor în vecinătatea oricărui punct $\zeta \in \mathcal{D}$; aceeaşi afirmaţie este valabilă pentru $\omega^{-1}(z)$ în $\mathscr{D}$.

Dacă într-un punct oarecare am avea $\omega'(\zeta) = 0$, funcţia $\zeta = \omega^{-1}(z)$ ar avea un punct critic în punctul corespunzător (vezi § 5, pag. 722 — 723) ceea ce contrazice ipoteza de univalenţă. Prin urmare, condiţia $\omega'(\zeta) \neq 0$ în $\mathcal{D}$ nu mai trebuie formulată aparte.

Se poate demonstra că condiţia *necesară* şi *suficientă* pentru ca funcţia $\omega(\zeta)$ să realizeze o reprezentare conformă a domeniului $\mathcal{D}$, este ca ea să fie *olomorfă* şi *univalentă* în $\mathcal{D}$. (Dacă condiţia de univalenţă nu este satisfăcută, funcţia realizează totuşi reprezentarea conformă într-o vecinătate suficient de mică a fiecărui punct în care $\omega'(\zeta) \neq 0$.) Punctele în care avem $\omega'(\zeta) = 0$, se numesc *puncte de ramificare* ale reprezentării. Astfel de puncte pot fi situate numai pe frontiera lui $\mathcal{D}$.

Pentru funcţia $\omega(\zeta)$, despre care va fi adesea vorba, rămîne deci valabil tot ceea ce s-a spus în § 5 despre funcţiile olomorfe şi univalente.

Problema centrală a teoriei reprezentării conforme constă în a determina funcţiile care realizează reprezentarea conformă a unui domeniu dat $\mathcal{D}$ pe alt domeniu dat $\mathscr{D}$. Rezultatul fundamental în această direcţie

este constituit de *teorema lui Riemann*: date fiind două domenii simplu-conexe oarecari $\mathcal{D}$ şi $\mathscr{D}$, ale căror frontiere constau din cel puţin cîte două puncte, şi date fiind punctele $\zeta_0 \in \mathcal{D}$, $\mathfrak{z}_0 \in \mathscr{D}$ (dar altfel arbitrare) şi numărul real arbitrar α_0 — există o funcţie şi numai una $\mathfrak{z} = \omega(\zeta)$, care reprezintă conform domeniul $\mathcal{D}$ pe domeniul $\mathscr{D}$, în aşa fel încît $\mathfrak{z}_0 = \omega(\zeta_0)$, $\alpha_0 = \arg\, \omega'(\zeta_0)$.

Pentru demonstraţie, vezi de ex. G. Goluzin [1], cap. 2; C. Iacob [5], § 2.24; M. Lavrentiev şi B. Şabat [1], cap. 2, pct. 28; A. Markuşevici [1], § 5.3; S. Stoilov [1], vol. 1, cap. 5; G. Valiron [1], § 15.215.

În practică e desigur suficient să cunoaştem funcţiile care reprezintă conform discul unitate pe fiecare din domeniile simplu conexe considerate.

În cazul unui domeniu mărginit multiplu conex $\mathscr{D}$, avînd drept componente ale frontierei curbele $\mathscr{L}_j$, care conţin fiecare cel puţin două puncte, teorema lui Riemann poate fi convenabil generalizată. Astfel de domenii pot fi reprezentate conform pe domenii multiplu-conexe canonice de diferite tipuri: plan cu tăieturi în arce de cerc concentrice (F. Schottky, 1897); plan cu tăieturi rectilinii paralele (D. Hilbert, 1904); disc cu *m* orificii circulare interioare (P. Koebe, 1910; 1920). Pentru detalii, vezi de exemplu R. Courant şi M. Schiffer [1], capitolul 5; D. Gaier [1], capitolul 5; G. Goluzin [1], capitolul 5; G. Julia [2]; M. Keldîş [1], [2]; M. Keldîş şi M. Lavrentiev [1]; Z. Nehari [1], capitolul 7.

În particular, pot fi reprezentate conform unul pe celălalt numai domenii de acelaşi ordin de conexiune. Această condiţie este necesară, dar nu şi suficientă: cu excepţia domeniilor simplu conexe, două domenii de acelaşi ordin de conexiune *nu pot fi* în general reprezentate conform unul pe celălalt. Astfel, două coroane circulare pot fi reprezentate conform una pe cealaltă dacă şi numai dacă raportul razelor lor este acelaşi.

Dacă $\mathscr{D}$ este *nemărginit*, există un punct în $\mathcal{D}$ (şi numai unul) în care $\omega(\zeta)$ are un pol, şi anume un pol simplu. (Dacă polul n-ar fi unic, punctul de la infinit în $\mathscr{D}$ ar fi imagine a mai multor puncte distincte; dacă polul n-ar fi simplu, funcţia $\mathfrak{z} = \omega^{-1}(\mathfrak{z})$ ar avea un punct critic algebric la infinit; în ambele cazuri, reprezentarea n-ar mai fi univalentă.)

Prin urmare, dacă $\mathcal{D}$ este mărginit şi $\mathscr{D}$ este nemărginit, vom avea

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = \omega_{-1}(\zeta - a)^{-1} + \omega_0(\zeta), \tag{2}$$

cu $\omega_0(\zeta)$ olomorfă. Dacă domeniile sînt nemărginite şi punctele de la infinit se corespund, avem (cu $\omega_0(\zeta)$ olomorfă în $\mathcal{D}$, inclusiv la infinit):

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = \omega_1\zeta + \omega_0(\zeta). \tag{3}$$

Pentru unele exemple elementare de reprezentări conforme, vezi de exemplu M. Lavrentiev şi N. Şabat [1], § 2.2.; I. Privalov [2], § 3.3.

b) Corespondenţa frontierelor

Orice problemă la limită în care se face uz de reprezentarea conformă pe un domeniu canonic în care soluţia poate fi mai uşor găsită, obligă la considerarea *valorilor la limită* ale funcţiilor cu care operăm. Este deci necesară cunoaşterea proprietăţilor la limită ale funcţiilor care realizează reprezentarea conformă, aşadar studiul lor nu numai în domeniul de definiţii, ci şi pe frontiera acestuia.

Există o strînsă legătură între aspectul frontierei domeniului $\mathscr{D}$ şi proprietăţile la limită ale funcţiei $\omega(\zeta)$.

Astfel, să presupunem că funcţia $\omega(\zeta)$ reprezintă conform domeniul canonic $Д^+$ de frontieră $Л$ (avînd o componentă exterioară $Л_0 = \gamma$ şi m componente circulare interioare $Л_1, Л_2, \ldots Л_m$), pe domeniul multiplu-conex $\mathscr{D}$, de frontieră $\mathscr{L}$ (compusă dintr-o componentă exterioară $\mathscr{L}_0$ şi m componente interioare $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots \mathscr{L}_m$).

Cu ajutorul principiului prelungirii analitice, H. A. Schwarz a demonstrat (pentru domenii simplu conexe) că, dacă frontiera $\mathscr{L}$ e analitică, funcţia $\omega(\zeta)$ poate fi prelungită prin continuitate pe γ, şi este de clasă C^{∞} în $Д^+ + \gamma$.

Problema comportării funcţiei $\omega(\zeta)$ pentru o frontieră *neanalitică* a fost pusă de P. Painlevé. W. Osgood [1] a presupus în 1900 şi a demonstrat în 1913 (vezi W. Osgood şi E. Taylor [1]) că pentru continuitatea funcţiei $\omega(\zeta)$ în $Д^+ + \gamma$, este suficient ca $\mathscr{L}$ să fie o curbă jordaniană simplă. Acelaşi rezultat a fost obţinut simultan şi de C. Caratheodory (vezi [1]).

Se poate demonstra (vezi de ex. A. Markuşevici [1], § 5.3) că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $\omega(\zeta) \in C^0(Д^+ + \gamma)$, este ca $\mathscr{L}$ să fie o curbă jordaniană simplă.

Rezultatul rămîne valabil în cazul unui domeniu multiplu conex, şi poate fi formulat precum urmează, sub numele de *teorema corespondenţei frontierelor* : o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $\omega(\zeta) \in C^0(Д^+ + Л)$ este ca $\mathscr{L}$ să fie formată din curbe jordaniene simple; curbele $\mathscr{L}_j$ sînt imaginea curbelor $Л_j$ prin intermediul transformării $\omega(\zeta)$ prelungite pe $Л_j$, corespondenţa dintre $\mathscr{L}_j$ şi $Л_j$ fiind biunivocă şi bicontinuă. Funcţia $\omega(\zeta)$ prelungită pe $Л$ rezultă a fi cu variaţie mărginită.

Mai general încă, se poate demonstra că dacă $\mathscr{L} \in C^p_\mu(Л)$, unde $0 < \mu < 1$ (vezi § 3, pag. 700), atunci $\omega(\zeta) \in C^p_\mu(Д^+ + Л)$.

Rezultate de acest tip au fost extinse de către S. Warschawski [1] la cazul frontierelor posedînd puncte unghiulare. Anume, se poate arăta că dacă $\mathscr{L} \in C^1_\mu(Л)$ *pe porţiuni*, atunci în vecinătatea oricărui punct $\tau \in Л$ avem

$$\omega(\zeta) = \omega(\tau) + (\zeta - \tau)^{\alpha}\omega_0(\zeta, \tau), \qquad \omega'(\zeta) = (\zeta - \tau)^{\alpha - 1}\,\omega_1(\zeta, \tau), \tag{4}$$

unde $\omega_0(\tau, \tau) \neq 0$, $\omega_1(\tau, \tau) \neq 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$.

Dacă $\alpha = 1$, funcţia $\omega(\zeta)$ rezultă a fi derivabilă şi cu derivata nenulă în τ; ea este deci desfăşurabilă în serie Taylor în τ, care este astfel un punct regulat. Dacă însă $\alpha > 1$, avem $\omega'(\tau) = 0$; iar dacă $\alpha < 1$, atunci funcţia nu este derivabilă în τ. Prin urmare, pentru $\alpha \neq 1$, funcţia $\omega(\zeta)$ nu poate fi prelungită analitic prin punctul τ în afara lui $Д^+$ — deşi ea poate fi prelungită prin continuitate în τ.

Considerind punctul $t \in \mathscr{L}$ corespunzător lui τ, rezultă că tangenta la stînga şi tangenta la dreapta la curba $\mathscr{L}_j$ în t formează un unghi intern egal cu $\alpha\pi$. Prin urmare, pentru $\alpha \neq 1$, punctului τ îi corespunde pe $\mathscr{L}$ un punct t *unghiular*, în care se unesc, sub un unghi diferit de π, două arce netede distincte. Acesta este de pildă cazul funcţiilor $(1 + \zeta)^2$ şi $(1 + \zeta)^{1/2}$, definite în discul unitate : vecinătăţii (evident netede) a punctului $\zeta = -1$ pe γ, îi corespund două arce netede (în fapt, chiar analitice) ce se unesc sub un unghi egal cu 2π, respectiv $\pi/2$ (vezi mai departe § 8, exemplele ***c*** şi ***d***).

Din (4) rezultă că pe fiecare porţiune netedă din $\mathscr{L}$, funcţia $\omega'(\zeta)$ poate fi prelungită prin continuitate în afara lui $Д^+$, şi că avem $\omega'(\tau) \neq 0$.

Prezintă deosebit interes practic cazurile în care valoarea la limită $\omega'(\tau)$ poate fi obținută nu prin prelungire prin continuitate din $Д^+$, ci prin chiar derivarea funcției-limită $\omega(\tau)$ în raport cu punctul $\tau \in Л$. Chestiunea a fost examinată de W. Seidel [1], ale cărui rezultate au fost precizate de V. Smirnov [1].

Luînd ca parametru pe $\mathscr{L}$ lungimea arcului de curbă s, presupunînd că funcția $\mathfrak{z}'(s)$ este absolut continuă, și că există un exponent $q > 1$ astfel ca funcția $|\mathfrak{z}''(s)|^q$ să fie integrabilă, se demonstrează că

$$\omega'(\zeta)|_{Л} = d\omega(\tau)/d\tau, \qquad \omega'(\tau) \neq 0. \tag{5}$$

Tot astfel, dacă funcțiile $\mathfrak{z}'(s)$, $\mathfrak{z}''(s)$ sînt absolut continue, și $|\mathfrak{z}'''(s)|^q$ este integrabilă, atunci $\omega''(\zeta)$ poate fi prelungită prin continuitate pe $Л$:

$$\omega''(\zeta)|_{Л} = d^2\omega(\tau)/d\tau^2. \tag{6}$$

În particular, rezultatul din (5) este valabil dacă $\mathscr{L} \in C^2(Л)$ iar cel din (6), dacă $\mathscr{L} \in C^3(Л)$. Într-adevăr, în primul caz funcția $\mathfrak{z}'(s)$ are derivată continuă, deci este absolut continuă, iar funcția $\mathfrak{z}''(s)$ este continuă, astfel că orice putere q a modulului ei este integrabilă. La fel se justifică afirmația relativă la al doilea caz.

Aceste condiții sînt, păstrînd proporțiile, mai tari decît condiția ca $\mathscr{L}$ să fie o linie jordaniană simplă, care asigură continuitatea în $Д^+ + Л$ a funcției $\omega(\zeta)$. Subliniem însă că, pe de o parte, ele sînt numai condiții suficiente; pe de altă parte, ele asigură continuitatea derivatelor respective și pe drumuri *tangente* la frontieră, așadar în condițiile cele mai severe.

Teoremele rămîn valabile dacă $Д^+$ nu este domeniul canonic cu frontiere circulare, ci un domeniu cu componente $Л_j$ oarecari, dar de clasă suficient de înaltă (în particular: analitice) ale frontierei.

În practică, este de mare utilitate teorema inversă teoremei de corespondență a frontierelor, numită *principiul corespondenței frontierelor*: dat fiind un domeniu multiplu-conex $Д$ de frontieră $Л$, și o funcție $\omega(\zeta)$, olomorfă și univalentă în $Д$, și continuă în $Д + Л$, atunci domeniul multiplu-conex $\mathscr{D}$ definit de curbele $\mathscr{L}_j = \omega(Л_j)$ (sensul de parcurs fiind indus de sensul de pe $Л_j$) este imaginea domeniului $Д$ în reprezentarea conformă $\mathfrak{z} = \omega(\zeta)$.

Acest principiu permite să realizăm următoarea construcție: fiind dat domeniul $Д$ de frontieră jordaniană $Л$ și fiind dată funcția $\omega(\zeta)$, putem construi curbele $\mathscr{L}_j$, descrise de punctul $\mathfrak{z} = \omega(\zeta)$ cînd ζ parcurge curbele $Л_j$. Ținînd seama de sensul de parcurs care trebuie ales în așa fel încît domeniul $Д$ (și deci și imaginea sa $\mathscr{D}$) să se afle permanent în stînga, obținem un domeniu $\mathscr{D}$ deplin definit de curbele $\mathscr{L}_j$.

Aceasta rezolvă *printr-o metodă inversă* problema reprezentării conforme. Alegînd drept $Д$ discul unitate, sau o coroană circulară, și considerînd diferite funcții olomorfe în $Д$, putem construi diferite domenii simplu sau dublu conexe, a căror reprezentare conformă pe disc sau pe coroană este dinainte cunoscută.

Ca bibliografie asupra teoremei și principiului corespondenței frontierelor, vezi: G. Goluzin [1], §§ 2.3, 6.2 și 10.1; C. Iacob [5], capitolul 2, pct. 25; M. Lavrentiev și B. Șabat [1],

§ 2.1, pct. 29; A. Markuşevici [1], § 5.3; W. Osgood [2], § 8.5; I. Privalov [2], § 12.7; S. Stoilov [1], volumul 1, capitolul 6, pct. 15–20.

În chestiunea proprietăţilor la limită ale reprezentării conforme, vezi: C. Caratheodory [1]; C. Gattegno şi A. Ostrovski [1]; M. Lavrentiev [1], capitolul 2; I. Vekua [1], § 1.2; S. Warschawski [1].

c) *Funcţia lui Green*

Problema directă a reprezentării conforme este, evident, mult mai dificilă. În rezolvarea ei, este de mare utilitate legătura dintre funcţia $\omega(\zeta)$ şi funcţia lui Green a domeniului dat $\mathscr{D}$:

$$G(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0) = -\ln|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0| + g(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0), \tag{7}$$

unde funcţia *reală* $g(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0)$ este armonică ca funcţie de x_1, x_2 şi satisface condiţia

$$g(\mathfrak{t}, \mathfrak{z}_0) = \ln|\mathfrak{t} - \mathfrak{z}_0|, \qquad \mathfrak{t} \in \mathscr{L}. \tag{8}$$

Notînd cu $H(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0)$ conjugata armonică a funcţiei $G(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0)$ (de asemenea ca funcţie de x_1, x_2), se poate demonstra că funcţia care realizează reprezentarea conformă a domeniului simplu conex $\mathscr{D}$ pe discul unitate $\mathscr{U}^+$ are forma

$$\zeta = \omega^{-1}(\mathfrak{z}) = \exp\{-[G(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0) + iH(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0)]\}, \tag{9}$$

unde $\mathfrak{z}_0$ este imaginea originii $\zeta = 0$. (Funcţia $H(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0)$ este în genere multiformă.)

Aceste formule rămîn valabile şi pentru un domeniu multiplu conex.

Problema directă a reprezentării conforme este deci principial echivalentă cu problema determinării funcţiei $g(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0)$, aşadar cu o *anumită* problemă Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace, cu date la limită ce depind numai de geometria domeniului $\mathscr{D}$.

Funcţia lui Green este invariantă în raport cu o reprezentare conformă (adică transformata ei prin intermediul reprezentării este chiar funcţia lui Green pentru domeniul-imagine).

Pentru studiul funcţiei lui Green, vezi de exemplu G. Goluzin [1], § 6.3; C. Iacob [5], capitolul 2, pct. 4–7 şi 12–22; S. Stoilov [1], volumul 2, capitolul 1, pct. 12–16; cap. 5, pct. 1–6.

d) *Integrala lui Schwarz-Christoffel. Reprezentări aproximative*

Funcţia de reprezentare poate fi adesea construită efectiv cu ajutorul principiului simetriei. Astfel, în cazul unui domeniu mărginit de o linie poligonală închisă, el conduce la importanta *formulă a lui Schwarz-Christoffel* (vezi de ex. C. Iacob, cap. 2, pct. 16–20):

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = a' + a\int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - \sigma_1)^{\alpha_1 - 1}(\zeta - \sigma_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - \sigma_p)^{\alpha_p - 1}\, d\zeta, \tag{10}$$

unde σ_k sînt afixele punctelor ce corespund pe cercul-unitate vîrfurilor poligonului; α_k măsoară unghiurile (în fracţiuni de π); iar constantele a' şi a caracterizează poziţia şi mărimea poligonului.

În cazul unui domeniu nemărginit (plan cu un orificiu poligonal), formula (10) rămîne valabilă, diferențiala $d\zeta$ înlocuindu-se însă cu $d\zeta/\zeta^2$. Constantele α_k sînt legate prin relația $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = p \pm 2$, unde semnul + se ia în cazul domeniului nemărginit (corespunzător sumei unghiurilor exterioare, egală cu $(p+2)\pi$), iar semnul −, în cazul domeniului mărginit (suma unghiurilor interioare fiind egală cu $(p-2)\pi$).

Formule asemănătoare se obțin în cazul reprezentării domeniilor poligonale pe un semiplan.

Desigur, în punctele σ_k corespunzătoare vîrfurilor poligonului avem $\omega'(\zeta) = 0$, astfel că reprezentarea încetează să mai fie conformă. (Compară cu a doua formulă (4).)

Determinarea punctelor σ_k este dificilă, iar prezența integralei din (10) face această reprezentare destul de greu maniabilă.

Să observăm că numărul domeniilor pentru care funcția de reprezentare este cunoscută sub o formă elementară, este extrem de redus. Întrucît funcția ce realizează reprezentarea conformă (pentru $\mathscr{D}$ simplu conex) este olomorfă în discul unitate, ea este desfășurabilă în serie Taylor:

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \zeta^n, \qquad |\zeta| < 1. \tag{11}$$

Considerînd o sumă parțială a acestei serii

$$\omega_m(\zeta) = \sum_{n=1}^{m} \omega_n \zeta^n, \tag{12}$$

se obține un polinom care realizează reprezentarea conformă a discului unitate pe un domeniu cu atît mai apropiat de $\mathscr{D}$, cu cît numărul de termeni reținut în (12) este mai mare. Aproximarea într-un punct anumit este cu atît mai bună cu cît acesta este mai depărtat de eventuale singularități pe frontieră ale funcției $\omega(\zeta)$. Pentru a aprecia gradul ei de precizie, e sugestivă compararea imaginilor $\omega(\sigma)$ și $\omega_m(\sigma)$ ale cercului unitate prin intermediul celor două funcții de reprezentare: cea exactă și cea aproximativă. De asemenea, se pot compara — cu ajutorul formulelor (7.15) și (7.18) din paragraful următor — direcția tangentei și raza de curbură a acestor curbe-frontieră.

Reprezentări de tipul (12) se obțin ușor în cazul domeniilor poligonale, dezvoltînd în serie integrandul din (10) și integrînd termen cu termen. Această metodă este recomandată de N. Musheli̦șvili [5], § 89, și larg utilizată de G. Savin [1]. Vezi de asemenea A. Green și W. Zerna [1], § 8.25. Avertizăm însă că ea este eficace mai ales în cazul domeniilor *nemărginite*, cu frontieră poligonală *convexă*. Dacă $\mathscr{D}$ este *mărginit* și convex, frontiera-imagine $\omega_m(\sigma)$ se abate mult de la frontiera poligonală dată, iar unghiurile apar mult rotunjite, chiar pentru m foarte mare. Explicația rezidă în faptul că pentru un domeniu nemărginit avem $\alpha_k > 1$, în timp ce pentru un domeniu mărginit, avem $\alpha_k < 1$. Or, considerînd formula binomului pentru fiecare termen $(\zeta - \sigma_k)^{\alpha_k - 1}$, este evident că convergența seriei obținute este mai rapidă dacă $\alpha_k - 1 > 0$, așadar pentru domeniul nemărginit. Raționamentul rămîne valabil în general pentru unghiuri

„ieşinde" şi unghiuri „intrinde". Un exemplu de acest fel va fi examinat în § 8, exemplul **e**. Vezi şi N. Arutiunian şi B. Abramian [1], § 1.7.

Integrala lui Schwarz-Christoffel rămîne adesea un punct de plecare util în lucrări ca cele ale lui S. Heller et al. [1] (unde se conservă numai *forma* acestei integrale, dar coeficienţii se aleg în aşa fel încît frontiera să treacă prin anumite puncte date); V. Mahovikov [1] (în care se separă o parte finită a integralei, şi o serie rapid convergentă) şi [3] (cu aplicaţie specială la domeniile poligonale).

Chestiunea comportării reprezentării conforme în vecinătatea punctelor de discontinuitate ale tangentei sau ale curburii prezintă o importanţă excepţională, din cauza fenomenului de concentrare a tensiunilor provocat de aceste discontinuităţi. Problema este amănunţit studiată de M. Kikukawa [1]—[4], care alege ca punct de pornire tot integrala lui Schwarz-Christoffel.

În principiu, orice domeniu simplu conex cu frontieră rectificabilă poate fi înlocuit cu un domeniu poligonal apropiat; determinînd o funcţie $\omega_m(\zeta)$ corespunzătoare acestuia din urmă, obţinem o funcţie care reprezintă conform discul unitate nu pe domeniul $\mathcal{D}$ dat, şi nici pe domeniul poligonal ce-l aproximează, ci pe un domeniu apropiat de acesta din urmă. Chestiunea evaluării erorii acestui procedeu rămîne deschisă.

Pentru domenii cu frontiere poligonale, se mai pot folosi anumite funcţii propuse de P. Sokolov (vezi M. Naiman [1]; G. Şapiro [1]), dar care nu mai derivă din integrala lui Schwarz-Christoffel. Să mai menţionăm lucrările lui V. Perehvatov [1], V. Pisacane şi L. Malvern [1] (ambele cu referire la reprezentarea conformă a domeniilor rectangulare); K. Ciarnik [1] (reprezentarea conformă a domeniilor compuse din dreptunghiuri); V. Mahovikov [2] (domenii dublu conexe).

Adesea, funcţia $\omega(\zeta)$ nu este cunoscută, sau este de o structură prea complicată pentru ca funcţiile $\omega_m(\zeta)$ să poată fi uşor determinate. De aceea, în legătură cu progresele tehnicii de calcul, precum şi ale metodelor analizei funcţionale, pe primul plan trec acum metodele aproximative de determinare a funcţiei $\omega(\zeta)$, bazate pe anumite proprietăţi extremale. Expunerea amănunţită a metodelor corespunzătoare este dată de L. Kantorovici şi V. Krîlov [1], capitolele 5 şi 6; M. Lavrentiev [1], capitolul 1; M. Lavrentiev şi B. Şabat [1], capitolul 4; S. Mihlin [3], § 24. Vezi şi monografia lui D. Gaier [1] şi articolele de sinteză asupra metodelor numerice în reprezentarea conformă, aparţinînd lui D. de Allen [1]; G. Birkhoff et al. [1]; M. Schiffer [1]; S. Warschawski [2]. Vezi de asemenea lucrările lui W. Seidel şi E. Ullrich citate de W. Koppenfels şi F. Stallman [1] şi lucrările indicate la nr. 18 şi 19 în bibliografia traducerii ruse a acestei monografii.

Pentru anumite metode electro-analogice, vezi de exemplu A. Krîlov et al. [1].

Pentru a încheia, să remarcăm că uneori chiar metode aproximative foarte grosiere pot fi satisfăcătoare pentru calcularea anumitor elemente şi, dimpotrivă, aproximări cu un mare număr de termeni pot fi insuficiente pentru calcularea altor parametri. (Vezi de exemplu H. Poritsky şi C. Danforth [1].) Astfel, mărimi cu caracter integral sau mediu se obţin adesea cu o bună precizie, în timp ce asupra unor mărimi cu caracter diferenţial putem fi induşi în eroare (mai ales în vecinătatea punctelor singulare ale reprezentării exacte, dacă prezenţa acestora nu este luată în considerare cu metode speciale).

§ 7. COORDONATE NATURALE. APLICAȚII

a) Coordonate naturale

Pentru simplitate, ne vom referi la cazul domeniilor mărginite de o curbă simplă închisă. Raționamentele se extind cu ușurință la domenii mărginite de două astfel de curbe.

În paragraful de față vom nota deci cu $Д^+$ discul unitate de frontieră γ din planul ζ, și cu $\mathfrak{z} = \omega(\zeta)$ funcția care realizează reprezentarea conformă a lui $Д^+$, pe domeniul mărginit și simplu conex $\mathscr{D}$, de frontieră jordaniană $\mathscr{L}$ din planul $\mathfrak{z}$. Alegînd $\omega(0) = 0$, originile se corespund.

Să trasăm în planul ζ un sistem de coordonate polare, cel mai potrivit pentru studiul fenomenelor ce se petrec în disc. Întrucît $\omega(\zeta) \in C^0\ (Д^+ + \gamma)$, fiecărei raze ce unește centrul discului cu un punct de pe γ, îi corespunde o curbă ce unește originea cu un punct de pe $\mathscr{L}$. Întrucît reprezentarea conservă unghiurile, aceste curbe sînt normale pe $\mathscr{L}$. Cercurilor concentrice ale rețelei de coordonate din planul ζ le corespund traiectoriile ortogonale primei familii de curbe, deja construite în $\mathscr{D}$. Evident, acestea sînt curbe simple închise, care nu se intersectează și care înconjură originea.

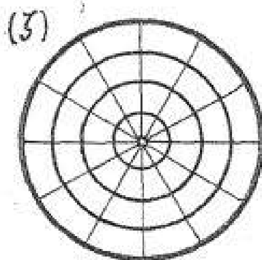


Fig. A.7.1

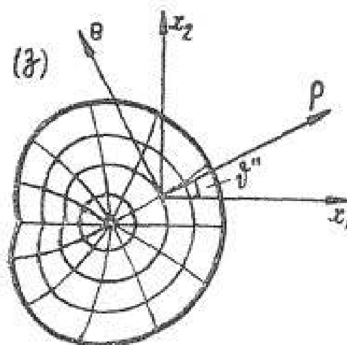


Fig. A.7.2

În felul acesta, razelor $\theta =$ const. le corespund curbe deschise, care este firesc să poarte numele de *linii* ρ; iar cercurilor $\rho =$ const., le corespund curbe închise, care se vor numi *linii* θ.

Ținînd seama de formula (6.9), se poate demonstra că liniile θ sînt liniile de nivel ale funcției lui Green, iar liniile ρ sînt liniile de nivel ale funcției conjugate cu funcția lui Green (vezi de ex. S. Stoilov [1], vol. 2, cap. 5, pct. 6).

Pentru exemple concrete, vezi § 8, exemplele **a** și ***d***.

Reprezentarea conformă induce astfel în $\mathscr{D}$ un sistem de coordonate curbilinii ortogonale, numite *coordonate naturale* ale domeniului. Corespondența biunivocă între $\mathscr{D}$ și $Д^+$ face deci ca fiecărui punct $\mathfrak{z} = x_1 + \mathrm{i}\, x_2 = R \exp(\mathrm{i}\chi)$ din $\mathscr{D}$ să-i corespundă un punct $\zeta = \rho \exp(\mathrm{i}\theta)$ în $Д^+$. Este firesc să atribuim punctului $\mathfrak{z}$ de coordonate carteziene x_1, x_2, coordonatele naturale (ρ, θ) asociate lui în acest mod.

Dacă $\mathscr{D}$ este mărginit și dublu conex, rolul discului unitate îl ia coroana circulară corespunzătoare, iar rețeaua de coordonate păstrează același aspect.

Dispunem astfel de posibilitatea de a transcrie *formal* orice funcție sau relație dată în $\mathscr{D}$, ca o funcție sau relație în $\varDelta^+$, așadar într-un domeniu de structură foarte simplă. Astfel, de exemplu, pentru a transcrie o funcție (scalară) de punct $f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ în $\varDelta^+$, este suficient să înlocuim pe $\mathfrak{z}$ prin valoarea sa

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \zeta^n. \tag{1}$$

(Pentru $\mathscr{D}$ dublu conex, în loc de (1) trebuie să considerăm o serie Laurent.)

Vom conveni ca, atunci cînd este cazul, să atribuim indicele (1) funcțiilor date în planul $\mathfrak{z}$ („planul fizic"), și să păstrăm același simbol funcțional, dar fără indice, pentru transformata funcției considerate în planul ζ („planul reprezentării"):

$$f_{(1)}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = f_{(1)}[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}] = f(\zeta, \bar{\zeta}). \tag{2}$$

Subliniem că în timp ce funcția $f_{(1)}(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ descrie în genere un fenomen oarecare în $\mathscr{D}$, funcția $f(\zeta, \bar{\zeta})$ *nu descrie* un fenomen analog în $\varDelta^+$: relația (2) trebuie înțeleasă ca o *identitate matematică*, ca o schimbare de coordonate în $\mathscr{D}$, și nu ca descrierea unui fenomen din $\mathscr{D}$ prin intermediul unui fenomen în $\varDelta^+$.

Cunoașterea funcțiilor ω și $f_{(1)}$ permite scrierea funcției f. Reciproc, dacă funcția $\zeta = \omega^{-1}(\mathfrak{z})$ poate fi explicitată, atunci cunoașterea lui f atrage cunoașterea explicită a lui $f_{(1)}$. În orice caz, cunoașterea funcțiilor ω și f asigură cunoașterea funcției $f_{(1)}$ cel puțin *sub formă parametrică*: pentru un $\zeta \in \varDelta^+$ dat, se cunoaște atît punctul $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}$ corespunzător, cît și valoarea lui $f_{(1)}$ în acel punct.

Din (1) și (2) rezultă formula de derivare în coordonate naturale:

$$f_{(1),\mathfrak{z}} = f_{,\zeta}\, \zeta'(\mathfrak{z}) = f_{,\zeta}/\omega'(\zeta). \tag{3}$$

În particular, pentru o funcție de o singură variabilă complexă obținem deci

$$f_{(1)}(\mathfrak{z}) = f(\zeta), \qquad f'_{(1)}(\mathfrak{z}) = f'(\zeta)/\omega'(\zeta). \tag{4}$$

Evident, aceste formule nu depind de ordinul de conexiune al domeniului.

În astfel de formule, vom nota adesea derivata *în planul* $\mathfrak{z}$ a unei funcții, cu aceeași literă, majusculă însă:

$$f'_{(1)}(\mathfrak{z}) = F_{(1)}(\mathfrak{z}). \tag{5}$$

Componentele unei mărimi care nu sînt scalare (de exemplu deplasările sau tensiunile) depind și de poziția axelor locale atașate coordonatelor naturale. Anume, trasînd tangentele la liniile ρ și θ ce trec printr-un punct dat din $\mathscr{D}$, obținem un sistem local de axe carteziene rectangulare, care se vor numi axe (ρ, θ). Acestea sînt frecvent utilizate în problemele antiplană și

plană. Conform convenției din § 4.1, componentele deplasării în aceste axe se vor nota u_ρ, u_θ; componentele deformației vor fi $\varepsilon_{\rho\rho}$, $\varepsilon_{\rho\theta}$, $\varepsilon_{\theta\theta}$; iar cele ale tensiunii vor fi $\widehat{\rho\rho}$, $\widehat{\rho\theta}$, $\widehat{\theta\theta}$.

Dacă vom face uz de coordonate polare în chiar planul fizic $\mathfrak{z} = R \exp(i\chi)$, atunci componentele tensiunii, de pildă, se vor nota $\widehat{RR}$, $\widehat{R\chi}$, $\widehat{\chi\chi}$.

Poziția axelor (ρ, θ) față de axele (x_1, x_2) este deplin caracterizată de unghiul $\tilde{\vartheta}$ format de axa locală ρ cu axa x_1, în sensul de la x_1 la ρ. (Pentru justificarea notației, vezi și § 3, pag. 699. Acesta este tot un caz particular al notației ce va fi folosită în figura A.7.3.) Evident, acest unghi este funcție de x_1, x_2, adică de ρ, θ. Dacă $\mathfrak{z}$ se deplasează pe linia ρ, punctul corespunzător ζ se deplasează *radial*, în lungul razei θ. Avem deci

$$d\mathfrak{z} = |d\mathfrak{z}| \exp(i\tilde{\vartheta}), \quad d\zeta = |d\zeta| \exp(i\theta), \tag{6}$$

de unde

$$\exp(i\tilde{\vartheta}) = \frac{d\mathfrak{z}}{|d\mathfrak{z}|} = \frac{\omega'(\zeta)\, d\zeta}{|\omega'(\zeta)\, d\zeta|} = \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \exp(i\theta),$$

sau încă, întrucît $\zeta = |\zeta| \exp(i\theta)$:

$$\exp(i\tilde{\vartheta}) = \zeta\, \omega'(\zeta)/|\zeta\, \omega'(\zeta)|. \tag{7}$$

(Relația este valabilă numai pentru domenii simplu și dublu conexe.)

Pentru un vector de componente V_1, V_2 în axele carteziene inițiale, obținem

$$V_1 + i\, V_2 = \exp(i\tilde{\vartheta})\, (V_\rho + i\, V_\theta), \tag{8}$$

unde factorul $\exp(i\tilde{\vartheta})$ este dat de relația (7). În mod analog se pot obține formule de transformare pentru componentele unui tensor.

b) Elemente geometrice fundamentale

Anumite elemente geometrice ale domeniului *simplu conex* $\mathscr{D}$ (elementul de arc și curbura pe $\mathscr{L}$, aria, centrul de greutate și momentele de inerție ale lui $\mathscr{D}$) pot fi calculate făcînd uz numai de valorile la limită ale lui $\omega(\zeta)$ și ale derivatelor sale. Anume, notînd

$$\zeta\,|_\gamma = \sigma = \exp(i\theta), \quad \bar{\sigma} = \sigma^{-1}, \tag{9}$$

avem evident

$$t = \mathfrak{z}\,|_{\mathscr{L}} = \omega(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \sigma^n, \quad \omega'(\zeta)\,|_\gamma = d\omega/d\sigma, \quad \omega''(\zeta)\,|_\gamma = d^2\omega/d\sigma^2, \tag{10}$$

unde prima relație este valabilă pentru $\mathscr{L} \in C^0$; a doua, pentru $\mathscr{L} \in C^2$; a treia pentru $\mathscr{L} \in C^3$ (vezi formulele (6.5), (6.6)).

Pentru elementul de arc ds pe frontiera $\mathscr{L}$ obținem mai întîi

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = dt\, d\bar{t}, \tag{11}$$

de unde, dacă $\mathscr{L} \in C^2$, deducem

$$ds^2|_{\mathscr{L}} = -\,\omega'(\sigma)\,\overline{\omega'(\sigma)}\,\sigma^{-2}(d\sigma)^2,$$

i deci

$$ds|_{\mathscr{L}} = -\,\mathrm{i}\sqrt{\omega'(\sigma)\,\overline{\omega'(\sigma)}}\;\sigma^{-1}\,d\sigma. \tag{12}$$

(Radicalul se ia cu determinarea sa pozitivă, întrucît avem $-\,i\,\sigma^{-1}\,d\sigma = d\theta$; alegerea semnului + în (12) ar corespunde la schimbarea de sens pe $\mathscr{L}$.)

Prin urmare, lungimea unui arc oarecare al curbei frontieră este dat — pe orice porțiune pe care curba e de clasă C^2— de formula

$$s - s_0 = -\,\mathrm{i}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\sqrt{\omega'(\sigma)\,\overline{\omega'(\sigma)}}\;\sigma^{-1}\,d\sigma. \tag{13}$$

De aci urmează că orice funcție dată pe $\mathscr{L}$ ca funcție de s, poate fi transcrisă și ca funcție de σ (sau de θ). În particular, dacă pe $\mathscr{L}$ este dată o funcție $f_{(1)}(s)$, integrala acesteia în raport cu s este

$$\int_{s_0}^{s} f_{(1)}(s)\;ds = -\,\mathrm{i}\int_{\sigma_0}^{\sigma} f_{(1)}\,[s(\sigma)]\,\sqrt{\omega'(\sigma)\,\overline{\omega'(\sigma)}}\;\sigma^{-1}\,d\sigma, \tag{14}$$

unde funcția $s(\sigma)$ este dată de (13).

Pentru a calcula cosinușii directori ai normalei sau tangentei la curba frontieră, obținem ușor din (4.22) și (12):

$$\boldsymbol{s} = \cos(\boldsymbol{s}, x_1) + \mathrm{i}\cos(\boldsymbol{s}, x_2) = \mathrm{i}\,\sigma\sqrt{\omega'(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}}\,. \tag{15}$$

Dacă avem $\mathscr{L} \in C^2$ pe porțiuni, această formulă trebuie folosită pentru fiecare porțiune în parte (vezi mai jos § 8, exemplul ***e***).

Pe porțiunile pe care $\mathscr{L} \in C^3$, putem face uz de a treia formulă (10). Ținînd seama de (9), urmează că coordonatele x_1, x_2 pot fi privite ca funcții de parametrul real θ pe $[0, 2\pi]$. Întrucît avem

$$d/d\theta = (d\sigma/d\theta)\,d/d\sigma, \qquad d\sigma/d\theta = \mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\theta) = \mathrm{i}\sigma,$$

urmează evident

$$d/d\theta = \mathrm{i}\sigma\,d/d\sigma, \quad d^2/d\theta^2 = -\,(\sigma^2\,d^2/d\sigma^2 + \sigma\,d/d\sigma). \tag{16}$$

Pentru a calcula raza de curbură cu ajutorul formulei (3.13), unde rolul parametrului real r îl joacă acum θ, vom ține seama că pe $\mathscr{L}$ avem

$$x_1'^2 + x_2'^2 = (dt/d\theta)\,(d\bar{t}/d\theta), \quad x_1'\,x_2'' - x_1'\,x_2'' = \mathrm{Im}\,[(d\bar{t}/d\theta)\,(d^2t/d\theta^2)]. \tag{17}$$

Introducînd (16) și (17) în (3.13), obținem în definitiv

$$R|_{\mathscr{L}} = \frac{[\omega'(\sigma)\,\overline{\omega'(\sigma)}]^{3/2}}{\omega'(\sigma)\,\overline{\omega'(\sigma)} + \mathrm{Re}\,[\sigma\omega'(\sigma)\,\overline{\omega''(\sigma)}]}\,. \tag{18}$$

c) *Arie, centru de greutate, momente de inerţie*

Pentru aria D a domeniului $\mathscr{D}^+$, avem din (3.4) şi (4.29)

$$D = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\oint_{\mathscr{L}} \bar{t}\,\mathrm{d}t, \tag{19}$$

formulă valabilă şi pentru un domeniu multiplu conex mărginit; în acest caz, integralele pe componentele interioare ale lui $\mathscr{L}$ trebuie luate în sensul retrograd de parcurs. Dacă $\mathscr{D}$ este simplu conex, cu $\mathscr{L} \in C^2$ pe porţiuni, (19) devine

$$D = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\oint_{\gamma} \overline{\omega(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{20}$$

Introducînd aci expresia (10) şi integrînd, obţinem

$$D = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\omega_n|^2. \tag{21}$$

Notînd cu $\mathfrak{z}_0 = x_1^0 + \mathrm{i}\,x_2^0$ afixul centrului de greutate, obţinem din (3.5) şi (4.29)

$$D\,\mathfrak{z}_0 = \iint_{\mathscr{D}^+} \mathfrak{z}\;\mathrm{d}D = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\oint_{\mathscr{L}} t\,\bar{t}\;\mathrm{d}t \tag{22}$$

(formulă valabilă, ca şi (19), şi pentru un domeniu multiplu conex). Dacă $\mathscr{D}$ este simplu conex şi $\mathscr{L} \in C^2$ pe porţiuni, avem de aci

$$D\,\mathfrak{z}_0 = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\oint_{\gamma} \omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{23}$$

Pentru a calcula momentele de inerţie, întrucît avem

$$\begin{gathered}(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)^2 = (x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2 + 2\,\mathrm{i}\,(x_1 - x_1^0)\,(x_2 - x_2^0),\\ (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)\,(\bar{\mathfrak{z}} - \bar{\mathfrak{z}}_0) = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2,\end{gathered} \tag{24}$$

este firesc să introducem, cu ajutorul formulelor (3.8), cantităţile

$$\begin{gathered}I = I_{22} - I_{11} + 2\,\mathrm{i}\,I_{12} = \iint_{\mathscr{D}^+} (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)^2\,\mathrm{d}D,\\ I_0 = I_{11} + I_{22} = \iint_{\mathscr{D}^+} (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)\,(\bar{\mathfrak{z}} - \bar{\mathfrak{z}}_0)\,\mathrm{d}D.\end{gathered} \tag{25}$$

Mărimea I se numeşte *moment complex central* (nu şi principal) *de inerţie*, iar I_0 este evident *momentul polar central de inerţie* al domeniului $\mathscr{D}^+$.

Din (25) se obţin uşor momentele în raport cu alte axe, rotite de un unghi oarecare ϑ faţă de cele iniţiale. Anume, pentru un punct de afix z în axele vechi şi z^1 în cele noi, avem evident

$$z = [\exp (i\vartheta)]\, z^1; \tag{26}$$

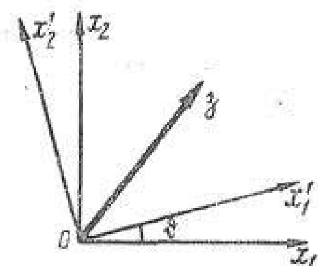


Fig. A.7.3

din (25) obţinem deci

$$I^1 = [\exp (-2\, i\, \vartheta)]\, I, \quad I_0^1 = I_0, \tag{27}$$

de unde

$$\begin{aligned} I_{11}^1 &= \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) + \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \cos 2\vartheta - I_{12} \sin 2\vartheta, \\ I_{22}^1 &= \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) - \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \cos 2\vartheta + I_{12} \sin 2\vartheta, \\ I_{12}^1 &= \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \sin 2\vartheta + I_{12} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \tag{28}$$

În particular, luînd $I_{12}^1 = 0$, obţinem relaţia

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 2 I_{12} : (I_{22} - I_{11}), \tag{29}$$

care permite determinarea axelor principale centrale de inerţie.

Ţinînd seama în (25) de formula lui Stokes (4.29), obţinem (pentru $\mathscr{D}$ eventual multiplu conex)

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} i \oint_{\mathscr{L}} (t - z_0)^2 (\bar{t} - \bar{z}_0)\, dt, \\ I_0 &= -\frac{1}{4} i \oint_{\mathscr{L}} (t - z_0)(\bar{t} - \bar{z}_0)^2\, dt, \end{aligned} \tag{30}$$

de unde în cazul unui domeniu simplu conex

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} i \oint_{\gamma} [\omega(\sigma) - z_0]^2 [\overline{\omega(\sigma)} - \bar{z}_0]\, \omega'(\sigma)\, d\sigma, \\ I_0 &= -\frac{1}{4} i \oint_{\gamma} [\omega(\sigma) - z_0] [\overline{\omega(\sigma)} - \bar{z}_0]^2\, \omega'(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned} \tag{31}$$

Pentru momentele ne-centrale J și J_0 se pot construi formule analoge, înlocuind în (25) — (31) pe $\mathfrak{z}_0$ prin zero. În particular, din (31) obținem

$$J = -\frac{1}{2} i \oint_\gamma [\omega(\sigma)]^2 \overline{\omega(\sigma)}\, \omega'(\sigma)\, d\sigma, \quad J_0 = -\frac{1}{4} i \oint_\gamma \omega(\sigma) [\overline{\omega(\sigma)}]^2 \omega'(\sigma)\, d\sigma. \tag{32}$$

Dacă funcția $\omega(\zeta)$ este rațională, integralele ce intervin în determinarea ariei, centrului de greutate și momentelor de inerție, se calculează cu ajutorul teoremei reziduurilor.

Dacă $\mathscr{D}$ este *dublu conex*, formulele (12), (14), (15), (18), (20), (23), (31) și (32) pot fi ușor generalizate pornind de la înlocuirea formulelor (9) prin

$$\zeta\,\big|_{\Gamma_0} = \rho_0\sigma, \quad \zeta\,\big|_{\Gamma_1} = \rho_1\sigma, \quad \sigma = \exp(i\theta). \tag{33}$$

Astfel de exemplu, din (11) și (33) obținem, în loc de (12):

$$ds\,|_\rho = -i\,\bar{\zeta}\sqrt{\omega'(\zeta)\,\overline{\omega'(\zeta)}}\, d\sigma, \quad \zeta = \rho\sigma, \tag{34}$$

pe orice cerc de rază $\rho \in [\rho_1, \rho_0]$.

§ 8. REPREZENTAREA CONFORMĂ. EXEMPLE

Vom da aci numai cîteva exemple de funcții suficient de simple, ce realizează reprezentarea conformă a discului unitate sau a coroanei circulare, pe anumite domenii. Acesta nu este un dicționar de reprezentări conforme, ci servește numai la a sublinia ideile principale, și a pregăti exemplele din capitolele 5 și 6.

a) Transformarea omografică

Să considerăm funcția (transformarea) omografică și inversa sa

$$\mathfrak{z} = (a\zeta + b)/(c\zeta + d), \qquad \zeta = (-d\mathfrak{z} + b)/(c\mathfrak{z} - a), \tag{1}$$

unde a, b, c, d sînt constante complexe, și $ad \neq bc$. Relațiile (1) stabilesc vizibil o corespondență biunivocă între *întreg* planul ζ, și *întreg* planul $\mathfrak{z}$.

Această transformare conservă cercurile (inclusiv dreptele, privite ca cercuri de rază infinită); într-adevăr, scriind ecuația unui cerc sub forma

$$A(x_1^2 + x_2^2) + Bx_1 + Cx_2 + D \equiv A\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} + \mathrm{Re}\,[(B - iC)\mathfrak{z}] + D = 0, \tag{2}$$

și introducînd aci (1), obținem o expresie de același tip în variabilele $\zeta, \bar{\zeta}$.

Să reținem cazul particular de transformare omografică

$$\mathfrak{z} = \zeta/(1 - a\zeta), \quad \zeta = \mathfrak{z}/(1 + a\mathfrak{z}), \tag{3}$$

(unde a este o constantă reală). În acest caz, punctelor $(0, 1/a, \zeta_\infty)$ din planul ζ le corespund punctele $(0, \mathfrak{z}_\infty, -1/a)$ din planul $\mathfrak{z}$.

Să trasăm sistemul de coordonate polare din planul ζ (fig. A.8.1). Imaginea unei raze („cerc" de rază infinită ce trece prin punctele $0, \zeta_\infty$) este deci un cerc ce trece prin punctele $0, -1/a$. Imaginea unui cerc $\rho = \text{const.}$ este de asemenea un cerc. Prin urmare, liniile $\theta = \text{const.}$ sînt cercurile ce trec prin punctele 0, $-1/a$, şi au axul radical $x_1 = -1/2a$, iar liniile $\rho = \text{const.}$ sînt cercurile ortogonale celor dintîi.

Cercul $\rho = \text{const.}$ taie axa ξ_1 în punctele $\pm\rho$, cărora în planul $\mathfrak{z}$ le corespund punctele $\pm\rho/(1 \mp a\rho)$, situate pe axa reală. Centrul x_1^c, x_2^c şi raza R a cercului ce trece prin aceste puncte sînt deci cunoscute din formulele

$$x_1^c = a\,\rho^2/(1 - a^2\rho^2), \quad x_2^c = 0, \quad R = \rho/(1 - a^2\,\rho^2). \tag{4}$$

Pentru a inversa aceste formule, observăm că ultima din ele dă

$$\rho = [-1 + \sqrt{1 + 4\,a^2 R^2}] : 2\,a^2 R > 0\,. \tag{5}$$

Dacă dorim să reprezentăm conform o coroană circulară excentrică de raze R_0, R_1 pe o coroană circulară, formula (5) dă razele ρ_j corespunzătoare cercurilor de raze R_j $(j = 0, 1)$. Prima relaţie (4) — scrisă pentru centrele corespunzătoare x_1^0, x_1^1 — ar furniza două expresii distincte pentru parametrul a. În fapt însă, nu cunoaştem poziţiile centrelor, ci numai (linia centrelor fiind aleasă drept axă Ox_1) distanţa lor $l_{01} = x_1^0 - x_1^1$. Calculînd pe l_{01} cu ajutorul primei relaţii (4) şi ţinînd seama de ultima relaţie (4), căpătăm $l_{01} = a(R_0\rho_0 - R_1\rho_1)$. Introducînd aci expresia (5) (scrisă pentru ambele cercuri), deducem :

$$a = l_{01} : \sqrt{(R_0^2 - R_1^2)^2 - l_{01}^2\,(R_0^2 + R_1^2) + l_{01}^4}\,. \tag{6}$$

Prin urmare, date fiind două cercuri care nu se intersectează, şi avînd razele R_0, R_1 şi distanţa centrelor l_{01}, formulele (5), (6) permit să se determine atît parametrul a al reprezentării (3), cît şi razele ρ_0, ρ_1 ale cercurilor corespunzătoare celor date.

Izolînd în (5) produsul $a\rho$, conchidem uşor că $a\rho < 1$.

În ce priveşte dreapta $\theta = \text{const.}$, aceasta are ecuaţia $B\,\xi_1 + C\,\xi_2 = 0$, unde $-B/C = \operatorname{tg}\theta$. Notînd $B + \mathrm{i}\,C = \beta$, această ecuaţie se scrie $\bar\beta\,\zeta + \beta\,\bar\zeta = 0$, de unde, făcînd uz de (3), căpătăm ecuaţia cercului-imagine sub forma $a(\beta + \bar\beta)\,\mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}} + \bar\beta\,\mathfrak{z} + \beta\,\bar{\mathfrak{z}} = 0$, sau încă $x_1^2 + x_2^2 + (1/a)\,x_1 + (C/aB)x_2 = 0$, ceea ce dă poziţia centrului cercului şi raza sa :

$$x_1^c = -1/2a, \quad x_2^c = -C/2\,a\,B = (\operatorname{ctg}\,\theta)/2\,a\,, \quad r = \sqrt{(x_1^c)^2 + (x_2^c)^2} = 1/(2\,a \sin\theta). \tag{7}$$

Un raţionament similar celui de mai sus permite inversarea acestor formule — ceea ce este necesar cînd avem de-a face cu două cercuri care se intersectează.

Acum putem construi efectiv reţeaua de coordonate naturale ataşate reprezentării (3). Imaginea sistemului de coordonate polare din planul ζ (fig. A.8.1) este dată în figura A.8.2 (pentru $a = 1/5$). Săgeţile indică sensul de parcurs (ce poate fi urmărit cu ajutorul nodurilor corespunzătoare ale reţelelor de coordonate). Subliniem că în figura A.8.2 punctele 0, $-1/a$ sînt unite prin cîte *două* arce de cerc parcurse în sensuri opuse, dintre care unul corespunde razei $\theta = \text{const.}$, iar celălalt, razei opuse $\theta = \text{const.} + \pi$ din planul ζ.

Alegînd pe figura A.8.2 un domeniu oarecare mărginit de două cercuri $\theta = \text{const.}$ şi două cercuri $\rho = \text{const.}$, principiul corespondenţei frontierelor arată că prima funcţie din (3)

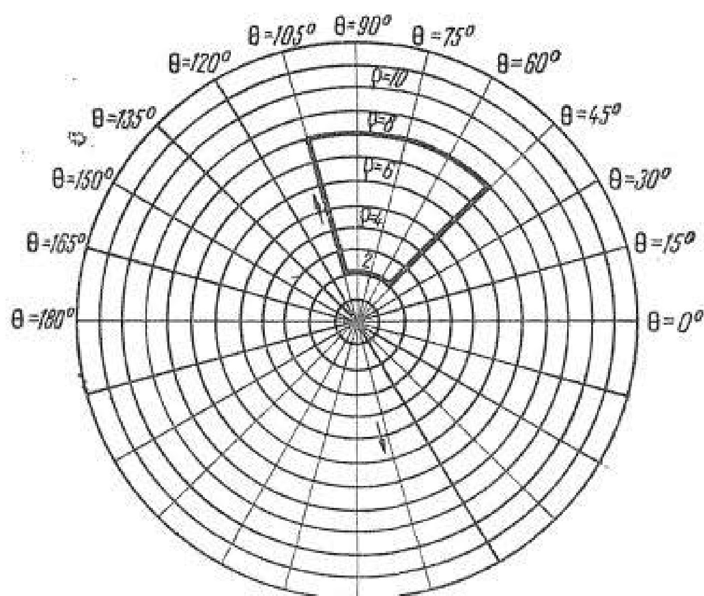


Fig. A.8.1

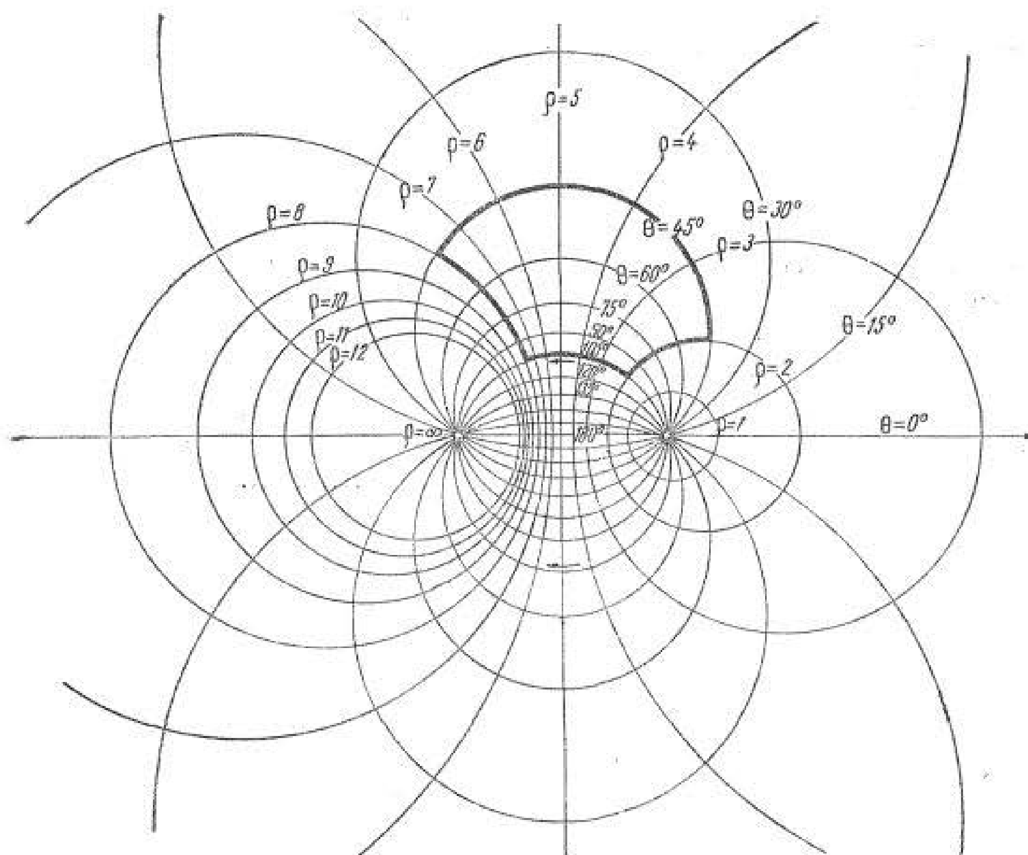


Fig. A.8.2

realizează reprezentarea conformă a domeniului mărginit de razele şi cercurile concentrice corespunzătoare din figura A.8.1, pe acest domeniu). (Pe ambele figuri, arcele trasate îngroşat dau un exemplu de frontiere în corespondenţă.)

Reciproc, dat fiind un patrulater curbiliniu dreptunghic format din arce de cerc, atunci parametrul a şi valorile corespunzătoare ρ, θ pot fi efectiv determinate. Pentru astfel de domenii, transformarea (3) realizează deci reprezentarea necesară.

OBSERVAŢIE. Punctul $\zeta=5$ din figura A.8.1 trece în punctul $\mathfrak{z}_\infty$. Prin urmare, de exemplu, *interiorul* cercului $\rho = 10$ din figura A.8.1 trece în *exteriorul* cercului notat tot cu $\rho = 10$ în figura A.8.2; punctul $\mathfrak{z}_\infty$ trebuie privit ca punct *interior* al acestui domeniu, astfel că exteriorul cercului considerat este simplu conex, şi nu dublu conex. Pe de altă parte, *exteriorul* cercului $\rho = 10$ din figura A.8.1 trece în *interiorul* lui $\rho = 10$ din figura A.8.2; el nu conţine însă punctul notat cu $\rho = \infty$, astfel că interiorul acestui cerc trebuie privit de fapt ca interiorul unei coroane circulare, aşadar ca un domeniu dublu conex.

În legătură cu cele de mai sus a se revedea şi § 3, pag. 694.

b) *Coroana eliptică (elipse confocale)*

Să considerăm funcţia

$$\mathfrak{z} = c(\zeta + h\,\zeta^{-1}), \quad c > 0, \quad h \geqslant 0. \tag{8}$$

Întrucît avem $\mathfrak{z} = x_1 + \mathrm{i}\,x_2$, $\zeta = \rho \exp(\mathrm{i}\theta)$, din (8) deducem

$$x = c\,(\rho + h\,\rho^{-1}) \cos \theta, \quad y = c\,(\rho - h\,\rho^{-1}) \sin \theta, \tag{9}$$

aşadar ecuaţiile parametrice ale unei elipse de semi-axe

$$a = c\,(\rho + h\,\rho^{-1}), \quad b = c(\rho - h\,\rho^{-1}), \tag{10}$$

pentru oricare ρ pentru care $\rho - h\,\rho^{-1} \geqslant 0$, aşadar $\rho^2 \geqslant h$.

Distanţa focală a acestei elipse nu depinde de ρ:

$$d^2 = a^2 - b^2 = 4\,h\,c^2. \tag{11}$$

Principiul corespondenţei frontierelor arată deci că funcţia (8) realizează reprezentarea conformă a coroanei circulare de raze $\rho_0 > \rho_1 \geqslant h$ din planul ζ, pe domeniul dublu conex mărginit de două elipse confocale $\mathscr{L}_0$ şi $\mathscr{L}_1$ din planul $\mathfrak{z}$. Liniile $\rho=$const. sînt elipse cuprinse între $\mathscr{L}_0$ şi $\mathscr{L}_1$ şi confocale cu acestea, iar liniile $\theta =$ const. sînt hiperbole, de asemenea confocale cu ele.

Reciproc, fie date elipsele $\mathscr{L}_0$ (de semi-axe a, b) şi $\mathscr{L}_1$ (de semi-axe a', b'). (Notaţia nu este consecventă, dar este comodă; în plus, ea evită unele confuzii ulterioare.) În acest caz, din relaţiile (10) scrise pe cele două componente ale frontierei urmează:

$$a'/c = \rho_1 + h\,\rho_1^{-1}, \quad b'/c = \rho_1 - h\rho_1^{-1}; \quad a/c = \rho_0 + h\rho_0^{-1}, \quad b/c = \rho_0 - h\,\rho_0^{-1}. \tag{12}$$

Ţinînd seama şi de condiţia de legătură (11), de unde

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 = 4h\,c^2, \tag{13}$$

rezultă că pentru elipse confocale, avem de determinat trei din cele patru constante c, h, ρ_0, ρ_1, una din ele putînd fi aleasă arbitrar. Adunînd termen cu termen primele două şi ultimele

două relații (12), căpătăm

$$a' + b' = 2\,c\,\rho_1, \qquad a + b = 2\,c\,\rho_0, \tag{14}$$

de unde, luînd de pildă $\rho_1 = 1$, și ținînd seama de (13), deducem :

$$c = \frac{1}{2}(a' + b'), \quad h = \frac{a' - b'}{a' + b'}, \quad \rho_0 = \frac{a + b}{a' + b'}, \quad \rho_1 = 1, \tag{15}$$

astfel că funcția (8) care reprezintă conform interiorul coroanei circulare de raze $\rho_0 = (a + b) : (a' + b')$ și 1, pe domeniul mărginit de $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1$ devine

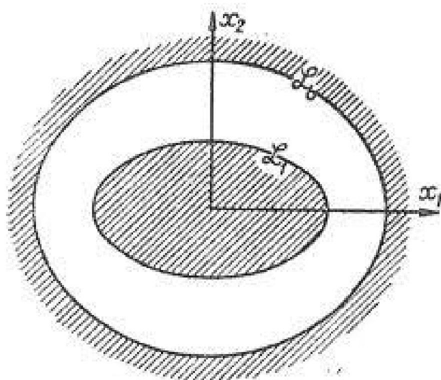


Fig. A.8.3

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}(a' + b')\left(\zeta + \frac{a' - b'}{a' + b'}\zeta^{-1}\right). \tag{16}$$

Întrucît $a + b > a' + b'$, avem evident $\rho_0 > \rho_1 = 1$, și $h \leqslant 1$.

În loc să fixăm valoarea $\rho_1 = 1$, putem da dinainte valoarea parametrului $h = 1$. În acest caz, (8) se va scrie

$$\mathfrak{z} = c\,(\zeta + \zeta^{-1}), \tag{17}$$

formă sub care ea poartă numele de *transformarea lui Jukowski*. Din (13) și (14) deducem acum

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a'^2 - b'^2}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a + b}{a - b}}, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{a' + b'}{a' - b'}}, \tag{18}$$

astfel că funcția (8) care reprezintă conform interiorul coroanei circulare de raze ρ_0, ρ_1 din (18), pe domeniul mărginit de $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1$, este

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}\,(\zeta + \zeta^{-1}). \tag{19}$$

Valorile c, ρ_0 din (15) *nu trebuie în nici un caz confundate* cu cele din (18). Notăm că h din (15) este legat de ρ_1 din (18) prin relația $h = \rho_1^{-2}$.

După cum se vede din (10), dacă raza ρ_1 a cercului interior este $\sqrt{h}$, atunci semi-axele elipsei interioare sînt

$$a' = 2\,c\sqrt{h}, \quad b' = 0, \tag{20}$$

și $\mathscr{L}_1$ se reduce la un segment mărginit de focarele lui $\mathscr{L}_0$ (compară și cu (13)).

Dacă în particular $h = 1$, urmează că segmentul $[-2c, 2c]$ este imaginea prin intermediul transformării (17), a cercului unitate ; în acest caz, valorile corespunzătoare din (15) și (18) coincid.

Într-adevăr, din (15) căpătăm

$$c = \frac{1}{2}a', \quad \rho_0 = \frac{a + b}{a'}, \quad h = 1 \ \text{(pentru } \rho_1 = 1\text{)}, \tag{21'}$$

iar din (18) deducem

$$c = \frac{1}{2} a', \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad \rho_1 = 1 \quad (\text{pentru } h = 1), \tag{21''}$$

unde valorile ρ_0 coincid în virtutea relației (13) (pentru $b' = 0$).

Așadar, funcția (19) reprezintă conform coroana circulară de raze $\rho_0 = \sqrt{(a+b)/(a-b)}$ și $\rho_1 = 1$, pe discul eliptic de frontieră $_0$, *cu o tăietură între focare.*

Din (9) avem acum

$$x_1 = 2c \cos \theta, \quad x_2 = 0, \tag{22}$$

astfel că acest segment este parcurs *de două ori* în sensuri opuse, atunci cînd punctul $\sigma = \exp(i\theta)$ parcurge pe γ. În loc de (22), mai putem scrie

$$x_1 = c(\sigma + \bar{\sigma}), \qquad x_2 = 0, \tag{23}$$

ceea ce arată că punctele σ și $\bar{\sigma}$ de pe γ au drept imagine *același* punct $(x_1, 0)$ de pe segmentul $\mathscr{L}_1$.

Se știe că funcția care reprezintă conform discul eliptic pe discul unitate este de structură foarte complicată:

$$\zeta = \sqrt{k\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right]} \operatorname{sn}\left[\frac{2K}{\pi} \sin^{-1} \mathfrak{z};\ \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right], \tag{24}$$

unde sn este funcția sinus-integral (inversa integralei Schwarz-Christoffel care reprezintă conform semiplanul superior pe interiorul dreptunghiului de vîrfuri $K, -K, K + iK', -K + iK'$). Pentru detalii, inclusiv semnificația funcției k și a constantei K, vezi de exemplu W. Koppenfels și F. Stallmann [1], § 7.1; S. Mihlin [1], § 30; Z. Nehari [1], § 6.3.

Funcția lui Jukowski — pentru același disc eliptic cu o tăietură între focare — este în schimb foarte simplă. În unele probleme, se poate trece ușor de la cazul discului eliptic cu tăietură, la cel al discului eliptic plin, punînd anumite condiții de conjugare pe segmentul $\mathscr{L}_1$ pentru funcțiile căutate — ceea ce este incomparabil mai simplu decît a se face uz de funcția (24).

Prezintă totodată interes utilizarea de metode aproximative pentru problema considerată. L. Kantorovici și V. Krîlov [1], § 5.6, dau o astfel de metodă, precum și un exemplu numeric pentru elipsa de semi-axe $\sqrt{4/3}$, $\sqrt{4/5}$:

$$\frac{3}{4} x_1^2 + \frac{5}{4} x_2^2 = 1. \tag{25}$$

Notînd cu $\omega_m(\zeta)$ polinoame de grad m ce realizează reprezentarea conformă aproximativă a discului unitate pe acest disc eliptic (așadar nu neapărat sume parțiale ale seriei (6.11) pentru funcția (24)) avem:

$$\begin{aligned} \omega_1(\zeta) &= 0{,}99\ \zeta, \\ \omega_3(\zeta) &= 0{,}99\ (\zeta + 0{,}12\ \zeta^3), \\ \omega_5(\zeta) &= 0{,}99\ (\zeta + 0{,}12\ \zeta^3 + 0{,}03\ \zeta^5), \\ \omega_7(\zeta) &= 0{,}99\ (\zeta + 0{,}12\ \zeta^3 + 0{,}03\ \zeta^5 + 0{,}01\ \zeta^7). \end{aligned} \tag{26}$$

Pentru a evalua gradul de precizie al procedeului, se pot calcula coordonatele x_1, x_2 pe curbele-frontieră $\omega_1(\sigma)$, $\omega_3(\sigma)$, $\omega_5(\sigma)$, $\omega_7(\sigma)$ ca funcţii de unghiul θ. Curba $\omega_1(\sigma)$ este un cerc; curba $\omega_7(\sigma)$ nu a putut fi trasată, întrucît la scara desenului ea coincide cu elipsa $\omega(\sigma)$.

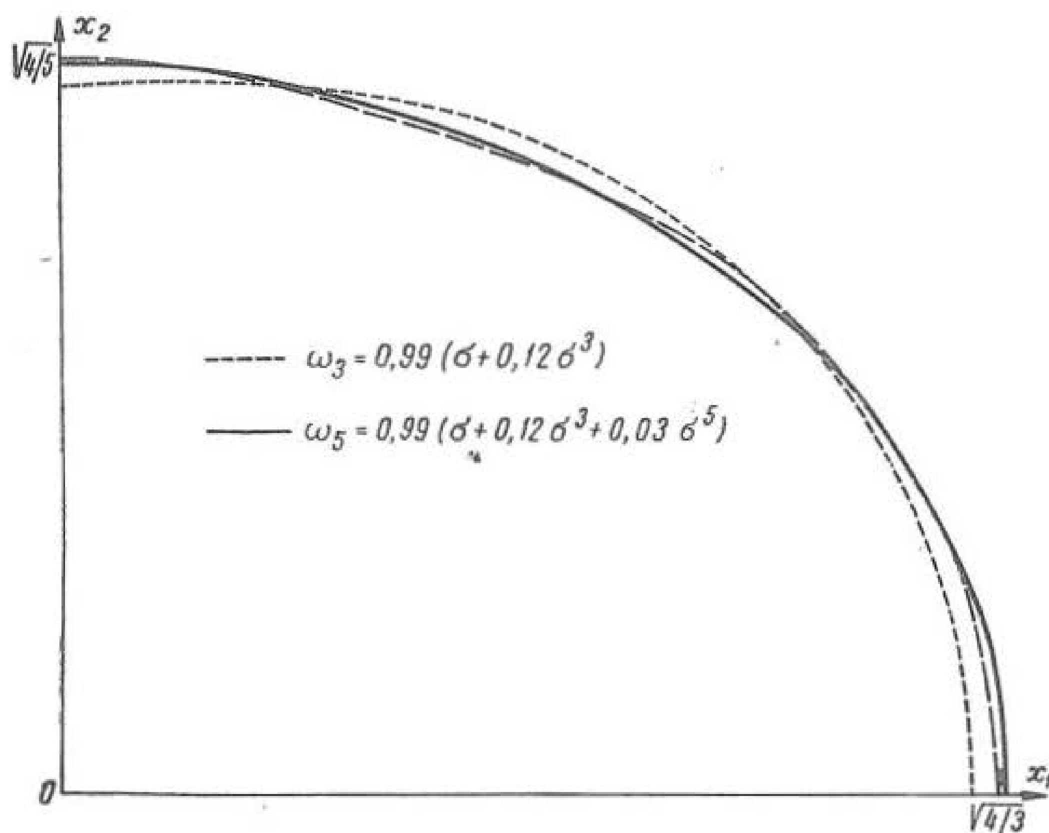


Fig. A.8.4

c) *Cardioida*

Să considerăm funcţia *raţională* (mai mult: *polinomială*)

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = a(1 + \zeta)^2, \quad a > 0, \tag{27}$$

a cărei inversă este

$$\zeta = \sqrt{\mathfrak{z}/a} - 1. \tag{28}$$

Introducînd aci (7.9), obţinem ecuaţiile parametrice ale curbei frontieră $\mathscr{L}$:

$$x_1 = a(1 + 2\cos\theta + \cos 2\theta), \quad x_2 = a(2\sin\theta + \sin 2\theta), \tag{29}$$

de unde, întrucît avem $\mathfrak{z} = R\,\exp(i\chi)$, deducem

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 2\,a\,(1 + \cos\theta), \quad \mathrm{tg}\,\chi = x_2/x_1 = \mathrm{tg}\,\theta. \tag{30}$$

Prin urmare, avem $\chi = \theta$, și (29) este forma parametrică a ecuației unei cardioide, cu punctul de întoarcere în originea axelor. Funcția (27) reprezintă deci discul unitate pe domeniul mărginit de această cardioidă.

Întrucît funcția (27) este rațională, putem determina ușor parametrii geometrici ai domeniului.

Întrucît din (27) și (7.9) avem

$$\omega'(\sigma) = 2\,a\,(1 + \sigma), \qquad \overline{\omega'(\sigma)} = 2\,a\,(1 + \sigma^{-1}), \tag{31}$$

obținem imediat din (7.12)

$$ds\,\big|_{\mathscr{L}} = -\,2\,\mathrm{i}a\,(1 + \sigma)\,\sigma^{-3/2}\,d\sigma. \tag{32}$$

Pentru a integra această expresie, vom ține seama că

$$\int \sigma^{-3/2}\,d\sigma = -\,2\,\sigma^{-1/2}, \qquad \int \sigma^{-1/2}\,d\sigma = 2\,\sigma^{1/2},$$

astfel că (7.13) și (32) dau

$$s - s_0 = -\,4\mathrm{i}\,a\,(\sigma^{1/2} - \sigma^{-1/2})\Big|_{\sigma_0}^{\sigma}. \tag{33}$$

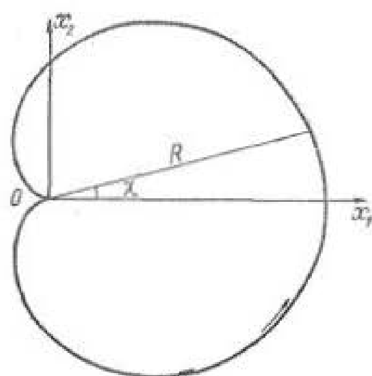


Fig. A.8.5

Funcția $\zeta^{1/2}$ este multiformă (vezi 5.44). Alegînd drept origine a abscisei curbilinii punctul $\sigma_0 = -\,1$ corespunzător unghiului $\theta = -\,\pi$ (vezi fig. A.5.2 și A.5.3) și ținînd seama de (5.45) (punctul considerat se găsește pe bordul inferior al tăieturii), avem

$$\sigma_0^{1/2} = -\,\mathrm{i}, \quad \sigma_0^{-1/2} = \mathrm{i},$$

astfel că (33) devine

$$s = -\,4\,\mathrm{i}a\,(\sigma^{1/2} - \sigma^{-1/2} + 2\,\mathrm{i}). \tag{34}$$

Întrucît $\sigma^{1/2} - \sigma^{-1/2} = 2\mathrm{i}\sin(\theta/2)$, această formulă se mai scrie

$$s(\theta) = 8\,a[1 + \sin(\theta/2)]. \tag{35}$$

În particular, pentru $\theta = \pi$ obținem perimetrul cardioidei:

$$s\,\Big|_{-\pi}^{+\pi} = 16\,a. \tag{36}$$

Introducînd (27) și (31) în (7.20) și (7.23) avem

$$\begin{aligned} D &= -\,\mathrm{i}\,a^2 \oint_\gamma (1 + \sigma)(1 + \sigma^{-1})^2\,d\sigma, \\ D_{\mathfrak{z}_0} &= -\,\mathrm{i}\,a^3 \oint_\gamma (1 + \sigma)^3 (1 + \sigma^{-1})^2\,d\sigma. \end{aligned} \tag{37}$$

Ținînd seama că originea este un pol (și singurul) de ordinul al doilea pentru ambele integrale, obținem cu ajutorul formulei (5.30)

$$D = 2\,\pi\,\mathrm{i}\,(-\,\mathrm{i}a^2)\cdot 3 = 6\,\pi\,a^2, \tag{38}$$

$$D\,\mathfrak{z}_0 = 2\,\pi\mathrm{i}(-\,\mathrm{i}a^3)\cdot 5 = 10\,\pi\,a^3, \tag{39}$$

de unde

$$\mathfrak{z}_0 = 5\,a/3\,. \tag{40}$$

Mai departe, pentru momentele centrale de inerție avem din (7.31)

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{i}a^4 \oint_\gamma \left[(1+\sigma)^2 - \frac{5}{3}\right]\left[(1+\sigma^{-1})^2 - \frac{5}{3}\right]^2 (1+\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \\ I &= -\mathrm{i}a^4 \oint_\gamma \left[(1+\sigma)^2 - \frac{5}{3}\right]^2\left[(1+\sigma^{-1})^2 - \frac{5}{3}\right](1+\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \end{aligned} \tag{41}$$

de unde, folosind teorema reziduurilor, obținem

$$I_0 = \frac{55}{3}\,\pi\,a^4,\;\; I = -\frac{8}{3}\,\pi\,a^4,\;\; I_{11} = \frac{21}{2}\,\pi\,a^4,\;\; I_{22} = \frac{47}{6}\,\pi a^4,\;\; I_{12} = 0. \tag{42}$$

Pentru momentul polar necentral de inerție obținem din (7.32):

$$J_0 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{i}a^4 \oint_\gamma (1+\sigma)^7\,\sigma^{-4}\,\mathrm{d}\sigma = 35\,\pi\,a^4. \tag{43}$$

Evident, valoarea I_0 din (42) se putea obține din (43) și (40) cu ajutorul teoremei lui Steiner (vezi (2.7)).

d) Lemniscata lui Bernoulli

Să considerăm acum cazul funcției *iraționale*

$$\mathfrak{z} = \omega\,(\zeta) = a\,(1+\zeta)^{1/2}, \qquad a > 0\,, \tag{44}$$

care are inversa

$$\zeta = (\mathfrak{z}/a)^2 - 1. \tag{45}$$

Abstracție făcînd de o translație și o omotetie, (44) este inversa funcției (27). Funcția (44) se obține din (5.44) prin aplicarea succesivă a transformărilor.

$$\mathfrak{z} = a\,Z\,, \qquad Z = W^{1/2}, \qquad W = 1 + \zeta. \tag{46}$$

Punctul $\zeta = -1$ este un punct critic algebric.

Întrucît patrulaterul $(0,\,\sigma,\,1+\sigma,\,1)$ din planul ζ este un romb, avem

$$1 + \sigma = 2\cos\,(\theta/2)\,\exp\,(\mathrm{i}\theta/2), \tag{47}$$

de unde

$$t = \mathfrak{z}\big|_{\mathscr{L}} = R\exp(i\chi)\big|_{\mathscr{L}} = a\sqrt{2\cos(\theta/2)}\exp(i\theta/4) \tag{48}$$

astfel că imaginea cercului unitate are ecuațiile $R = a\sqrt{2\cos(\theta/2)}$, $\chi = \theta/4$,

ceea ce conduce la ecuația lemniscatei lui Bernoulli :

$$R = a\sqrt{2\cos 2\chi}\,. \tag{49}$$

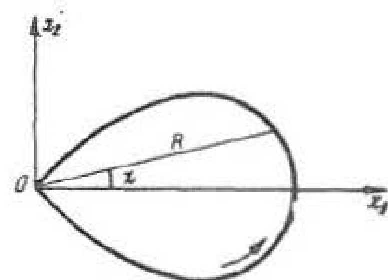


Fig. A.8.6

Privind transformarea (44) pe frontieră ca o succesiune de transformări $\sigma \Rightarrow 1 + \sigma \Rightarrow a\sqrt{1+\sigma}$, constatăm că atunci cînd $\arg\sigma = \theta$ trece prin valoarea π, $\arg(1+\sigma)$ are o discontinuitate, și trece de la valoarea $\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)$ la valoarea $-\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)$. Într-adevăr, avem $\arg(1+\sigma) = \arg\operatorname{tg}(X_2/X_1)$ (unde am notat cu X_1, X_2 coordonatele carteziene în planul variabilei $W = 1 + \zeta$), iar pentru $\theta = \pi$ avem $\operatorname{arc\,tg}(X_2/X_1) = \pi/2$, așadar un punct de discontinuitate al funcției tangentă. Pentru a păstra determinarea pozitivă a radicalului din (49) trebuie de asemenea să considerăm că $\arg\sigma$ trece de la o valoare $\pi - \varepsilon$ la valoarea $-\pi + \varepsilon$. În definitiv, aceasta va obliga să luăm ca interval de variație pentru θ nu intervalul $[0, 2\pi]$, ci intervalul $[-\pi, \pi]$. Ca imagine a cercului unitate, alegînd acea ramură a funcției de reprezentare care face ca punctului $\zeta = 1$ să-i corespundă punctul $\mathfrak{z} = a\sqrt{2}$, obținem bucla de lemniscată situată în semiplanul $x_1 > 0$, parcursă în sens direct începînd din origine. Pentru a doua ramură a funcției (44), obținem bucla simetric dispusă din semiplanul $x_1 < 0$.

Pentru determinarea cantităților D, $\mathfrak{z}_0$, I, I_0, vom face uz de formulele (7.20), (7.23) și (7.31). Întrucît din (44) urmează

$$\omega(\sigma) = a(1+\sigma)^{1/2}, \quad \overline{\omega(\sigma)} = a(1+\sigma)^{1/2}\,\sigma^{-1/2},$$
$$\omega'(\sigma) = \frac{1}{2}\,a(1+\sigma)^{-1/2}, \quad \overline{\omega'(\sigma)} = \frac{1}{2}\,a(1+\sigma)^{-1/2}\,\sigma^{1/2}, \tag{50}$$

obținem

$$D = -\frac{1}{2}\,ia^2\oint_\gamma d\sigma^{1/2} = -\frac{1}{2}\,ia^2\,\sigma^{1/2}\Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} = a^2. \tag{51}$$

Pentru a determina centrul de greutate, avem mai întîi

$$D\,\mathfrak{z}_0 = -\frac{1}{4}\,ia^3\oint_\gamma\sqrt{\frac{1+\sigma}{\sigma}}\,d\sigma,$$

unde, efectuînd substituţia $t = \sqrt{(1+\sigma)/\sigma}$, obţinem

$$\oint_\gamma \sqrt{\frac{1+\sigma}{\sigma}}\, d\sigma = \left[\sqrt{\sigma(1+\sigma)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+\sigma} - \sqrt{\sigma}}{\sqrt{1+\sigma} + \sqrt{\sigma}}\right]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = -\left[\ln\left(\sqrt{1+\sigma} - \sqrt{\sigma}\right)\right]_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi}. \tag{52}$$

Cînd punctul σ parcurge cercul unitate γ în sens direct pentru $-\pi < \theta < \pi$, punctul $(\sqrt{1+\sigma} - \sqrt{\sigma})$ parcurge o curbă simplă deschisă cu capetele în punctele i, $-$ i. Prin urmare funcţia $\ln(\sqrt{1+\sigma} - \sqrt{\sigma})$ are între aceste puncte o creştere — aceeaşi pe orice ramură a funcţiei logaritmice — care se calculează ţinînd seama că $\ln i = i\pi/2$, $\ln(-i) = -i\pi/2$, şi deci

$$\oint_\gamma \sqrt{\frac{1+\sigma}{\sigma}}\, d\sigma = i\pi. \tag{53}$$

Din (51)–(53), obţinem astfel

$$\delta_\theta = \pi a/4. \tag{54}$$

Pentru momentele centrale de inerţie avem acum din (7.31):

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4} i a^4 \oint_\gamma \left[\frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma}} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+\sigma^2}{\sigma}} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right] d\sigma, \\ I_0 &= -\frac{1}{8} i a^4 \oint_\gamma \left[\frac{1+\sigma}{\sigma} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+\sigma}{\sigma}} - \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma} + \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right] d\sigma; \end{aligned} \tag{55}$$

(ceilalţi termeni ai integranzilor sînt sau constanţi, sau de forma $(1+\sigma)^{\pm 1/2}$, astfel că integralele corespunzătoare lor sînt nule). În aceste formule intervine valoarea calculată a integralei (53), precum şi două integrale ce se calculează imediat:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \sigma^{-1/2}\, d\sigma &= 2\sigma^{1/2} \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} = 4i, \\ \oint_\gamma \sigma^{1/2}\, d\sigma &= \frac{2}{3}\sigma^{3/2} \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} = -\frac{4}{3} i. \end{aligned} \tag{56}$$

Cu ajutorul substituţiei $1 + \sigma = t^2$ obţinem şi

$$\oint_\gamma \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma}\, d\sigma = \left[2\sqrt{1+\sigma} + \ln \frac{\sqrt{1+\sigma} - 1}{\sqrt{1+\sigma} + 1}\right]_\gamma = 2\pi i \tag{57}$$

(unde am ţinut seama că pentru σ parcurgînd γ, punctele $\sqrt{1+\sigma} - 1$ şi $\sqrt{1+\sigma} + 1$ parcurg conture închise, dintre care primul conţine originea, iar al doilea, nu) [5]).

[5]) Vezi şi § 5.22, nota de la pag. 343.

Introducînd (53), (56) şi (57) în (55), obţinem

$$I = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{16}\pi^2\right)a^4, \qquad I_0 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{16}\pi^2\right)a^4,$$
$$I_{11} = \left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{3}\right)a^4, \qquad I_{22} = \left(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{16}\pi^2\right)a^4, \quad I_{12} = 0. \tag{58}$$

Pentru momentul polar necentral de inerţie, deducem din (7.32)

$$J_0 = -\frac{1}{8}\mathrm{i}a^4 \oint_\gamma \frac{1+\sigma}{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4}\pi a^4. \tag{59}$$

Funcţia (44) are o formă destul de simplă. Formula binomului dă imediat

$$a(1+\zeta)^{1/2} = a\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{2^n\, n!}\,\zeta^n\right\}, \tag{60}$$

de unde funcţiile $\omega_m(\zeta)$ din (6.12) se deduc uşor. Prezenţa punctului critic $\zeta = -1$ înrăutăţeşte sensibil convergenţa acestei serii în vecinătatea sa. Astfel, luînd $a = 1$ şi considerînd numai punctele $\sigma = -1$ şi $\sigma = 1$, obţinem

	$\omega_4(\sigma)$	$\omega_6(\sigma)$	$\omega(\sigma)$
$\sigma = -1$	0,273	0,227	0
$\sigma = 1$	1,399	1,407	1,414

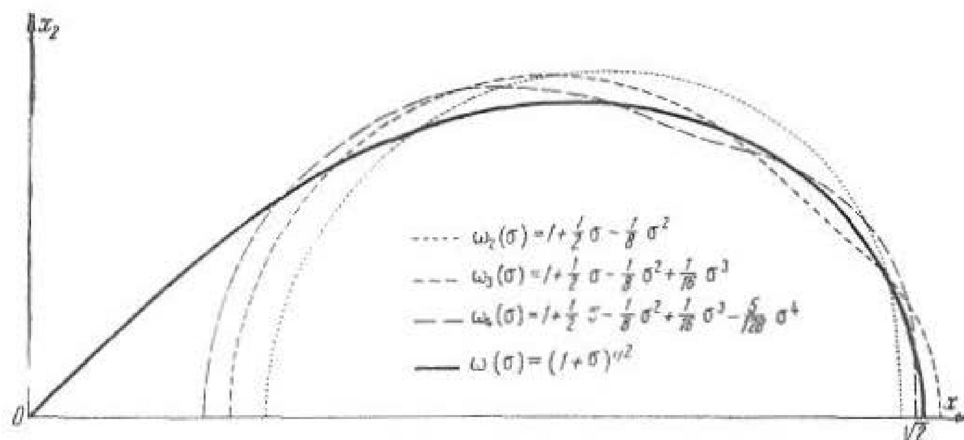


Fig. A.8.7

Ca şi în cazul elipsei, dăm aci în figura A.8.7 curbele aproximative $\omega_m(\sigma)$, pe care le comparăm cu frontiera exactă $\omega(\sigma)$ (o jumătate de buclă). Abaterea în vecinătatea valorii $\theta = \pi$ este evident mare, şi scade foarte încet odată cu creşterea lui m.

Cu titlu de exemplu, dăm în figura A.8.8 liniile de coordonate naturale corespunzătoare transformării (44). Ele pot fi trasate ţinînd seama că din (44) urmează, pentru $\zeta = \rho \exp(\mathrm{i}\theta)$:

$$x_1^2 - x_2^2 = 1 + \rho\cos\theta, \qquad 2x_1x_2 = \rho\sin\theta, \tag{61}$$

de unde

$$x_1^2 = \frac{1}{2}\,[1 + \rho\cos\theta + \sqrt{1 + 2\,\rho\cos\theta + \rho^2}],$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2}\,\rho^2\sin^2\theta : \;[1 + \rho\cos\theta + \sqrt{1 + 2\,\rho\cos\theta + \rho^2}]. \qquad (62)$$

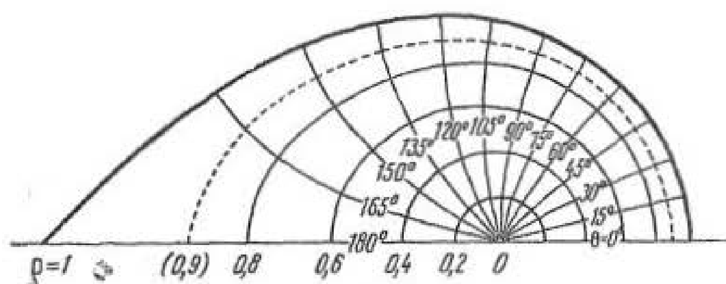


Fig. A.8.8

e) Pătratul. Planul cu un orificiu pătrat

Formula lui Schwarz-Christoffel (6.10) permite ușor determinarea funcției $\omega(\zeta)$ în cazul unui polinom regulat: punctele σ_k sînt dispuse simetric pe γ, și pot fi determinate ca soluții ale ecuației binome $\sigma^p + 1 = 0$, iar exponenții α_k sînt egali între ei.

În cazul *pătratului*, avem $\sigma_k = (\pm 1 \pm \mathrm{i})/\sqrt{2}$, $\alpha_k = 1/2$, și (6.10) devine

$$\mathfrak{z} = a' + a\int_{\zeta_0}^{\zeta} (1 + \zeta^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Alegînd $a' = 0$ și $\zeta_0 = 0$, centrul cercului γ are ca imagine centrul pătratului. Pentru pătratul de latură 2 trebuie să avem (întrucît punctele $\zeta = 1$ și $\mathfrak{z} = 1$ se corespund) $a = 1{,}080$. În definitiv, funcția

$$\mathfrak{z} = \omega_+(\zeta) = 1{,}080\int_0^{\zeta} (1 + \zeta^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}\zeta \qquad (63)$$

reprezintă conform discul unitate pe interiorul pătratului de latură 2.

Pentru *planul cu un orificiu pătrat* de latură 2, avem $\sigma_k = (\pm 1 \pm \mathrm{i})/\sqrt{2}$, $\alpha_k = 3/2$, astfel că (6.10) devine

$$\mathfrak{z} = a' + a\int_0^{\zeta} (1 + \zeta^4)^{1/2}\,\zeta^{-2}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Întrucît punctele $(1,\ -1,\ \zeta_\infty)$ și $(1,\ -1,\ \mathfrak{z}_\infty)$ se corespund, obținem de aci

$$\mathfrak{z} = \omega_-(\zeta) = 1 - 1{,}180 \int^{\zeta} (1 + \zeta^4)^{1/2}\, \zeta^{-2}\, d\zeta. \tag{64}$$

Cu titlu de exemplu, să calculăm elementul de arc, direcția tangentei, și raza de curbură a frontierei pătratului de latură 2, cu ajutorul formulelor (7.12), (7.15), (7.18), utilizînd funcția (63). Întrucît aci intervin numai valorile la limită ale *derivatei* funcției $\omega_+(\zeta)$, integrala din (63) nu ne va incomoda. Avem mai întîi

$$\omega'_+(\sigma) = a/\sqrt{1 + \sigma^4}, \qquad a = 1{,}080, \tag{65}$$

$$\overline{\omega'_+(\sigma)} = a/\sqrt{1 + \sigma^{-4}} = \pm\, a\sigma^2/\sqrt{1 + \sigma^4}, \tag{66}$$

unde semnul *nu poate fi luat arbitrar*. Într-adevăr, întrucît

$$\omega'_+(\sigma)\, \overline{\omega'_+(\sigma)} = \pm\, a^2\sigma^2/(1 + \sigma^4) > 0, \tag{67}$$

vom alege în (66) semnul plus sau minus, după cum $\sigma^2 + \sigma^{-2} = 2\cos 2\theta$ este pozitiv sau negativ. Cu aceasta, (66) devine

$$\overline{\omega'_+(\sigma)} = \begin{cases} a\sigma^2/\sqrt{1 + \sigma^4} & \text{pentru } -\dfrac{1}{4}\pi < \theta < \dfrac{1}{4}\pi \text{ sau } \dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi, \\[2ex] -\,a\sigma^2/\sqrt{1 + \sigma^4} & \text{pentru } \dfrac{1}{4}\pi < \theta < \dfrac{3}{4}\pi \text{ sau } \dfrac{5}{4}\pi < \theta < \dfrac{7}{4}\pi. \end{cases} \tag{68}$$

Pentru elementul de arc obținem acum din (7.12) și (67), (68)

$$ds = -\,\mathrm{i}a \sqrt{\pm \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^4}}\, \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{a\, d\theta}{\sqrt{2\,|\cos 2\theta|}}. \tag{69}$$

Pentru direcția tangentei la frontieră deducem din (7.15), (65) și (68) : $\boldsymbol{s} = \pm\, \mathrm{i} \sqrt{\pm 1}$, unde semenele sînt luate ca în (68) ; așadar :

$$\boldsymbol{s} = \begin{cases} \mathrm{i} & \text{pentru } -\dfrac{1}{4}\pi < \theta < \dfrac{1}{4}\pi, \\[2ex] -1 & \text{pentru } \dfrac{1}{4}\pi < \theta < \dfrac{3}{4}\pi, \\[2ex] -\mathrm{i} & \text{pentru } \dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi, \\[2ex] 1 & \text{pentru } \dfrac{5}{4}\pi < \theta < \dfrac{7}{4}\pi. \end{cases} \tag{70}$$

Pentru a calcula raza de curbură avem mai întîi

$$\omega''_{+}(\sigma) = -2a\,\sigma^3 (1+\sigma^4)^{-3/2}. \tag{71}$$

Introducînd (67), (68) şi (71) în (7.18), obţinem

$$R = \infty \quad \text{pentru } 1 + \sigma^4 \neq 0, \tag{72}$$

aşadar $R = \infty$ cu excepţia vîrfurilor pătratului. În vîrfuri, R rămîne nedeterminată.

Funcţii de forma (63) sau (64) sînt greu utilizabile. Dar întrucît ele sînt desfăşurabile în serii Taylor (inclusiv pe γ, cu excepţia punctelor σ_k) este firesc să facem uz de polinoamele $\omega_{+;m}(\zeta)$ şi $\omega_{-;m}(\zeta)$ ce se obţin din (63), (64). Cu ajutorul formulei binomului obţinem

$$\omega'_{+}(\zeta) = a(1+\zeta^4)^{-1/2} = a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n\, n!}\zeta^{4n} \tag{73}$$

(valorile coeficienţilor sînt tabulate de I. Rîjik şi I. Gradştein [1], § 8.41), respectiv

$$\omega'_{-}(\zeta) = a(1+\zeta^4)^{1/2}\zeta^{-2} = a\left[\zeta^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n\, n!}\zeta^{4n-2}\right]. \tag{74}$$

Integrînd termen cu termen, obţinem în locul funcţiilor (63), (64):

$$\omega_{+}(\zeta) = a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\, n!\,(4n+1)}\zeta^{4n+1}, \tag{75}$$

$$\omega_{-}(\zeta) = -a\left[\zeta^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{2^n\, n!\,(4n-1)}\zeta^{4n-1}\right]. \tag{76}$$

Derivînd aceleaşi serii termen cu termen şi înmulţind cu ζ, obţinem

$$\zeta\omega''_{+}(\zeta) = a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^{n-2}\,(n-1)!}\zeta^{4n}, \tag{77}$$

$$\zeta\omega''_{-}(\zeta) = a\left[-2\zeta^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}\, n!}\zeta^{4n-2}\right]. \tag{78}$$

Făcînd uz de formulele aproximative (valabile pentru valori mari ale lui n):

$$n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}\right), \quad (2n-1)!! \cong \sqrt{2}\,(2n)^n e^{-n}, \tag{79}$$

obţinem pentru coeficienţii corespunzători funcţiei $\omega_{+}(\zeta)$:

$$\frac{(2n-1)!!}{2^n\, n!\,(4n+1)} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}\,(4n+1)} \to 0, \qquad \frac{(2n-1)!!}{2^n\, n!} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \to 0,$$
$$\frac{(2n-1)!!}{2^{n-2}\,(n-1)!} \cong 4\sqrt{\frac{n}{\pi}} \to \infty, \tag{80}$$

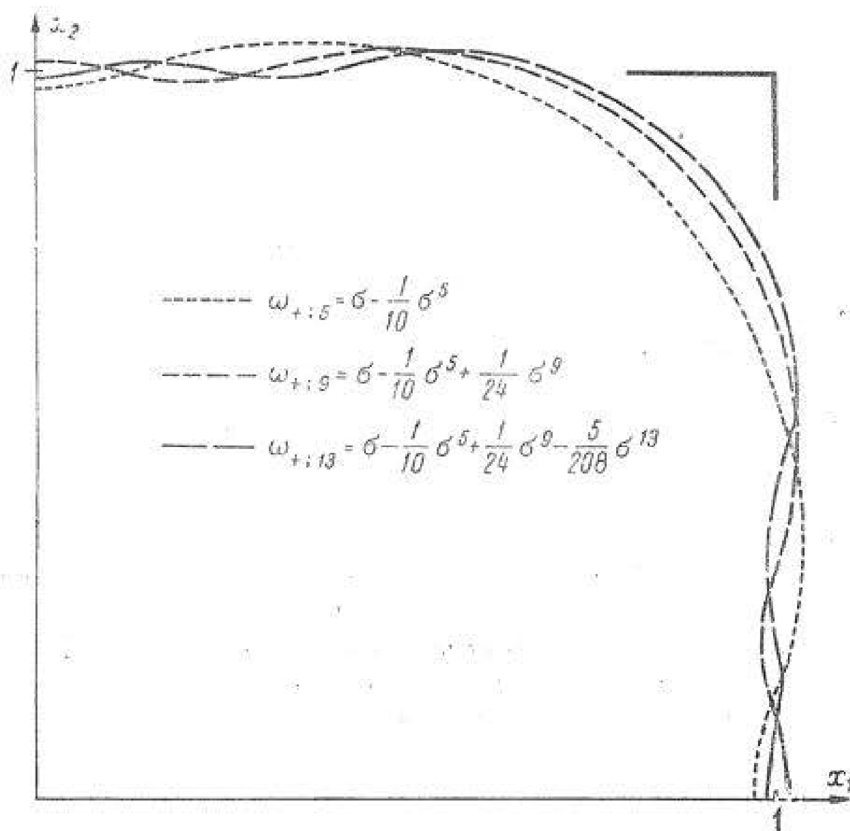


Fig. A.8.9

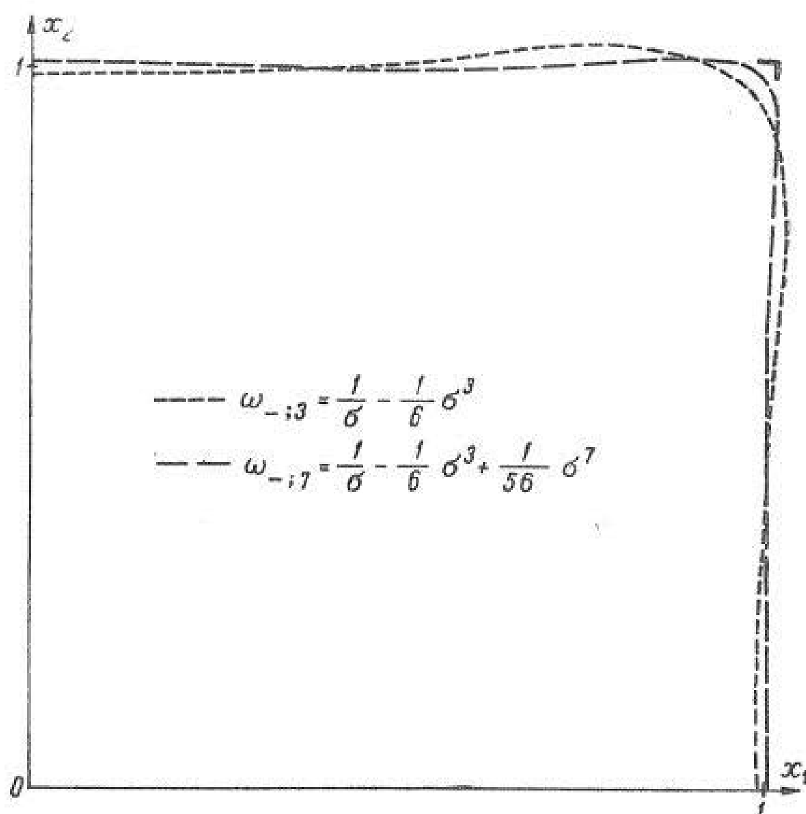


Fig. A.8.10

şi tot astfel pentru coeficienţii corespunzători funcţiei $\omega_{-}(\zeta)$:

$$\frac{(2n-3)!!}{2^n n!(4n-1)!} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}(4n-1)(2n-1)} \to 0,$$
$$\frac{(2n-3)!!}{2^n n!} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}(2n-1)} \to 0, \quad \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1} n!} \cong \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \to 0, \tag{81}$$

de unde rezultă evident că convergenţa seriei (75) este mult mai lentă decît a seriei (76). (Compară şi cu § 6, pag. 732.)

În figurile A.8.9 şi A.8.10 dăm cîte un cadran din curbele aproximative $\omega_{+;m}(\sigma)$, respectiv $\omega_{-;m}(\sigma)$. Curbele $\omega_{+;1}(\sigma)$ şi $\omega_{-;-1}(\sigma)$ sînt cercuri. Curba $\omega_{-;11}(\sigma)$ coincide practic vorbind cu frontiera exactă. Figurile evidenţiază faptul că convergenţa procedeului este puţin satisfăcătoare pentru pătrat.

Curbarea laturilor pătratelor se poate evalua cu ajutorul formulelor (7.15) şi (70). Dar încă mai importantă este determinarea razei de curbură R în punctele ce corespund vîrfurilor: cu cît ea este mai mică, cu atît aproximarea este mai bună în chiar vecinătatea punctelor singulare. Făcînd uz de (75), (76), se calculează uşor R în punctele $\sigma = \sqrt[4]{-1}$. Valorile raportului R/a sînt date în tabela de mai jos atît pentru pătrat, cît şi pentru planul de orificiu pătratic, pentru acelaşi număr de termeni în funcţia de reprezentare aproximativă:
interiorul pătratului:

grad	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37
R/a	1,000	0,643	0,511	0,437	0,388	0,353	0,326	0,304	0,285	0,271

planul cu un orificiu pătratic:

grad	−1	3	7	11	15	19	23	27	31	35
R/a	1,000	0,100	0,042	0,023	0,017	0,012	0,009	0,007	0,006	0,005

Deosebirea de comportare în cele două cazuri este evidentă.

§ 9. SERII FOURIER

a) Funcţii definite într-un disc, şi valorile lor la limită

Vom studia aci comportarea funcţiilor de punct pe cercul unitate γ, şi legătura lor cu anumite funcţii definite în discul unitate $Д^+$. (Printr-o translaţie şi o omotetie, orice disc circular poate fi înlocuit cu discul unitate.)

Pe frontiera lui $Д^+$, vom nota

$$\zeta|_\gamma = \sigma = \exp(i\theta), \quad \bar{\sigma} = \exp(-i\theta) = \sigma^{-1}, \quad s|_\gamma = \theta. \tag{1}$$

Fie dată în $Д^+$ o funcţie continuă şi uniformă, prelungibilă prin continuitate pe γ. Ţinînd seama de (1), putem scrie

$$F(\zeta, \bar{\zeta})|_\gamma = f(\sigma) = f(\theta) = f(s), \tag{2}$$

unde — *prin abuz de notaţie* — păstrăm acelaşi simbol f pentru cele trei funcţii-limită. Funcţia $f(\sigma)$ este desigur continuă.

Fie mai departe că $F(\zeta, \bar{\zeta})$ este analitică în $Д^+$, aşadar că

$$F(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{h,k=0}^{\infty} F_{hk} \zeta^h \bar{\zeta}^k. \tag{3}$$

Întrucît F este continuă în $Д^+ + \gamma$, primul termen din (2) devine

$$\sum_{h,k=0}^{\infty} F_{hk}\, \sigma^h \sigma^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \sigma^n, \tag{4}$$

unde am notat $h - k = \pm n$ după cum $h \gtrless k$, şi unde avem

$$F_0 = \sum_{h=0}^{\infty} F_{hh}, \quad F_n = \sum_{k=0}^{\infty} F_{n+k;k}, \quad F_{-n} = \sum_{h=0}^{\infty} F_{h;n+h}. \tag{5}$$

În felul acesta, fiecărei funcţii de forma (3) în $Д^+$ şi continuă în $Д^+ + \gamma$, i se asociază o dezvoltare în serie nu după puterile arcului s sau ale unghiului θ, ci după puterile *întregi* ale variabilei σ pe γ. Din relaţia lui Euler

$$\sigma^{\pm n} = \exp(\pm \mathrm{i} n\theta) = \cos n\theta \pm \mathrm{i} \sin n\theta, \tag{6}$$

rezultă că sîntem conduşi la o dezvoltare în serie Fourier după argumentul θ.

În felul acesta, oricărei funcţii (3) i se asociază o serie (4). Dacă prima din ele converge în $Д^+ + \gamma$, atunci (4) converge de asemenea. Dacă coeficienţii F_{hk} sînt cunoscuţi, coeficienţii F_n rezultă din (5).

Pentru noi prezintă însă interes problema inversă: dată fiind valoarea la limită $f(\sigma)$, să determinăm însăşi funcţia. Or, chiar *dacă* $f(\sigma)$ poate fi pusă sub forma (4); *dacă* funcţia $F(\zeta, \bar{\zeta})$ poate fi pusă sub forma (3); şi *dacă* din egalitatea a două serii (4) se poate conchide că coeficienţii corespunzători sînt egali — relaţiile (5) rămîn totuşi insuficiente pentru ca din valorile (cunoscute) ale coeficienţilor F_n, să putem determina pe F_{hk}.

Totuşi, există cazuri importante în care, funcţia $F(\zeta, \bar{\zeta})$ fiind supusă şi la alte condiţii (de ex., de a satisface o anumită ecuaţie), sîntem conduşi la noi relaţii între coeficienţii F_{hk} care, împreună cu (5), sînt îndestulătoare pentru determinarea coeficienţilor. De exemplu, acesta este cazul cînd $F(\zeta, \bar{\zeta})$ este o combinaţie liniară a două funcţii olomorfe în $Д^+$, eventual inclusiv derivatele lor şi funcţiile conjugate: pentru fiecare indice $n > 0$ dispunem de doi coeficienţi cunoscuţi F_n, F_{-n}, şi trebuie să găsim cei doi coeficienţi necunoscuţi ai termenilor în ζ^n în cele două funcţii olomorfe.

În definitiv, sîntem astfel conduşi la a considera date la limită desfăşurabile în serii Fourier pe γ, şi la a reconstitui cu ajutorul coeficienţilor corespunzători, dezvoltările în serie ale funcţiilor căutate în $Д^+$.

Tehnica rămîne valabilă şi pentru domenii simplu conexe necirculare: notînd cu $\omega(\zeta)$ funcţia ce realizează reprezentarea conformă a discului unitate pe domeniul considerat, putem scrie

$$F_{(1)}(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{h, k=0}^{\infty} F_{hk}^{(1)} [\omega(\zeta)]^h \overline{[\omega(\zeta)]}^k = \sum_{i, j=0}^{\infty} F_{ij} \zeta^i \bar{\zeta}^j. \tag{7}$$

Transcriind în acelaşi mod şi condiţia la limită, de pe frontiera domeniului — pe γ, ajungem la un sistem de ecuaţii similar cu (5).

Procedeul poate fi folosit şi în cazul coroanei circulare, şi deci şi pentru domenii reprezentabile conform pe o coroană.

b) *Serii trigonometrice şi serii Fourier*

În cele ce urmează, vom aminti unele rezultate clasice ale teoriei seriilor Fourier (în real şi în complex). Ca bibliografie, indicăm: N. Bari [1]; G. Hardy şi W. Rogosinski [1]; I. Hincin [1], capitolul 21; E. Hobson [1], capitolul 7; V. Smirnov [2], volumul 2, capitolul 6; G. Tolstov [1]; G. Valiron [1], §§ 7.85–7.89; M. Zamansky [1], capitolul 15, partea III; A. Zygmund [1].

Dată fiind o funcţie reală (şi desigur uniformă) de variabila reală $\theta \in [0, 2\pi]$, cea mai simplă reprezentare a ei prin serii de funcţii elementare ar fi cea a lui Taylor. Dar utilizarea acesteia impune datelor la limită ale problemei condiţii severe (analiticitatea), rar realizate în practică, şi — după cum vom vedea — inutile pentru scopul urmărit. În afară de aceasta, întrucît nu există corespondenţă biunivocă între funcţiile *reale* de clasă C^∞ şi mulţimea coeficienţilor dezvoltării în serie Taylor corespunzătoare (vezi şi § 5, pag. 715), operaţiile legate de studiul sistemului (5) s-ar complica considerabil.

Să începem prin a considera *seria trigonometrică*

$$s(\theta) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta), \tag{8}$$

unde c_n, d_n sînt constante reale, iar $s(\theta)$ este suma seriei, în punctele în care ea converge.

Se poate demonstra că, dacă o serie trigonometrică este convergentă în $[0, 2\pi]$, exceptînd eventual o mulţime numerabilă de puncte, atunci avem

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0. \tag{9}$$

Acestea sînt deci condiţii necesare (nu şi suficiente!) de convergenţă.

Desigur, dacă două serii trigonometrice au aceiaşi coeficienţi, ele au aceeaşi sumă în punctele de convergenţă (ele coincid). Prezintă însă interes cu deosebire reciproca acestei proprietăţi, care rezultă din *teorema lui Cantor*: o serie trigonometrică care converge către zero în $[0, 2\pi]$, (exceptînd eventual o mulţime numerabilă de puncte) are toţi coeficienţii nuli.

Pentru a studia cu ajutorul seriilor trigonometrice o funcție *oarecare* $f(\theta)$, definită în $[0, 2\pi]$, să presupunem că ea poate fi pusă sub forma (8), așadar că

$$f(\theta) \cong s(\theta) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \tag{10}$$

(unde semnul $\cong$ arată că egalitatea este numai prezumată).

Dacă funcția $f(\theta)$ este integrabilă; *dacă* seria din (10) este uniform convergentă; și *dacă* suma ei este chiar $f(\theta)$ — abstracție făcînd eventual de o mulțime numerabilă de puncte — atunci coeficienții c_n, d_n se determină ușor. Pentru aceasta, trebuie să ținem seama de proprietatea de *ortogonalitate* a sistemului trigonometric în $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = \pi\delta_{nm}, \\ &\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin m\theta \, d\theta = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Înmulțind relația (10) cu $\cos n\theta$, respectiv $\sin n\theta$, integrînd termen cu termen în $[0, 2\pi]$, și făcînd uz de (11), obținem

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad d_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta. \tag{12}$$

O serie trigonometrică ai cărei coeficienți sînt generați cu ajutorul relațiilor (12) se numește *serie Fourier*; c_n, d_n se numesc *coeficienții Fourier* ai lui $f(\theta)$.

Desigur, *oricărei* funcții integrabile i se poate pune în acest fel în corespondență un sistem de constante c_n, d_n, deci o serie trigonometrică; *dar nu se poate afirma nimic nici despre convergența acestei serii, și nici despre faptul dacă suma ei este egală cu funcția dată.* Se poate totuși demonstra că pentru orice funcție integrabilă $f(\theta)$, relațiile *necesare* de convergență (9) sînt satisfăcute de coeficienții (12), independent de faptul dacă seria converge sau nu.

Noțiunea de serie Fourier este *veritabil* mai restrictivă decît cea de serie trigonometrică; există chiar serii trigonometrice convergente care *nu sînt* serii Fourier ale sumei lor. (Compară cu § 5, pag. 715).

Evident, oricărei funcții integrabile îi corespunde un șir de coeficienți Fourier. Se pune întrebarea dacă, reciproc, unui șir de coeficienți Fourier îi corespunde *o singură* funcție $f(\theta)$. În acest sens, se poate demonstra proprietatea de *completitudine* a sistemului trigonometric: dacă o funcție integrabilă are toți coeficienții Fourier nuli, atunci ea însăși este nulă, eventual cu excepția unei mulțimi numărabile de puncte. (Sistemul trigonometric din care am eliminat fie măcar și o singură funcție, nu mai are această proprietate.)

Din teorema lui Cantor, din relațiile (12), și din proprietatea de completitudine, rezultă deci că:

dacă două serii trigonometrice convergente în $[0,2\pi]$ au aceeași sumă (abstracție făcînd eventual de o mulțime numărabilă de puncte), ele au aceiași coeficienți;

dacă două funcții integrabile sînt egale (abstracție făcînd eventual de o mulțime numărabilă de puncte), ele au aceiași coeficienți Fourier;

dacă două funcții integrabile au aceiași coeficienți Fourier, ele coincid (abstracție făcînd eventual de o mulțime numărabilă de puncte).

Prima din aceste proprietăți stă la baza ,,metodei seriilor'', sistematic folosită în capitolele 5 și 6 : ea conduce de la egalitatea a două dezvoltări în serie, la egalitatea coeficienților corespunzători, și de aci la construirea de sisteme infinite de ecuații algebrice, care permit determinarea mărimilor necunoscute.

Toate cele de mai sus sînt în fond proprietăți ale funcțiilor sistemului trigonometric în raport cu mulțimea funcțiilor integrabile (prima din ele este chiar mai generală), mulțime în care două funcții sînt privite ca egale dacă diferă numai pe o mulțime numărabilă de puncte [6]). Ele stabilesc într-un anumit sens *echivalența* dintre aceste funcții, destul de generale — și reprezentările lor prin intermediul unor serii trigonometrice.

Prin urmare, orice funcție integrabilă este complet ,,caracterizată'' de seria sa Fourier, care poate fi privită ca o formă-standard a funcției. Prin aceasta, seriile Fourier se deosebesc în mod avantajos de seriile Taylor (reale).

Cele de mai sus rămîn valabile pentru clasa V și subclasele sale (vezi § 1, pag. 687).

Aceste proprietăți nu depind de faptul dacă seria converge sau nu, nici dacă suma ei este sau nu egală cu funcția dată.

c) *Convergență; proprietăți ale coeficienților*

Un răspuns destul de general la chestiunea convergenței este dat de *teorema lui Jordan* : dacă $f(\theta) \in V\ [0,2\pi]$, atunci seria sa Fourier este convergentă, și suma ei este egală cu $\frac{1}{2}\ [f(\theta+0)+f(\theta-0)]$ pentru orice $\theta \in\ ]0,2\pi[$. În punctele în care $f(\theta)$ este continuă, seria sa Fourier este uniform convergentă. Dacă avem și $f(\theta) \in C^0\ [a\ b]$, cu $[a, b] \subset [0,2\pi]$, atunci seria Fourier converge uniform spre $f(\theta)$ pe $[a, b]$.

Subliniem că condițiile $f(\theta) \in C^0$, și chiar $f(\theta) \in C^0_\mu$, $\mu \leqslant 1/2$, *nu sînt* suficiente pentru a asigura convergența seriei Fourier.

Întrucît integrala definită este o funcție continuă și cu variație mărginită ca funcție de limita superioară de integrare, integrala *oricărei* funcții integrabile este desfășurabilă în serie Fourier *convergentă*.

Integrînd deci termen cu termen seria Fourier a unei funcții integrabile (chiar dacă această serie nu este convergentă!) și pentru care $c_0 = 0$, obținem o serie trigonometrică ce

[6]) Cititorul va observa că folosim în mod intenționat această formulare destul de greoaie, în locul noțiunii mai compacte — dar mai puțin elementare — de ,,funcții care coincid aproape peste tot'', adică cel mult cu excepția unei mulțimi de măsură nulă.

converge (uniform în raport cu limita superioară de integrare) către integrala funcției considerate. Pe de altă parte, dacă $f'(\theta)$ este desfășurabilă în serie Fourier, atunci această serie se obține prin derivare termen cu termen a seriei Fourier a funcției $f(\theta)$.

Să considerăm acum funcția $f(\theta)$ extinsă periodic înafara intervalului $[0, 2\pi]$. Dacă $f(2\pi) \neq f(0)$, aceasta înseamnă că punctele $\theta = 2h\pi$ sînt puncte de discontinuitate, de care va trebui să ținem seama.

Pentru coeficienții c_n, d_n, sînt valabile următoarele relații de mărginire :

a. Dacă $f(\theta)$ este integrabilă (în particular : dacă $f(\theta)$ verifică condițiile lui Dirichlet, ținînd seama și de eventuale discontinuități în punctele $2h\pi$), atunci (independent de faptul dacă seria Fourier converge sau nu) sînt valabile relațiile (9) :

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0. \tag{13}$$

b. Dacă $f(\theta) \in C^0_\mu$ (ceea ce presupune $f(2\pi) = f(0)$), atunci

$$|c_n|, |d_n| \leqslant C|n|^{-\mu}, \quad 0 < \mu \leqslant 1. \tag{14}$$

c. Dacă $f(\theta) \in V$ (eventual $f(2\pi) \neq f(0)$), atunci

$$|c_n|, |d_n| \leqslant C|n|^{-1}. \tag{15}$$

(Vezi și § 1, pag. 687 ; compară cu (14) pentru $\mu = 1$).

d. Dacă $f(\theta)$ este absolut continuă (deci și $f(2\pi) = f(0)$), atunci

$$\lim_{n\to\infty} |n c_n| = \lim_{n\to\infty} |n d_n| = 0. \tag{16}$$

Relația este satisfăcută în particular dacă $f(\theta) \in C^0_1$; mai particular, dacă $f(\theta)$ este derivabilă și cu derivata mărginită ; mai particular, dacă $f(\theta) \in C^1$.

Desigur, putem face uz de aceste formule și relativ la funcția $f'(\theta)$, dacă ea posedă proprietățile menționate. Dacă $f(2\pi) = f(0)$, atunci notînd coeficienții Fourier ai funcției $F(\theta) = f'(\theta)$ cu C_n, D_n (vezi și (7.5)), după integrare prin părți obținem

$$c_n = -n^{-1} D_n, \quad d_n = n^{-1} C_n ; \tag{17}$$

prima din aceste relații este valabilă chiar dacă $f(2\pi) \neq f(0)$).

Ținînd seama de (17) în (13)—(16), obținem evaluările corespunzătoare. Prezența unei discontinuități a funcției $f(\theta)$ are același efect ca și inegalitatea $f(2\pi) \neq f(\theta)$: ea face să apară termeni de ordin $1/n$ în evaluarea coeficienților c_n, d_n.

Condiția $f(2\pi) = f(0)$ fiind respectată, obținem deci rezultatele următoare :

e. Dacă $f'(\theta) \in C^0_\mu$ și $f'(2\pi) = f'(0)$, atunci

$$|c_n|, |d_n| \leqslant C|n|^{-1-\mu}, \quad 0 < \mu \leqslant 1. \tag{18}$$

Seria Fourier a unei funcții cu derivată periodică și hölderiană, este deci vizibil absolut convergentă.

f. Dacă $f'(\theta) \in V$ (cazuri particulare — vezi § 1, pag. 687), atunci chiar dacă $f'(2\pi) \neq f'(0)$, avem

$$|c_n|, |d_n| \leqslant C|n|^{-2}. \tag{19}$$

g. Dacă $f(\theta) \in C_{\mu}^{p}$ şi are toate derivatele periodice, atunci

$$|c_n|,\ |d_n| \leqslant C|n|^{-p-\mu}, \quad 0 < \mu \leqslant 1. \tag{20}$$

h. Dacă $f^{(p)}(\theta) \in V$, atunci chiar şi pentru $f^{(p)}(2\pi) \neq f^{(p)}(0)$, avem

$$|c_n|,\ |d_n| \leqslant C|n|^{-p-1}. \tag{21}$$

Desigur, formulele (20), (21) işi pierd sensul pentru $f(\theta) \in C^{\infty}$ cu derivate periodice. În acest caz se demonstrează:

i. Dacă $f(\theta) \in C^{\infty}$ este periodică împreună cu toate derivatele sale, atunci există un $\varepsilon \in]0,1[$ astfel ca

$$|c_n|,\ |d_n| \leqslant C|\varepsilon|^{n}. \tag{22}$$

Toate aceste rezultate au mare însemnătate practică: cu cît $f(\theta)$ are derivate periodice şi continue (nu numai pe porţiuni!) de un ordin mai înalt, cu atît convergenţa seriei sale Fourier este mai rapidă. Dacă condiţia de periodicitate este satisfăcută numai pînă la un anumit ordin de derivare, existenţa derivatelor de ordin mai înalt nu mai are nici un efect.

Să remarcăm că o funcţie polinomială în θ, prelungită înafara intervalului $[0, 2\pi]$, duce inevitabil la apariţia de discontinuităţi ale derivatelor. (Nu se pot alege coeficienţii polinomului în aşa fel încît să fie asigurată periodicitatea funcţiei şi a tuturor derivatelor sale.) Folosind acest fapt, este posibil să se adauge oricărei funcţii un termen polinomial convenabil ales, astfel încît să *mărim* ordinul de derivare pînă la care condiţia de periodicitate este satisfăcută. Această operaţie se numeşte *ameliorarea convergenţei seriilor Fourier*.

Pentru relaţiile (13)—(22) şi pentru chestiunea ameliorării convergenţei, vezi de pildă N. Bari [1], §§ 1.22—1.25; V. Smirnov [2], volumul 2, pct. 151 şi 157—159; G. Tolstov [1], §§ 5.8 şi 5.11.

d) Serii Fourier complexe

Toate aceste rezultate pot fi uşor extinse la cazul unei funcţii *complexe* de parametrul *real* θ sau, ceea ce este acelaşi lucru, de punctul $\sigma = \exp(i\theta)$ de pe γ. Înlocuind sistemul trigonometric prin sistemul funcţiilor $\sigma^n = \exp(in\theta)$, va trebui să înlocuim (11) prin relaţiile

$$\oint_{\gamma} \sigma^{n+m}\,d\sigma = \begin{cases} 2\pi i & \text{pentru } n+m=-1, \\ 0 & \text{pentru } n+m \neq -1, \end{cases} \tag{23}$$

(vezi şi (5.49)). Punînd funcţia complexă $f(\sigma)$ sub forma

$$f(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \sigma^n, \tag{24}$$

prin înmulţire cu σ^m şi integrare pe γ se obţine, în loc de (12),

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(\sigma)\,\sigma^{-n-1}\,d\sigma, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{25}$$

(compară cu (5.27)!).

Formulele (12)—(16) şi (18)—(22) rămîn evident valabile pentru modulul $|f_n|$. Să mai remarcăm că avem

$$\overline{f_n} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{f(\sigma)}\,\sigma^{n+1}(-\sigma^{-2}d\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \overline{f(\sigma)}\,\sigma^{n-1}\,d\sigma,$$

de unde urmează

$$\overline{f_n} = (\bar f)_{-n} \quad \text{sau} \quad f_{-n} = \overline{(\bar f)_n}. \tag{26}$$

(Notaţiile trebuie înţelese precum urmează : f_n e dat de (25) ; $\overline{f_n}$ are sensul lui $\overline{(f_n)}$; în fine, coeficientul Fourier de ordin n al funcţiei $\bar f$ se scrie $(\bar f)_n$.)

În particular, dacă funcţia $f(\theta)$ este reală, de aci deducem

$$f_{-n} = \overline{f_n}. \tag{27}$$

Legătura între seriile (10) şi (24) este uşor de stabilit cu ajutorul relaţiei (6). Anume, notînd

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= f_1(\theta) + if_2(\theta), & f_n &= f_n' + if_n'', \\ c_n &= c_n' + ic_n'', & d_n &= d_n' + id_n'', \end{aligned} \tag{28}$$

(unde c_n', d_n' şi c_n'', d_n'' sînt coeficienţii Fourier ai funcţiilor reale $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$), obţinem din (25) pentru $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} f_n = f_n' + if_n'' &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f_1(\theta) + if_2(\theta)]\,[\cos n\theta - i\sin n\theta]\,d\theta = \\ &= \frac{1}{2}[(c_n' + d_n'') + i(c_n'' - d_n')]. \end{aligned} \tag{29}$$

Din (26) şi (29) obţinem încă pentru $n > 0$

$$f_{-n} = f_{-n}' + if_{-n}'' = \frac{1}{2}[(c_n' - d_n'') + i(c_n'' + d_n')]. \tag{30}$$

Cu aceasta, formula (24) devine

$$\begin{aligned} f_1(\theta) + if_2(\theta) &= \frac{1}{2}(c_0' + ic_0'') + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n'\cos n\theta + d_n'\sin n\theta) + \\ &+ i\sum_{n=1}^{\infty}(c_n''\cos n\theta + d_n''\sin n\theta), \end{aligned} \tag{31}$$

ceea ce reprezintă suma dezvoltărilor în serii Fourier a funcţiilor $f_1(\theta)$ şi $if_2(\theta)$. Dacă $f_2(\theta) = 0$, termenii pur imaginari din (31) — şi deci şi din (24) — dispar.

e) Serii Fourier şi serii Laurent

Expresia (24) permite stabilirea unei legături strînse între seriile Fourier şi seriile Laurent. Aceasta prezintă deosebit interes cînd se cere determinarea sub forma (3) a unei funcţii de *o singură* variabilă complexă.

Din punct de vedere formal, există corespondență evidentă între dezvoltările în serie Laurent (5.26):

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \zeta^n, \tag{32}$$

și cele în serie Fourier

$$f(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \sigma^n, \tag{33}$$

unde coincidența coeficienților rezultă din (5.27) și (25).

(O serie Laurent convergentă într-o coroană circulară de raze R^1, R^0 poate fi ușor transformată într-o serie analogă într-o coroană de raze $\rho_1 \leqslant 1 \leqslant \rho_0$; în particular, putem face ca cercul exterior sau cel interior să coincidă cu γ.)

Se pune însă problema de a găsi în ce condiții (33) este *valoarea la limită* a seriei (32); așadar — presupunînd că am ales $\rho_0 = 1$ — în ce condiții o dezvoltare în serie Laurent poate fi prelungită *prin continuitate* pe cercul unitate $\gamma = \mathcal{J}_0$ și pe cercul interior $\mathcal{J}_1$ de rază ρ_1, ce definesc coroana sa de convergență.

Evident, este suficient să cercetăm chestiunea pentru dezvoltările tayloriene

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \zeta^n \tag{34}$$

și dezvoltarea Fourier de formă specială

$$f(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sigma^n. \tag{35}$$

Seria (34) converge uniform pe orice compact conținut în $\mathcal{J}^+$; dar pe γ pot exista puncte în care seria-limită (35) converge, și altele în care ea diverge. *Aceste puncte nu trebuie confundate cu punctele regulate și punctele singulare ale elementului taylorian* (34); totodată, nu trebuie confundată posibilitatea de *prelungire analitică* a funcției (34) printr-un punct regulat al frontierei, cu posibilitatea de a *prelungi prin continuitate* funcția $f(\zeta)$ într-un anumit punct al frontierei (sau chiar pe toată frontiera), și mai departe cu proprietatea de *convergență* a seriei (35) pe frontieră.

Astfel de exemplu, pentru funcția

$$f(\zeta) = (1-\zeta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n, \tag{36}$$

toate punctele de pe γ (cu excepția lui $\zeta = 1$) sînt puncte regulate; totuși, seria (36) diverge peste tot pe γ (ceea ce rezultă din faptul că coeficienții ei nu satisfac condiția necesară (9)); totuși, funcția poate fi prelungită prin continuitate în orice punct de pe γ (exceptînd $\zeta = 1$).

Relativ la acest cerc de idei, menționăm aci *teorema a doua a lui N. Abel*: dacă seria (35) converge într-un punct $\sigma_0 \in \gamma$, atunci suma seriei

(34) poate fi prelungită prin continuitate în acest punct pe orice drum ne-tangent la γ, şi avem

$$f^+(\sigma_0) = \lim_{\zeta \to \sigma_0} f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sigma_0^n. \tag{37}$$

Reciproca acestei teoreme este în general falsă, după cum o arată exemplul seriei (36): $\lim f(\zeta)$ există pentru orice $\zeta \neq 1$, $|\zeta| \to 1$ şi totuşi seria-limită pe γ diverge peste tot.

Într-un cadru mai restrictiv însă, se poate demonstra *teorema lui G. Hardy şi J. Littlewood* [1]: dacă $f^+(\sigma_0) = \lim f(\zeta)$ există pentru $\zeta \to \sigma_0$, şi dacă

$$|f_n| \leqslant Cn^{-1}, \tag{38}$$

atunci seria-limită (35) converge în σ_0, şi egalitatea (37) este verificată. (Cu privire la seria (36), este limpede că coeficienţii acesteia nu verifică (38).)

Un rezultat anterior al lui A. Tauber făcea uz de condiţia mai severă

$$\lim_{n \to \infty} n f_n = 0. \tag{39}$$

Aceste teoreme stabilesc legături cu caracter *punctual* între punctele de convergenţă ale seriei Fourier, şi posibilitatea de prelungire *prin continuitate* a funcţiei $f(\zeta)$ pe γ. Ele nu fac să intervină noţiunea de punct regulat. Astfel, punctul $\zeta = -1$ este un punct singular al funcţiei $(1+\zeta)^{1/2}$; totuşi dezvoltarea ei în serie este convergentă peste tot pe γ, iar funcţia poate fi prelungită prin continuitate pe γ, *inclusiv* în punctul singular (ceea ce este vizibil din dezvoltarea în serie (8.60), din teorema lui Tauber, şi din a doua formulă (8.81)).

O anumită precizare asupra rolului punctelor regulate în convergenţa seriei (35) este dată de *teorema lui P. Fatou* [1]: dacă

$$\lim_{n \to \infty} f_n = 0, \tag{40}$$

atunci seria (35) este uniform convergentă pe orice arc *închis* de pe γ, format numai din puncte regulate.

Toate cele de mai sus nu sînt chestiuni de fineţe teoretică, ci probleme de cea mai mare însemnătate practică: de ele depinde posibilitatea de a formula şi rezolva corect problemele la limită ale teoriei funcţiilor de o variabilă complexă.

Mărginindu-ne în continuare la cazul dezvoltării (34), rezultă că *dacă* funcţia $f(\zeta)$ poate fi prelungită peste tot pe γ, atunci, în cadrul de valabilitate al teoremei Hardy-Littlewood sau Tauber, valoarea ei la limită este dată de (35) — aşadar de o serie Fourier în care coeficienţii de indici negativi sînt nuli:

$$f_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma)\, \sigma^{n-1}\, d\sigma = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{41}$$

Convergența seriei (34) nu garantează convergența uniformă sau absolută a seriei (35), astfel că din faptul că $f(\zeta) \in C^{\infty}(Д^{+})$ nu rezultă nici un fel de concluzie relativ la posibilitatea de a deriva (35) termen cu termen.

Reciproc, fie acum dată o funcție $f(\sigma)$ integrabilă pe γ, și să presupunem condițiile (41) satisfăcute. Construind *formal* dezvoltările (34), (35), știm că o condiție *suficientă* de convergență a dezvoltării (35) este $f(\sigma) \in V$. Din prima teoremă a lui Abel rezultă în acest caz că seria (34) este absolut convergentă în orice compact interior lui $Д^{+}$. Din a doua teoremă a lui Abel urmează că funcția (34) tinde la limită spre suma seriei (35), așadar că funcția olomorfă $f(\zeta)$ construită în (34) tinde către $f(\sigma)$ în toate punctele de continuitate ale acesteia pe γ; în punctele ei de discontinuitate, avem $f^{+}(\sigma_0) = (1/2)\,[f(\theta_0 + 0) + f(\theta_0 - 0)]$. Aceste puncte formează o mulțime cel mult numărabilă.

Prin urmare, relațiile (41) sînt condiții *necesare* pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în $Д^{+}$. O condiție *suficientă* este ca, pe lîngă (41), seria Fourier a funcției $f(\sigma)$ să fie convergentă cel puțin într-un punct; aceasta este evident asigurat pentru $f(\sigma) \in V(\gamma)$.

Dacă $f'(\sigma) \in C^{0}_{\mu}$ și $f'(\theta)$ este periodică, sau dacă $f'(\sigma) \in V$, din (18), (19) rezultă că seria (34) este absolut și uniform convergentă în orice compact interior lui $Д^{+}$, iar valoarea ei la limită este $f(\sigma)$. Aceste condiții sînt însă mai severe decît cere natura problemei. Pentru condiții mai slabe, vezi § 11.

Desigur, derivatele funcției $f(\zeta)$ se pot obține prin derivare termen cu termen a seriei (34) — dar nici o concluzie nu poate fi trasă cu referire la derivatele funcției $f(\sigma)$.

Cele de mai sus pot fi transpuse pentru funcții olomorfe în planul cu un orificiu circular unitar (domeniul $Д^{-}$). Pentru aceasta, este suficient să înlocuim (41) prin condiția

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma)\, \sigma^{-n-1}\, d\sigma = 0, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{42}$$

Să presupunem acum că funcția $f(\sigma)$ este integrabilă, dar condițiile (41) *nu sînt* satisfăcute. Dacă numai un număr *finit* de coeficienți de indici negativi sînt diferiți de zero, seria (34) se înlocuiește printr-o serie Laurent, a cărei parte principală are numai un număr finit de termeni. Prin urmare, $f(\sigma)$ este valoarea la limită a unei funcții *meromorfe* în $Д^{+}$, unde ea posedă un pol de ordin p în origine (p fiind cel mai mare număr natural pentru care $f_{-p} \neq 0$). Probleme de convergență pentru partea principală nu se pun.

Să admitem în fine că există o *infinitate* de coeficienți de indici negativi, diferiți de zero. În acest caz, se poate construi seria

$$f(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, \sigma^n \tag{43}$$

și dezvoltările (formale):

$$f_{+}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, \zeta^n, \qquad f_{-}(\zeta) = -\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}\, \zeta^{-n}. \tag{44}$$

Seria (43) este convergentă dacă $f(\sigma) \in V(\gamma)$.

În ce privește seriile (44), prima din ele converge (în virtutea primei teoreme a lui Abel) în interiorul unui cerc de rază cel puțin 1, iar cea de a doua, în exteriorul unui cerc

de rază cel mult 1. Din (5.19) și (5.24) rezultă că, notînd

$$\rho_0 = 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n|}, \quad \rho_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_{-n}|}, \quad n > 0, \tag{45}$$

seria $f_+(\zeta)$ converge pentru $|\zeta| < \rho_0$, iar seria $f_-(\zeta)$ converge pentru $|\zeta| > \rho_1$. Seria Laurent

$$f(\zeta) = f_+(\zeta) - f_-(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \zeta^n \tag{46}$$

converge deci absolut și uniform în interiorul coroanei circulare $\rho_1 < |\zeta| < \rho_0$. Evident, *rezultatul are sens numai dacă* $\rho_1 < \rho_0$, ceea ce depinde de coeficienții f_n, așadar de însăși funcția $f(\sigma)$. După cum am văzut, avem cu necesitate $\rho_0 \geqslant 1$ și $\rho_1 \leqslant 1$.

Pentru o funcție $f(\sigma)$ dată pe γ, se poate să avem $\rho_0 > 1$ și $\rho_1 < 1$. În acest caz, faptul că $f(\sigma)$ este valoarea „la limită" a funcției (46) rezultă banal.

Dacă pentru o funcție $f(\sigma)$ dată avem $\rho_0 = 1$, $\rho_1 < 1$, rezultatul este evident pentru acea parte din dezvoltarea în serie (43) ce corespunde indicilor negativi, și urmează din prima și a doua teoremă a lui Abel pentru partea corespunzătoare indicilor pozitivi (ca și pentru funcțiile (34), (35)). Tot astfel putem conchide și în cazul complementar $\rho_1 = 1$, $\rho_0 > 1$.

Singurul caz în care convergența seriei (46) este lipsită de sens, este cazul $\rho_0 = \rho_1 = 1$: *acesta e cel mai frecvent în practică.* El apare cu certitudine dacă $f(\sigma)$ sau una din derivatele sale au puncte de discontinuitate pe γ, căci în acest caz sînt satisfăcute *cel mult* relațiile de tipul (21) : pentru p fix, rezultă $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n^p} = 1$, și deci coroana de convergență degenerează în chiar cercul γ. Prin urmare, o condiție *necesară* pentru ca o serie de forma (43) să definească o funcție (46) convergentă într-o coroană circulară nedegenerată, este ca $f(\sigma) \in C^\infty(\gamma)$.

În § 5, pag. 726, am văzut că valorile unei funcții pe o mulțime de puncte ce posedă un punct de acumulare definesc *cel mult* o funcție olomorfă. La prima vedere, s-ar părea că se pot da contra-exemple : ar fi suficient să dăm pe o parte din γ o funcție $f(\sigma)$ ca valoare la limită a unei funcții olomorfe în $Д^+$, și pe rest, valoarea la limită a unei *alte* funcții olomorfe în $Д^+$. În fapt, din cele de mai sus rezultă că coroana circulară de convergență a funcției ce se obține în acest mod, degenerează.

Mai mult : nu ne putem da dinainte *pe ambele cercuri-frontieră* valorile la limită ale unei funcții olomorfe într-o coroană : datele de pe *unul* din aceste cercuri definesc pe deplin valorile funcției în coroană, inclusiv și pe celălalt cerc (*dacă* o astfel de funcție există !).

Orice funcție cu variație mărginită $f(\sigma)$ permite deci construirea *formală* a unei dezvoltări în serie Laurent, convergentă într-o coroană $\rho_1 \leqslant 1 \leqslant \rho_0$. Dacă $\rho_1 = \rho_0 = 1$, această serie nu are sens, și $f(\sigma)$ este *diferența* valorilor la limită a *două* funcții, dintre care una este olomorfă în $Д^+$, iar cealaltă, în $Д^-$:

$$f(\sigma_0) = f_+(\sigma_0) - f_-(\sigma_0). \tag{47}$$

Pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a *unei* funcții olomorfe în $Д^+$, este necesar și suficient ca $f_-(\zeta) \equiv 0$; pentru ca ea să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în $Д^-$, este necesar și suficient ca $f_+(\zeta) \equiv \equiv f_0 = \text{const}$. Acestea sînt echivalente cu condițiile (41), (42).

Dacă $f(\sigma)$ e dată sub forma unei serii de sinuşi şi cosinuşi pentru părţile sale reală şi imaginară, atunci, făcînd uz de (29) şi (30), se obţin de pildă din (41) condiţiile

$$d_n' = -c_n'', \quad d_n'' = c_n', \tag{48}$$

de unde

$$f_n = c_n' + \mathrm{i}\, c_n'', \quad f_{-n} = 0, \qquad (n > 0). \tag{49}$$

Din (31) rezultă acum că condiţia necesară şi suficientă pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în $Д^+$, este ca ea să fie de forma

$$f(\sigma) = \frac{1}{2}(c_0' + \mathrm{i}\, c_0'') + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n' + \mathrm{i}\, c_n'') \exp(\mathrm{i}n\theta). \tag{50}$$

Pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în $Д^-$, şi nulă la infinit trebuie să avem

$$d_n' = c_n'', \quad d_n'' = -c_n', \tag{51}$$

de unde urmează

$$f(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n' + \mathrm{i}\, c_n'') \exp(-\mathrm{i}n\theta). \tag{52}$$

După cum se vede, dezvoltările în serie Fourier permit să considerăm date la limită foarte generale. Cunoaşterea acestor date la limită *echivalează* cu cunoaşterea coeficienţilor Fourier corespunzători, şi toate calculele bazate pe determinarea coeficienţilor din condiţii de tip (5) sînt justificate. Orice astfel de funcţie poate fi prelungită în interior şi în exterior, în aşa fel încît ea să rezulte ca diferenţă a unor funcţii olomorfe în $Д^+$ şi $Д^-$. Prin urmare, probleme în care soluţia este **analitică** în domeniul considerat, pot fi rezolvate chiar pentru date la limită considerabil mai generale: hölderiene, sau cu variaţie mărginită.

Desigur, o metodă bazată pe identificarea coeficienţilor nu străluceşte prin eleganţă. În fapt însă, ea este foarte eficace; şi adesea, chiar metode teoretice mai rafinate conduc la formule care, pentru a fi utilizate în calcule, necesită operaţii echivalente în fond cu cea de dezvoltare în serie, cu identificare ulterioară a coeficienţilor.

Asupra condiţiilor pentru ca o funcţie să fie valoarea la limită a unei funcţii olomorfe, vom reveni într-un cadru mai general în § 11. Cele spuse aci au ca scop să dea o pregătire euristică, fără de care rezultatele din § 11 ar apare formale şi cu o semnificaţie greu de sesizat.

f) Generalizări diferite

Teoria din punctele ***b* – *d*** poate fi generalizată la cazul funcţiilor definite pe intervalul $[0, 2l]$, cu $l \neq \pi$. Pentru aceasta, este suficient să înlocuim funcţiile $\sigma^n = \exp(\mathrm{i}n\theta)$ prin sistemul funcţiilor $\exp(\mathrm{i}n\pi x/l)$, ortogonal pe intervalul $[0, 2l]$. Se obţin astfel dezvoltări în

serie de forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(\mathrm{i}\, n\pi x/l), \quad \text{unde } f_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(\xi)\exp(-\mathrm{i}\, n\pi\xi/l)\,\mathrm{d}\xi, \tag{53}$$

sau încă

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \cos\frac{n\pi x}{l} + d_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right], \tag{54}$$

unde

$$c_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi, \qquad d_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi. \tag{55}$$

Cazul-limită al funcţiilor ne-periodice, aşadar pentru care $l \to \infty$, necesită considerarea *integralei Fourier* (vezi de pildă V. Smirnov [2], volumul 2, pct. 160; I. Sneddon [1], capitolul 1). Anume, punînd (53) sub forma

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{\mathrm{i}\, n\pi(x-\xi)}{l}\right]\mathrm{d}\xi \tag{56}$$

(fără a ne ocupa aci de justificarea operaţiei de permutare a sumei cu integrala), se înlocuieşte raportul $n\pi/l$, pentru $l \to \infty$, printr-o variabilă α, şi suma pentru n de la $-\infty$ la $+\infty$, printr-o integrare în raport cu α de la $-\infty$ la $+\infty$ (unde, evident, $\Delta\alpha = \pi/l$). În felul acesta se obţine *formula integrală a lui Fourier*, valabilă pentru orice funcţie $f(x) \in C^{\circ} \cap V$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\exp[\mathrm{i}\alpha(x-\xi)]\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\xi. \tag{57}$$

Formula rămîne valabilă pentru $f(x) \in V$, dacă se înlocuieşte primul ei membru prin $(1/2)\,[f(x+0) + f(x-0)]$.

Se pot obţine uşor forme ale integralei Fourier scrise cu ajutorul funcţiilor $\cos\alpha(x-\xi)$ şi $\sin\alpha(x-\xi)$ (compară cu (29)—(31)). Dacă funcţia $f(x)$ este reală, partea imaginară a integralei (57) rezultă identic nulă, în virtutea proprietăţilor de simetrie, respectiv antisimetrie, ale funcţiilor $\cos\alpha(x-\xi)$ şi $\sin\alpha(x-\xi)$.

În cazul unei funcţii de două variabile $f(x, y)$, unde $x \in [0,2l]$ şi $y \in [0,2p]$, putem începe prin a construi seria Fourier corespunzătoare acestei funcţii privită ca funcţie de x:

$$f(x, y) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h(y)\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi hx}{l}\right), \quad a_h(y) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(\xi, y)\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi h\xi}{l}\right)\mathrm{d}\xi. \tag{58}$$

La rîndul lor, coeficienţii $a_h(y)$ pot fi dezvoltaţi în serie Fourier

$$a_h(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{hk}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi ky}{p}\right), \quad a_{hk} = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{+p} a_h(\eta)\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi k\eta}{p}\right)\mathrm{d}\eta. \tag{59}$$

Introducînd acum (59) în (58), obținem

$$f(x, y) = \sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4lp}\left\{\int_{-l}^{+l}\int_{-p}^{+p} f(\xi, \eta) \exp\left[-i\pi\left(\frac{h\xi}{l} + \frac{k\eta}{p}\right)\right] d\xi\, d\eta\right\} \times$$

$$\times \exp\left[i\pi\left(\frac{hx}{l} + \frac{ky}{p}\right)\right]. \tag{60}$$

Pentru o funcție reală $f(x, y)$, termenii pur imaginari se reduc, iar partea reală a acestei serii se scrie sub forma unei serii duble de sinuși și cosinuși.

În sfîrșit, pentru o funcție $f(x, y)$ neperiodică, așadar pentru $l, p \to \infty$, se obține formula integrală a lui Fourier pentru două variabile (vezi de ex. V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 162):

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\iiiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \exp\left[i\alpha(x - \xi) + i\beta(y - \eta)\right] d\alpha\, d\beta\, d\xi\, d\eta. \tag{61}$$

Formule analoge se pot scrie pentru funcții de mai multe variabile.

§ 10. FORMULELE DE TIP CAUCHY PENTRU FUNCȚII OLOMORFE ȘI MEROMORFE

Cele spuse relativ la relația dintre valorile la limită ale unor funcții olomorfe și valorile lor în domeniul de olomorfie, pot fi obținute utilizînd numai proprietățile la limită ale integralei Cauchy, și ale integralei de tip Cauchy, care o generalizează.

Să ne limităm deocamdată la domenii *simplu conexe* (nu neapărat circulare). Vom nota cu $\mathscr{L}$ frontiera (o curbă simplă închisă) și cu $\mathscr{D}^+$, $\mathscr{D}^-$ cele două domenii pe care ea le definește.

Vom prezenta aci patru formule care generalizează teorema lui Cauchy (5.10) și formula lui Cauchy (5.15), pentru funcții olomorfe sau meromorfe în $\mathscr{D}^+$ sau în $\mathscr{D}^-$ (vezi de ex. N. Mushelișvili [5], § 70).

Formula nr. 1°: Dacă $f(\mathfrak{z})$ este olomorfă în $\mathscr{D}^+$ și prelungibilă pe $\mathscr{L}$, atunci

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt = \begin{cases} f(\mathfrak{z}) & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+, \\ 0 & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-. \end{cases} \tag{1}$$

Într-adevăr, pentru $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+$, formula (1) coincide cu (5.15). Pentru $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-$, funcția $f(T)/(T - \mathfrak{z})$ este olomorfă pentru $T \in \mathscr{D}^+$ și continuă în $\mathscr{D}^+ + \mathscr{L}$, astfel că ne găsim în cadrul de valabilitate al teoremei (5.10).

Formula nr. 2°: Dacă $f(z)$ este olomorfă în $\mathscr{D}^-$ (avînd cel mult un pol de ordin zero la infinit) şi prelungibilă pe $\mathscr{L}$, atunci

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}}\frac{f(t)}{t-z}\,dt\begin{cases}-f(z)+a_0 & \text{pentru } z\in\mathscr{D}^-,\\ \quad a_0 & \text{pentru } z\in\mathscr{D}^+,\end{cases}\tag{2}$$

unde $a_0 = f(\infty)$.

Prin ipoteză, pentru $|z|$ suficient de mare, $f(z)$ are forma

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\, z^{-n}.\tag{3}$$

Pentru orice $z\in\mathscr{D}^-$, putem construi un cerc Γ cu centrul în origine şi care conţine în interior atît curba $\mathscr{L}$, cît şi punctul z. Aplicînd (5.15) relativ la domeniul mărginit de $\mathscr{L}$ şi Γ, domeniu în care $f(z)$ este olomorfă, obţinem

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}+\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,\tag{4}$$

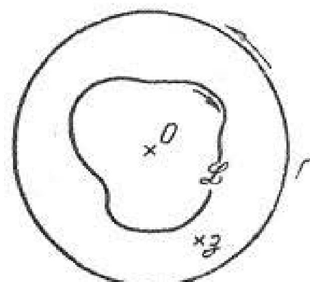


Fig. A.10.1

unde conturul Γ este parcurs în sens direct, iar $\mathscr{L}$, în sens retrograd. Integrala

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}\,dt\tag{5}$$

este independentă de raza R a lui Γ. Într-adevăr, considerînd două cercuri concentrice Γ' şi Γ'' şi ţinînd seama că punctul z nu aparţine coroanei astfel definite, obţinem din (5.10):

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma'+\Gamma''}\frac{f(t)}{t-z}\,dt = I' - I'' = 0.\tag{6}$$

Să presupunem deocamdată că $a_0 = 0$, aşadar că $f(z)$ este olomorfă la infinit. Pentru $|t|$ suficient de mare avem deci

$$|f(t)|\leqslant C\,|t|^{-1}.\tag{7}$$

Pentru modulul integralei I găsim

$$|I|\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\frac{|f(t)|\,|dt|}{|t-z|}.\tag{8}$$

Întrucît pe Γ avem $t = R\exp(i\theta)$, $dt = iR\exp(i\theta)\,d\theta$, din (7) şi (8) deducem

$$|I|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{C}{|t-z|}\,d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{C}{|t|-|z|}\,d\theta.\tag{9}$$

Întrucît $|z|$ este fix, iar $|t| = R\to\infty$ atunci cînd facem raza cercului Γ să crească nemărginit, rezultă — ţinînd seama şi de (6) — că

$$I = 0,$$

astfel că integrala din (4) trebuie luată numai pe $\mathscr{L}$. Sensul pe $\mathscr{L}$ fiind cel retrograd, rezultă că scriind (4) numai pe $\mathscr{L}$, trebuie să schimbăm semnul — ceea ce dă prima formulă din (2) pentru $a_0 = 0$.

Cazul $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+$ e mai simplu. Într-adevăr, funcţia $f(\mathfrak{t})/(\mathfrak{t} - \mathfrak{z})$ este olomorfă în domeniul mărginit de $\mathscr{L} + \Gamma$, şi deci, în locul formulei lui Cauchy care conduce la (4), trebuie să facem uz de teorema lui Cauchy (5.10), care dă

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}+\Gamma} \frac{f(\mathfrak{t})}{\mathfrak{t} - \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{t} = 0. \tag{11}$$

Formulele (5) — (10) rămîn valabile, şi deci pentru ambele cazuri (cînd $a_0 = 0$), avem

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\mathfrak{t})}{\mathfrak{t} - \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{t} = \begin{cases} -f(\mathfrak{z}) & \text{pentru} \quad \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-, \\ 0 & \text{pentru} \quad \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+. \end{cases} \tag{12}$$

Fie acum $a_0 = f(\infty) \neq 0$, Formulele (12) rămîn valabile pentru $f(\mathfrak{z}) - a_0$, şi deci

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\mathfrak{t}) - a_0}{\mathfrak{t} - \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{t} = \begin{cases} -[f(\mathfrak{z}) - a_0] & \text{pentru} \quad \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-, \\ 0 & \text{pentru} \quad \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+. \end{cases} \tag{13}$$

Or, făcînd uz de (1) pentru funcţia $f(\mathfrak{z}) \equiv 1$, avem evident

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} \frac{1}{\mathfrak{t} - \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{t} = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-, \\ 1 & \text{pentru} \quad \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+. \end{cases} \tag{14}$$

Introducînd acum (14) în (13), obţinem tocmai formulele (2).

Formulele (1), (2) pot fi generalizate la cazul unor funcţii $f(\mathfrak{z})$ *meromorfe*, avînd un număr *finit* de poli în $\mathscr{D}^+$ sau în $\mathscr{D}^-$.

Să presupunem deci că în vecinătatea unui punct $\mathfrak{c}$, funcţia $f(\mathfrak{z})$ are forma

$$f(\mathfrak{z}) = G(\mathfrak{z}) + f_0(\mathfrak{z}), \tag{15}$$

cu $f_0(\mathfrak{z})$ olomorfă în $\mathfrak{z} = \mathfrak{c}$, şi cu

$$G(\mathfrak{z}) = \sum_{j=1}^{l} A_j (\mathfrak{z} - \mathfrak{c})^{-j}, \tag{16}$$

unde A_j sînt nişte constante. Funcţia $G(\mathfrak{z})$ este deci partea principală (cu număr finit de termeni) a funcţiei $f(\mathfrak{z})$ în vecinătatea polului $\mathfrak{c}$ de ordin l.

Dacă $\mathfrak{c} = \mathfrak{z}_\infty$, atunci avem în mod analog

$$G(\mathfrak{z}) = \sum_{j=0}^{l} A_j \mathfrak{z}^j. \tag{17}$$

Să presupunem acum că funcţia $f(\mathfrak{z})$ este meromorfă în $\mathscr{D}^+$ (respectiv în $\mathscr{D}^-$), avînd poli în punctele $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_p$ aparţinînd lui $\mathscr{D}^+$ (respectiv $\mathscr{D}^-$), cu părţile principale $G_1(\mathfrak{z}), G_2(\mathfrak{z}) \ldots G_p(\mathfrak{z})$. Prin urmare, $f(\mathfrak{z})$ are forma

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{h=1}^{p} G_h(\mathfrak{z}) + f_0(\mathfrak{z}), \tag{18}$$

unde $f_0(\mathfrak{z})$ este olomorfă în $\mathscr{D}^+$ (respectiv $\mathscr{D}^-$), iar funcțiile

$$G_h(\mathfrak{z}) = \sum_{j=1}^{l_h} A_{jh}(\mathfrak{z} - \mathfrak{c}_h)^{-j} \tag{19}$$

sînt olomorfe (și nule la infinit) în $\mathscr{D}^-$ (respectiv în $\mathscr{D}^+$).

Formula nr. 3: Pentru funcția $f(\mathfrak{z})$ de forma (18), prelungibilă prin continuitate pe $\mathscr{L}$, meromorfă în $\mathscr{D}^+$ și avînd în $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 \ldots \mathfrak{c}_p$ poli cu părțile principale (19), avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt = \begin{cases} f_0(\mathfrak{z}) & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+, \\ -\sum_{h=1}^{p} G_h(\mathfrak{z}) & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-. \end{cases} \tag{20}$$

Într-adevăr, întrucît funcția $f_0(\mathfrak{z})$ din (18) este olomorfă în $\mathscr{D}^+$, și continuă în $\mathscr{D}^+ + \mathscr{L}$, obținem din (1)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f_0(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt = \begin{cases} f_0(\mathfrak{z}) & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+, \\ 0 & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-. \end{cases} \tag{21}$$

Tot astfel, întrucît funcțiile $G_h(\mathfrak{z})$ sînt în acest caz olomorfe în $\mathscr{D}^-$, nule la infinit și prelungibile pe $\mathscr{L}$, deducem din (2)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{G_h(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+, \\ -G_h(\mathfrak{z}) & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-. \end{cases} \tag{22}$$

Sumînd în (22) pentru h de la 1 la p, adunînd cu (21) și ținînd seama de (18), obținem tocmai formula (20).

Formula nr. 4°: Pentru $f(\mathfrak{z})$ de forma (18), prelungibilă prin continuitate pe $\mathscr{L}$, meromorfă în $\mathscr{D}^-$, și avînd în $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots \mathfrak{c}_p$ (printre care eventual și în $\mathfrak{z}_\infty$) poli cu părți principale (19) (eventual (17)), avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt = \begin{cases} -f_0(\mathfrak{z}) & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-, \\ \sum_{h=1}^{p} G_h(\mathfrak{z}) & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+. \end{cases} \tag{23}$$

Într-adevăr, descompunerea (18) rămîne valabilă. Funcția $f_0(\mathfrak{z})$ este olomorfă în $\mathscr{D}^-$, continuă în $\mathscr{D}^- + \mathscr{L}$, și nulă la infinit. Avem deci din (2)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f_0(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt = \begin{cases} -f_0(\mathfrak{z}) & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-, \\ 0 & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+. \end{cases} \tag{24}$$

Tot astfel, întrucît funcțiile $G_h(\mathfrak{z})$ sînt olomorfe în $\mathscr{D}^+$ și continue în $\mathscr{D}^+ + \mathscr{L}$, avem din (1)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{G_h(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-, \\ G_h(\mathfrak{z}) & \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+. \end{cases} \tag{25}$$

Sumînd în (25) pentru h de la 1 la p, adunînd cu (24) şi ţinînd seama de (18), obţinem formula căutată (23).

Formulele (20) şi (23) pot fi privite ca definind un operator integral care face să corespundă fiecărei funcţii meromorfe definite numai în $\mathscr{D}^+$, sau în $\mathscr{D}^-$, o funcţie definită *în tot planul* (deocamdată cu excepţia curbei $\mathscr{L}$), şi *olomorfă pe porţiuni*. Astfel de pildă formula (20) pune în corespondenţă funcţiei meromorfe $f(\mathfrak{z})$ definite în $\mathscr{D}^+$, partea sa regulată $f_0(\mathfrak{z})$, olomorfă în $\mathscr{D}^+$, şi partea sa principală luată cu semnul minus, olomorfă în $\mathscr{D}^-$. Funcţia astfel definită este continuă atît în $\mathscr{D}^+ + \mathscr{L}$, cît şi în $\mathscr{D}^- + \mathscr{L}$, *fără ca între valorile la limită pe $\mathscr{L}$ dinspre $\mathscr{D}^+$ şi $\mathscr{D}^-$ să existe a priori vreo legătură.*

Funcţia $f(t)$ din (20) şi (23) joacă rolul unei *densităţi* complexe, analogă într-o oarecare măsură cu densităţile potenţialilor newtonieni.

Observaţie. Formulele (1), (2), (20), (23) îşi păstrează valabilitatea pentru domenii *multiplu conexe* $\mathscr{D}^+$, $\mathscr{D}^-$, dacă în (1) şi (20) înlocuim condiţia $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-$ prin $\mathfrak{z} \in \complement(\mathscr{D}^+ + \mathscr{L})$, iar în (2) şi (23) înlocuim condiţia $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+$ prin $\mathfrak{z} \in \complement(\mathscr{D}^- + \mathscr{L})$. În acest caz, mulţimile $\complement(\mathscr{D}^+ + \mathscr{L})$ şi $\complement(\mathscr{D}^- + \mathscr{L})$ nu sînt conexe.

§ 11. DESPRE VALORILE LA LIMITĂ ALE FUNCŢIILOR OLOMORFE

Scopul paragrafului de faţă este de a da formule care generalizează anumite rezultate din paragraful precedent, pentru cazul în care densitatea $f(t)$ *nu este* apriori valoarea la limită a unei funcţii olomorfe. Ele constituie un analog al unor formule cunoscute din teoria potenţialului newtonian (vezi şi § 7.2), şi permit în ultimă instanţă construirea de ecuaţii integrale pentru determinarea densităţii $f(t)$ în anumite probleme la limită (vezi cap. 6).

a) Integrala de tip Cauchy

Să considerăm o *linie* $\mathscr{L}$ alcătuită din curbe simple rectificabile (eventual deschise), şi o funcţie complexă de punct $f(t)$, $t \in \mathscr{L}$, continuă, dar altfel arbitrară.

În general, nu există nici o funcţie $\varphi(\mathfrak{z})$ *olomorfă*, astfel încît $f(t)$ să fie valoarea la limită a lui $\varphi(\mathfrak{z})$ pe $\mathscr{L}$ (definită în sensul din (3.17)). Într-adevăr, fie de exemplu că $\mathscr{L}$ este frontiera unui domeniu $\mathscr{D}^+$. Rezolvînd problema lui Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace în $\mathscr{D}^+$ cu valorile la limită Re $f(t)$ pe $\mathscr{L}$, funcţia armonică conjugată soluţiei acestei probleme determină pe deplin valorile Im $\varphi^+(t)$, astfel că funcţia Im $f(t)$ nu poate fi dată arbitrar.

Pentru a găsi condiţiile necesare şi suficiente pentru ca o funcţie $f(t)$ să fie valoarea la limită a unei funcţii olomorfe într-un domeniu a cărui frontieră este $\mathscr{L}$, să începem prin a presupune că $\mathscr{L}$ este o *curbă simplă*

închisă, şi să considerăm integrala (vezi şi (1.1.7)):

$$F(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t-\mathfrak{z}}\,dt = \begin{cases} F_+(\mathfrak{z}) \text{ pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+, \\ F_-(\mathfrak{z}) \text{ pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-, \end{cases} \tag{1}$$

unde $t \in \mathscr{L}$, iar $f(t)$ este o funcţie complexă, absolut integrabilă pe $\mathscr{L}$.

Dacă $\mathscr{L}$ este alcătuită din mai multe componente, (1) trebuie scris sub forma

$$F(\mathfrak{z}) = \begin{cases} F_i(\mathfrak{z}) \text{ pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^i, \\ F_e(\mathfrak{z}) \text{ pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^e. \end{cases} \tag{1'}$$

Dacă în alcătuirea lui $\mathscr{L}$ intră şi curbe deschise, se poate defini pe acestea un sens de parcurs, şi deci şi o vecinătate „dreaptă'' şi una „stîngă'' pentru fiecare punct care nu este un capăt. Funcţia din (1) este acum înţeleasă ca definită în aceste vecinătăţi.

Vom păstra peste tot notaţiile $+$, $-$, care trebuie totuşi înţelese în chip diferenţiat, după cum avem de-a face cu o curbă închisă, cu o linie, sau cu un arc deschis.

Funcţia definită în (1) se numeşte *integrală de tip Cauchy*, *de densitate* $f(t)$.

Pentru studiul detailat al acestor integrale, vezi de exemplu F. Gahov [1], capitolul 1; G. Goluzin [1], §§ 10.3–10.5; M. Lavrentiev şi B. Şabat [1], capitolul 3, pct. 52; A. Markuşevici [1], § 3.3, pct. 3; S. Mihlin [1], §§ 54–59; N. Musheli̇şvili [5], capitolul 4; [4], § 1.11; I. Privalov [2], § 4.3, pct. 3.

Între integralele de tip Cauchy şi potenţialii newtonieni (în plan) există o legătură simplă (vezi de ex. N. Musheli̇şvili [4], § 1.12), ceea ce explică rolul acestor integrale în studiul anumitor probleme la limită.

Dacă $\mathscr{L}$ este frontiera unui domeniu mărginit, iar $f(t)$ este valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în acest domeniu, (1) se reduce pur şi simplu la o integrală Cauchy.

Derivatele funcţiei $F(\mathfrak{z})$ sînt date de o formulă similară cu (5.16):

$$F^{(n)}(\mathfrak{z}) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{(t-\mathfrak{z})^{n+1}}\,dt, \quad \mathfrak{z} \notin \mathscr{L}. \tag{2}$$

Prin urmare, dacă $\mathscr{L}$ este frontiera unui domeniu, formula (1) defineşte *două funcţii olomorfe*: $F_+(\mathfrak{z})$, olomorfă în $\mathscr{D}^+$, şi $F_-(\mathfrak{z})$, olomorfă în $\mathscr{D}^-$ şi nulă la infinit — cu toate că $f(t)$ *nu este* valoarea la limită a vreunei funcţii olomorfe. (Dacă $\mathscr{L}$ are mai multe componente, indicii $+$, $-$ se înlocuiesc cu i, e.)

În general, nu se poate spune nimic despre posibilitatea de a prelungi prin continuitate funcţia (1) (sau derivatele sale (2)) pe $\mathscr{L}$; şi chiar dacă valorile la limită

$$F^+(t) = \lim_{\mathfrak{z}\to t\in\mathscr{L}} F_+(\mathfrak{z}), \quad F^-(t) = \lim_{\mathfrak{z}\to t\in\mathscr{L}} F_-(\mathfrak{z}) \tag{3}$$

există (vezi (3.17)), nu poate fi vorba de egalitatea lor pe $\mathscr{L}$. (Aceste limite sînt distincte chiar dacă $f(t)$ este valoarea pe $\mathscr{L}$ a unei funcţii olomorfe: vezi (10.1) şi (10.2).)

b) Valori principale. Formulele lui Sohoțki-Plemelj

Luînd în (1) sau (2) punctul $\mathfrak{z}$ chiar pe curba $\mathscr{L}$, integralele devin improprii, și trebuie definite cu ajutorul unui proces de trecere la limită. Pentru aceasta să presupunem (vezi § 3, pag. 700) că $f(t) \in C^0_\mu(\mathscr{L})$:

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leqslant H\,|t_2 - t_1|^\mu, \quad 0 < \mu \leqslant 1. \tag{4}$$

Considerînd un arc $l \subset \mathscr{L}$ cu centrul în $t_0 \in \mathscr{L}$ și de lungime 2ε, integrala improprie (1) pentru $\mathfrak{z} = t_0 \in \mathscr{L}$ poate fi calculată ca limita

$$F(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{L} - l} \frac{f(t)}{t - t_0}\, dt, \quad t_0 \in \mathscr{L}. \tag{5}$$

Integrala din membrul al doilea din (5) există întotdeauna; iar limita ei pentru $\varepsilon \to 0$ există de asemenea dacă $f(t)$ satisface (4). Această limită poartă numele de *valoare principală* (în sensul lui Cauchy) a integralei (1) în punctul $t_0 \in \mathscr{L}$.

Pentru $\mathfrak{z} = t_0 \in \mathscr{L}$ și $f(t) \in C^0_\mu(\mathscr{L})$, integrala (1) se înțelege *întotdeauna* a fi luată în sensul valorii principale. Această valoare poate fi exprimată printr-o integrală obișnuită. Procesele de trecere la limită din (5) și (3) nu au desigur nimic comun, și *valorile* $F(t_0)$, $F^+(t_0)$ și $F^-(t_0)$ *nu trebuie în nici un caz confundate.* Dar între aceste valori există o strînsă legătură. Anume, dacă $f(t) \in C^0_\mu$ *în vecinătatea punctului* $t_0 \in \mathscr{L}$ (așadar nu pe întreg $\mathscr{L}$, dar nici numai în punctul t_0), toate cele trei valori la limită există, și ele sînt legate prin *formulele lui Sohoțki-Plemelj*:

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2} f(t_0) + F(t_0), \qquad F^-(t_0) = -\frac{1}{2} f(t_0) + F(t_0). \tag{6}$$

Pentru ca funcția $F(\mathfrak{z})$ din (1) să poată fi prelungită prin continuitatea pe $\mathscr{L}$, este deci suficient ca $f(t) \in C^0_\mu(\mathscr{L})$.

Formulele (6) au fost date — pentru o frontieră rectilinie — de către Iu. Sohoțkii (1873) și ulterior, într-un cadru practic identic cu cel actual, de către J. Plemelj [1], [2]. Evident, ele sînt de același tip cu teoremele de discontinuitate pentru potențialii newtonieni (vezi (7.2.29)—(7.2.32)). Pentru deducerea lor, vezi de exemplu F. Gahov [1], § 1.4; A. Markușevici [1], § 3.3, pct. 4; N. Mushelișvili [4], §§ 1.15 și 1.16; I. Privalov [2], § 4.3, pct. 7—8.

Pentru a găsi criterii care să asigure că derivatele $F^{(n)}(\mathfrak{z})$ din (2) pot fi prelungite prin continuitate pe $\mathscr{L}$, să examinăm cazul $n = 1$:

$$F'(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{(t - \mathfrak{z})^2}\, dt. \tag{7}$$

Separînd din linia $\mathscr{L}$ un arc deschis l de capete a, b ce conține t_0, este evident că integrala (7) luată pe $\mathscr{L} - l$ este o funcție olomorfă pe l. Luată pe arcul l, ea devine

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{(t - \mathfrak{z})^2}\, dt = -\frac{1}{2\pi i} \left. \frac{f(t)}{t - \mathfrak{z}} \right|_{t=a}^{t=b} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{L}} \frac{f'(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt. \tag{8}$$

Prin urmare, o condiție *suficientă* pentru ca această integrală — și deci și funcția $F'(z)$ — să poată fi prelungită prin continuitate în $t_0 \in l$, este ca $f'(t) \in C^0_\mu(l)$. Pentru ca $F'(z)$ să poată fi prelungită prin continuitate peste tot pe $\mathscr{L}$, este deci suficient ca $f(t) \in C^1_\mu(\mathscr{L})$.

Condiția poate fi corespunzător extinsă asupra derivatelor de ordin n.

Să remarcăm că formulele (6) pot fi transcrise și sub forma echivalentă :

$$f(t_0) = F^+(t_0) - F^-(t_0), \qquad 2F(t_0) = F^+(t_0) + F^-(t_0). \tag{9}$$

Prima din ele arată că *orice funcție* $f(t) \in C^0_\mu(\mathscr{L})$ *este diferența valorilor la limită a două funcții olomorfe*; dacă $\mathscr{L}$ definește un domeniu $\mathscr{D}$, acestea sînt două funcții olomorfe în $\mathscr{D}$, respectiv în $\complement(\mathscr{D} + \mathscr{L})$.

Rezultatul este mai general decît cel din (9.47), întrucît este valabil pentru linii $\mathscr{L}$ mai generale decît cercul de convergență al unei serii Taylor. Din punctul de vedere al funcției-densitate, cele două rezultate se acoperă doar parțial, întrucît clasele V și C^0_μ nu sînt subordonate una celeilalte.

Prima din formulele (9) nu depinde explicit de condiția ca $f(t)$ să fie hölderiană, în fapt, ea rămîne valabilă dacă $f(t)$ este numai *continuă*, cu condiția ca limitele $F^+(t_0)$, $F^-(t_0)$ să fie definite pentru două puncte z^+, z^- care tind spre t_0, pe un segment de dreaptă ce trece prin t_0, fără a fi tangent la $\mathscr{L}$, și pentru care avem $|z^+ - t_0| = |z^- - t_0|$ (vezi N. Mushelișvili [4], § 1.17).

Pentru un astfel de mod de a înțelege (3), prima relație (9) rămîne deci valabilă dacă $f(t) \in C^0$. De aci rezultă că *dacă una din valorile la limită există, atunci există și cea de a doua.*

c) Valori la limită ale funcțiilor olomorfe

Dacă $\mathscr{L}$ este o *curbă simplă închisă*, formulele (6) (și chiar numai prima din formulele (9)) permit să definim condițiile în care o funcție $f(t)$, $t \in \mathscr{L}$, este valoarea la limită a unei funcții olomorfe.

Anume, fie că există o funcție $\varphi(z)$ olomorfă în $\mathscr{D}^+$ și astfel ca

$$f(t) = \varphi^+(t), \qquad t \in \mathscr{L}. \tag{10}$$

În acest caz, din (10.1) și (1) rezultă

$$F_-(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t - z}\, dt = 0 \qquad \text{pentru } z \in \mathscr{D}^-, \tag{11}$$

astfel că (11) este o condiție *necesară* pentru ca $f(t)$ să posede proprietatea (10).

Reciproc, să considerăm funcția, olomorfă în $\mathscr{D}^+$, definită prin (1) : $\varphi(z) = F_+(z)$. Dacă (11) e satisfăcută, urmează $F_-(t) \equiv 0$ pentru $t \in \mathscr{L}$, oricum ar tinde $z \in \mathscr{D}^-$ spre t. Așadar,

oricum ar tinde $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+$ spre t, prima relaţie (9) este verificată pentru orice funcţie *continuă* $f(t)$; introducînd aci (11), obţinem imediat (10).

Prin urmare, (11) este condiţia *necesară şi suficientă* pentru ca $f(t) \in C^0(\mathscr{L})$ să fie valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în $\mathscr{D}^+$, şi anume chiar a funcţiei (1) pentru $t \in \mathscr{D}^+$. Altfel spus, dacă a doua egalitate (10.1) este *identic* satisfăcută în $\mathscr{D}^-$ pentru $f(t) \in C^0(\mathscr{L})$, atunci prima egalitate (10.1) defineşte chiar acea funcţie olomorfă în $\mathscr{D}^+$ a cărei valoare la limită este $f(t)$.

Fie acum că există o funcţie, notată provizoriu $\varphi(\mathfrak{z})$, olomorfă în $\mathscr{D}^-$ şi astfel ca

$$f(t) = \varphi^-(t), \qquad t \in \mathscr{L}. \tag{12}$$

Din (10.2) şi (1) rezultă acum

$$F(\mathfrak{z}) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt = a_0 \quad \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+, \tag{13}$$

unde $a_0 = \varphi(\infty)$; (13) este deci o condiţie *necesară* pentru ca $f(t)$ să verifice (12).

Reciproc, să considerăm funcţia (olomorfă în $\mathscr{D}^-$)

$$\varphi(\mathfrak{z}) = - F_-(\mathfrak{z}) + a_0, \tag{14}$$

unde $F_-(\mathfrak{z})$ este dată de (1), iar a_0 este o constantă complexă arbitrară. Dacă condiţia (13) este satisfăcută, urmează că $\varphi(\mathfrak{z}) = 0$ pentru $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+$ şi deci $\varphi^+(t) = 0$ pentru $t \in \mathscr{L}$. Ţinînd seama de aceasta în prima relaţie (9), se obţine (folosind şi (14)):

$$f(t) = - [\varphi^+(t) + a_0] - [-\varphi^-(t) + a_0] = \varphi^-(t),$$

aşadar tocmai relaţia (12).

Prin urmare, (13) este condiţia *necesară şi suficientă* pentru ca o funcţie $f(t) \in C^0(\mathscr{L})$ să fie valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în $\mathscr{D}^-$, şi anume a funcţiei (14). Altfel spus, dacă a doua egalitate (10.2) este *identic*, satisfăcută în $\mathscr{D}^+$ pentru $f(t) \in C^0(\mathscr{L})$, atunci prima egalitate (10.2) permite să se construiască acea funcţie olomorfă în $\mathscr{D}^-$ a cărei valoare la limită este tocmai funcţia dată $f(t)$.

Alegînd originea $\mathfrak{z} = 0$ în $\mathscr{D}^+$, avem evident, din (13),

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t}\, dt, \tag{15}$$

ceea ce permite o oarecare simplificare a expresiei (14).

În definitiv, dată fiind funcţia $f(t) \in C^0(\mathscr{L})$, *care satisface condiţiile* (11) *sau* (13), se pot construi funcţiile

$$f_+(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt \quad \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+,$$

$$f_-(\mathfrak{z}) = \frac{-\mathfrak{z}}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t(t - \mathfrak{z})}\, dt \quad \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^-, \tag{16}$$

olomorfe în $\mathscr{D}^+$, respectiv în $\mathscr{D}^-$, şi avînd funcţia $f(t)$ ca valoare la limită pe $\mathscr{L}$. (Pentru cea de-a doua formulă, am folosit (14) şi (15).) Notaţiile $f_+(\mathfrak{z})$ şi $f_-(\mathfrak{z})$ înlocuiesc acum notaţia provizorie $\varphi(\mathfrak{z})$.

Dispunem deci atît de *criteriile* necesare pentru a stabili dacă o funcţie este valoarea la limită a unei funcţii olomorfe, cît şi de *expresiile* acestei funcţii.

OBSERVAŢIA 1. Condiţiile (11) şi (13) rămîn valabile şi pentru domenii multiplu conexe, dacă domeniile $\mathscr{D}^-$, respectiv $\mathscr{D}^+$, se înlocuiesc cu $\complement(\mathscr{D}^+ + \mathscr{L})$, respectiv $\complement(\mathscr{D}^- + \mathscr{L})$ (*mulţimi formate din domenii disjuncte*).

OBSERVAŢIA 2. Formule analoge se obţin dacă $\mathscr{L}$ are în alcătuirea sa linii ale căror capete sînt aruncate la infinit (în particular, drepte).

d) Teorema lui Harnack

Reprezentarea funcţiilor olomorfe cu ajutorul densităţii $f(t)$ nu este unică. Într-adevăr, pentru $f(t) = 1/t$ avem

$$F(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} \frac{dt}{t(t - \mathfrak{z})}. \tag{17}$$

Or, întrucît

$$\frac{1}{t(t - \mathfrak{z})} = \frac{1}{\mathfrak{z}(t - \mathfrak{z})} - \frac{1}{t\mathfrak{z}},$$

cu ajutorul teoremei reziduurilor pentru $\mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+$ (dacă $\mathscr{D}^+$ conţine originea) deducem

$$F_+(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\mathfrak{z}}\oint_{\mathscr{L}} \frac{dt}{t - \mathfrak{z}} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\mathfrak{z}}\oint_{\mathscr{L}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\mathfrak{z}} - \frac{1}{\mathfrak{z}} = 0. \tag{18}$$

Dacă pentru o funcţie $F(\mathfrak{z})$ cunoaştem o densitate $f(t)$, aceeaşi funcţie poate fi deci reprezentată şi cu ajutorul densităţii $f(t) + 1/t$.

Totuşi, în clasa densităţilor *reale*, se poate demonstra *teorema lui Harnack*: funcţia identic nulă în $\mathscr{D}^+$, respectiv în $\mathscr{D}^-$, poate fi reprezentată, în clasa densităţilor continue reale, numai cu ajutorul densităţii nule, respectiv constante, pe curba simplă închisă $\mathscr{L}$.

Într-adevăr, dacă avem

$$F(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t - \mathfrak{z}}\, dt = 0 \qquad \text{pentru } \mathfrak{z} \in \mathscr{D}^+, \tag{19}$$

din (13) rezultă că $f(t)$ este valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în $\mathscr{D}^-$ şi nule la infinit. Notînd

$$f(t) = U^- + i V^-, \tag{20}$$

întrucît $f(t)$ este reală, rezultă $V^- = 0$, de unde $V = 0$ în $\mathscr{D}^-$, şi deci $U = \text{const.}$ în $\mathscr{D}^-$. Prin urmare, $f(t)$ se reduce la o constantă f, astfel că (19) devine

$$\frac{1}{2\pi i} f \oint_{\mathscr{L}} \frac{1}{t - z}\, dt = 0 \quad \text{pentru } z \in \mathscr{D}^+, \tag{21}$$

de unde, ţinînd seama de (10.14), deducem

$$f(t) = f = 0. \tag{22}$$

Fie acum că avem

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t - z}\, dt = 0 \quad \text{pentru } z \in \mathscr{D}^-. \tag{23}$$

Din (11) rezultă deci că

$$f(t) = U^+ + i V^+, \tag{24}$$

de unde ca şi mai sus deducem

$$f(t) = f = \text{const.} \tag{25}$$

Această constantă nu este însă cu necesitate nulă, întrucît relaţiile (10.14), (23) şi (25) conduc la identitatea $0 \equiv 0$.

Prin urmare, dacă pentru două densităţi *reale* $f(t)$, $g(t)$ avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(t)}{t - z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{L}} \frac{g(t)}{t - z}\, dt \tag{26}$$

pentru orice $z \in \mathscr{D}^+$, atunci urmează $f(t) \equiv g(t)$; iar dacă condiţia (26) este satisfăcută pentru orice $z \in \mathscr{D}^-$, atunci urmează $f(t) \equiv g(t) + \text{const.}$

Această teoremă rămîne valabilă pentru domenii multiple conexe, şi un analog al ei poate fi formulat şi pentru cazul în care $\mathscr{L}$ conţine arce deschise.

Toate cele de mai sus îşi au originea în formulele no. 1° şi 2° din § 10. În acelaşi mod se pot da criterii pentru ca o funcţie $f(t)$ dată pe $\mathscr{L}$ să fie valoarea la limită a unei funcţii meromorfe în $\mathscr{D}^+$, respectiv $\mathscr{D}^-$, avînd un număr finit de poli cu părţi principale cunoscute.

Astfel, de exemplu, se poate afirma că dacă a doua egalitate (10.20) este identic satisfăcută în $\mathscr{D}^-$ pentru $f(t) \in C^0(\mathscr{L})$, atunci prima egalitate (10.20) defineşte componenta $f_0(z)$ a funcţiei meromorfe (10.18), cu poli şi părţi principale date în $\mathscr{D}^+$, şi a cărei valoare la limită este tocmai $f(t)$.

În acelaşi mod, cu ajutorul formulei (10.23), se poate construi un criteriu analog pentru $\mathscr{D}^-$.

Şi aceste rezultate pot fi generalizate la cazul unor domenii multiplu conexe.

e) *Cazul discului unitate*

În acest caz, criteriile (11) și (13) pot fi puse sub o formă mai simplă. Anume, să asociem unei funcții $\varphi(\zeta)$, o funcție $\varphi_*(\overline{\zeta})$ definită de

$$\varphi_*(\zeta) = \overline{\varphi(1/\overline{\zeta})}. \tag{27}$$

Evident, dacă $\zeta = \rho \exp(i\theta) \in Д^+$, atunci $1/\overline{\zeta} = \rho \exp(i\theta) \in Д^-$, și reciproc. Prin urmare, dacă $\varphi(\zeta)$ este definită în $Д^+$, atunci $\varphi_*(\zeta)$ este definită în $Д^-$ și reciproc.

Dacă $\varphi(\zeta)$ este olomorfă în $Д^+$, atunci

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \zeta^n, \quad |\zeta| < 1, \tag{28}$$

și deci

$$\varphi_*(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varphi}_n \zeta^{-n}, \tag{29}$$

astfel că $\varphi_*(\zeta)$ rezultă olomorfă în $Д^-$, cel mult cu excepția punctului de la infinit, unde ea poate avea un pol de ordin zero (dacă $\varphi_0 \neq 0$). Evident, avem

$$\varphi_*(\infty) = \bar{\varphi}_0 = \overline{\varphi(0)}. \tag{30}$$

Fiind dată funcția $\varphi(\zeta)$ definită în $Д^+$ și presupunînd că există

$$\varphi^+(\sigma) = \lim \varphi(\zeta) \text{ pentru } \zeta \in Д^+, \quad \zeta \to \sigma, \tag{31}$$

atunci avem desigur $1/\overline{\zeta} \in Д^-$, $1/\overline{\zeta} \to 1/\overline{\sigma} = \sigma$, astfel că există și

$$\varphi_*^-(\sigma) = \lim_{\zeta \in Д^-,\, \zeta \to \sigma} \varphi_*(\zeta) = \overline{\varphi^+(\sigma)}. \tag{32}$$

Analog, dacă pentru funcția $\varphi(\zeta)$ definită în $Д^-$ există valoarea la limită $\varphi^-(\sigma)$, atunci există și funcția $\varphi_*(\zeta)$ definită în $Д^+$ și avem

$$\varphi_*^+(\sigma) = \overline{\varphi^-(\sigma)}. \tag{33}$$

Aceste egalități conduc la relații simple și între valorile la limită ale derivatelor corespunzătoare. Anume, avem pe rînd din (27):

$$\overline{\varphi_*(\overline{\zeta})} = \varphi(1/\zeta), \quad \frac{d}{d\zeta}\overline{\varphi_*(\overline{\zeta})} = -\zeta^{-2}\varphi'(1/\zeta),$$

de unde

$$\varphi_*'(\zeta) = -\zeta^{-2}\overline{\varphi'(1/\overline{\zeta})}, \tag{34}$$

și deci pe γ:

$$[\varphi_*'(\sigma)]^- = -\sigma^{-2}\overline{[\varphi'(\sigma)]^+}. \tag{35}$$

(Dacă nu există risc de confuzie, putem renunța la indicii $+$, $-$.)

OBSERVAŢIA 3. Evident, punctele ζ şi $1/\overline{\zeta}$ sînt simetrice în raport cu cercul γ, în timp ce valorile $\varphi(\zeta)$, $\varphi_*(1/\overline{\zeta})$ sînt simetrice în raport cu axa reală din planul $\mathfrak{z}$ (vezi § 5, pag. 724).

Relaţia (27) *nu defineşte* o prelungire analitică, ci numai *asociază* unei funcţii olomorfe în Д$^+$, o altă funcţie, olomorfă în Д$^-$. Într-adevăr, pentru a avea de-a face cu o prelungire analitică, ar trebui ca valorile $\varphi^+(\sigma)$ să fie reale — vezi (32) — ceea ce este în general imposibil, întrucît în acest caz şi $\varphi(\zeta)$ ar trebui să fie reală. Totuşi, cele două funcţii considerate sînt una prelungirea analitică a celeilalte, prin acele porţiuni ale frontierei γ pe care valorile la limită sînt *nule*.

Să trecem acum la examinarea criteriilor (11) şi (13).

Condiţia (11) este echivalentă cu condiţia (10), care în cazul discului unitate poate fi pusă sub forma (vezi (32))

$$f(\sigma) = \overline{\varphi_*^-(\sigma)}. \tag{36}$$

Întrucît $\varphi_*(\zeta)$ este olomorfă în Д$^-$ şi deci verifică (13), aceasta se mai scrie

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\, d\sigma = a_0 \quad \text{pentru } \zeta \in Д^+, \tag{37}$$

unde (vezi (13) şi (30)) avem $a_0 = \varphi_*(\infty) = \overline{\varphi(0)}$.

Prin urmare, criteriile (11) şi (37) sînt echivalente (pentru cercul unitate numai!) cu condiţia (10) (desigur, pentru funcţii continue).

Tot astfel, condiţia (13) este echivalentă cu (12), care se poate pune sub forma

$$f(\sigma) = \varphi_*^+(\sigma), \tag{38}$$

şi mai departe (întrucît $\varphi_*(\zeta)$ este olomorfă în Д$^+$, şi folosind şi relaţia (11)), sub forma

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\, d\sigma = 0 \quad \text{pentru } \zeta \in Д^-. \tag{39}$$

Criteriile (13) şi (39) sînt deci echivalente cu condiţia (12).

OBSERVAŢIA 4. Formule analoge se pot obţine în cazul în care rolul domeniilor Д$^+$, Д$^-$ îl au două semiplane complementare.

Pentru a încheia, să stabilim legătura dintre cele de mai sus şi formulele date în § 9 pentru cazul frontierei circulare. Pentru $\mathscr{L} = \gamma$, formula (1) devine

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\sigma)}{\sigma-\zeta}\, d\sigma, \quad \zeta \notin \gamma. \tag{40}$$

Pentru $\zeta \in Д^+$ (aşadar $|\zeta/\sigma| < 1$) obţinem pe rînd

$$F_+(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\sigma)}{\sigma(1-\zeta/\sigma)}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \sigma^{-1} f(\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta/\sigma)^n\, d\sigma =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\sigma)\,\sigma^{-n-1} d\sigma\right)\zeta^n = \sum_{n=0}^{n} f_n \zeta^n; \tag{41}$$

pe de altă parte, dacă $\zeta \in Д^-$ (aşadar dacă $|\sigma/\zeta| < 1$), atunci

$$F_+(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\sigma)}{\zeta(1-\sigma/\zeta)}\,d\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\sigma)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n/\zeta^{n+1}\,d\sigma =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\sigma)\,\sigma^{n-1}\,d\sigma\right)\zeta^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}\,\zeta^{-n}, \tag{42}$$

unde f_n, f_{-n} sînt coeficienţii Fourier ai funcţiei $f(\sigma)$, daţi de (9.25).

Dispunem astfel de expresiile (41), (42) ale integralei de tip Cauchy ca funcţie olomorfă în $Д^+$, respectiv $Д^-$ (şi nulă la infinit). Aceste formule coincid evident cu (9.44). (Ele, împreună cu formula (14), justifică alegerea semnului minus în a doua formulă (9.44).) Prin scădere termen cu termen, obţinem formula (9.47), echivalentul (în acest caz) al primei formule (9).

Condiţiile pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în $Д^+$, respectiv în $Д^-$, se reduc la condiţiile (9.41), respectiv (9.42), care asigură anularea identică a funcţiilor (42), respectiv (41) — ceea ce echivalează mai departe cu condiţiile (11), respectiv (13).

Desigur, pentru ca rezultatele din § 9 să fie comparabile cu cele de aci, trebuie să avem $f(\sigma) \in V(\gamma) \cap C^0(\gamma)$.

Dacă dorim să facem uz de criteriile (37), (39), avem de calculat integrala

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma, \qquad \zeta \notin \gamma. \tag{43}$$

Cu ajutorul formulelor (9.26) obţinem de aci

$$\begin{aligned} G_+(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\overline{(f_{-n})}\,\zeta^n, \qquad \zeta \in Д^+, \\ G_-(\zeta) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f_n}\,\zeta^{-n}, \qquad \zeta \in Д^-. \end{aligned} \tag{44}$$

Semnificaţia criteriilor (37), (39) rezultă de aci evident.

Utilizînd mijloacele reprezentării conforme, se poate demonstra că criteriile (9.41) şi (9.42) rămîn valabile şi pentru un domeniu mărginit de o curbă simplă închisă oarecare $\mathscr{L}$, astfel încît criteriul (11) rezultă echivalent cu

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} f(t)\,t^{n-1}\,dt = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{45}$$

în timp ce (13) este echivalent cu

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}} f(t)\,t^{-n-1}\,dt = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{46}$$

La rîndul lor, şi aceste criterii pot fi extinse la cazul domeniilor multiplu conexe (vezi de exemplu J. Walsh [1], § 2.5).

BIBLIOGRAFIE

ABASSI, M. — [1] *Simple solutions of Saint-Venant's torsion problem by using Tschebycheff polynomials*. Quart. Appl. Math., **14**, *1* (1956).

ABEN, H. K. — [1] *K issledovaniju ob'emnyh fotouprugih modelej*. Izv. OTN, Meh. i Maš., *4* (1964).

ABRAMJAN, B. L., ALEKSANDROV, A. I. — [1] *Osesimmetričnye zadači teorii uprugosti*. Trudy 2 s'ezda po mehanike, vol. 3, Izd-vo Nauka, Moscova, 1966.

ABRAMJAN, B. L., ARUTJUNJAN, N. H. et BABLOJAN, A. A.—[1] *O dvuh kontaktnyh zadačah dlia uprugoj sfery*. Prikl. Mat. Meh., **28**, *4* (1964).

ABRAMJAN, B. L., MANUKJAN, M. M. — [1] *Rešenie ploskoj zadači teorii uprugosti dlja prjamougolnika v peremeščenijah*. Dokl. AN Arm. SSR, **25**, *4* (1957).

ABRAMOV, V. M. — [1] *Issledovanie slučaja nesimmetričnogo davlenija štampa kruglogo sečenija na uprugoe poluprostranstvo*. Dokl. AN SSSR, **23**, *8* (1939).

ABRAMSOHN, H. N., PLESS, H. J., RIPPERBERGER, E. A. — [1] *Stress wave propagation in rods and beams*. Advances in applied mechanics, vol. 5, Academic Press, N. York, 1958.

ADKINS, J. E. — [1] *Symmetry relations for orthotropic and transversely isotropic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, *3* (1960). — [2] *Further symmetry relations for transversely isotropic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal., **5**, *3* (1960). — [3] *Large elastic deformations*. Progress in solid mechanics, vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.

ADLER, G. — [1] *Majoration des tensions dans un corps élastique à l'aide des déplacements superficiels*. Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, *5* (1964).

AGAREV, V. A.—[1] *Metod načalnyh funkciy dlia dvumernyh kraevyh zadač teorii uprogosti*. Akademkniga, Moscova, 1963.

AHLFORS, L. V. — [1] *Complex analysis*. McGraw-Hill, New York, 1953.

AIRY, G. B. — [1] *On the strains in the interior of beams*. Phil. Trans. Roy. Soc., London, **153**. (1863).

AKOPJAN, A. A. — [1] *Nekotorye primenenija termodinamiki k ravnovesiju idealno uprugih sistem*. Prikl. Mat. Meh., **8**, *3* (1944).

AKSENTJAN, O. K., VOROVIČ, I. I. — [1] *Naprjažennoe sostojanie plity maloj tolščiny*. Prikl. Mat. Meh., **27**, *6* (1963).

ALEKSANDROV, A. IA. — [1] *Rešenie osesimmetričnyh i nekotoryh drugih prostranstvennyh zadač teorii uprugosti pri pomošči analitičeskih funkcij*. Applic. Theory of Functions in continuum mechanics, vol. 1, Izd-vo Nauka, Moscova, 1965.

ALEKSANDROV, V. M. — [1] *K rešeniju nekotoryh kontaktnyh zadač teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., **27**, *5* (1963). — [2] *K rešeniju odnogo tipa dvumernyh integralnyh uravnenij*. Prikl. Mat. Meh., **28**, *3* (1964).

ALEKSANDROV, V. M., BABEŠKO, V. A. — [1] *Kontaktnye zadači dlja uprugoj polosy maloj tolščiny*. Mehanika, *2* (1965).

ALFREY, T. — [1] *Mechanical behaviour of high polymers*. J. Wiley, New York, 1948.

ALLEN, D. N. de G. — [1] *Relaxation methods applied to conformal transformations*. The Quart. Journ. Mech. Appl. Math., **15**, *1* (1962).

ALMANSI, E. — [1] *Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un area piana semplicemente connessa per date condizioni al contorno*. Rend. Palermo, **13**, (1899).—[2] *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Annali Mat. pura ed applicata, (3), **2** (1899).—[3] *Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente* (I, II). Rendiconti dei Lincei, (6), **10** (1901).

AMBARCUMJAN, S. A. — [1] *Teorija anizotropnyh oboloček*. Fizmatgiz, Moscova, 1961.

ANIN, B. D. — [1] *Zamečanie k rabote V. L. Dobrovolskogo „O primenenii kompleksnyh peremennyh ...”*. Prikl. Mat. Meh., **29**, *2* (1965).

ANTONOV, E. E. — [1] *Primenenie elektromodelirovannogo konformnogo preobrazovanija k rešeniju zadač kručenija polyh prizmatičeskih steržnej iz ortotropnogo materiala.* Trudy I meżvuzovskoj konferencii po električeskomu modelirovaniju zadač str. meh., sopr. mat. i teorii uprugosti. B. M., Novočerkasskij Politehn. Inst., 1960.

ARGYRIS, J. H. — [1] *On the analysis of complex elastic structures.* Appl. Mech. Rev., **11**, *7* (1958).

ARŽANYH, I. S. — [1] *Integralnye uravnenija osnovnyh zadač teorii polja i teorii uprugosti.* Taşkent, 1954.

ARŽANYH, I. S., BONDARENKO, B. A. — [1] *Priloženija teorii funkcij kompleksnogo peremennogo k trehmernym zadačam matematičeskoj teorii uprugosti.* Trudy In-ta matematiki AN Uzb. SSR, **23** (1961).

ARUTJUNJAN, N. H. — [1] *O kručenii elliptičeskogo kolcevogo sektora.* Prikl. Mat. Meh., **11**, *5* (1947). — [2] *Rešenie zadač o kručenii steržnej poligonalnogo poperečnogo sečenija.* Prikl. Mat. Meh., **13**, *1* (1949).

ARUTJUNJAN, N. H., ABRAMJAN, B. L. — [1] *Kručenie uprugih tel.* Fizmatghiz, Moscova, 1963. — [2] *O vdavlivanii žestkogo štampa v upruguju sferu.* Prikl. Mat. Meh., **28**, *6* (1964).

AVAZAŠVILI, D. Z. — [1] *O primenenii teorii funkcij kompleksnogo peremennogo k zadačam kručenija i izgiba.* Prikl. Mat. Meh., **4**, *1* (1940).

AZIMOV, B. A., AMENZADE, I. A., BORISOV, E. M., BELKINA, G. L., KUTUZOV, A. I. — [1] *Rešenie zadač izgiba prizmatičeskih steržnej na električeskoj modeli.* Dokl. AN Azerb. SSR, **11**, *3* (1955).

BABIČ, I. I., KAMINSKI, A. A. — [1] *O kritičeskih nagruzkah, vyzyvajuščih razvitie treščiny vozle elliptičeskogo otverstija.* Prikladnaja Mehanika, *9* (1965).

BABUŠKA, I. — [1] *Sur l'algorithme de Schwarz dans la théorie des équations différentielles de la physique mathématique.* Tchekoslov. Mat. Journ., **8**, 1958. — [2] *Die Abhängigkeit der Lösung der Elastizitätsprobleme von kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes,* ZAMM. **39**, *9—11* (1959).

BABUŠKA, I., KAUTSKI, J. — [1] *Ein Beitrag zur Theorie der Kerbspannungen.* ZAMM, **41**, *10—11* (1961).

BABUŠKA, I., PRAGER, M. — [1] *Reissnerian algorithms in the theory of elasticity.* Bull. Acad. Pol. Sci., **8**, *8* (1960).

BABUŠKA, I., REKTORYS, K., VYČICHLO, F. — [1] *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme.* Berlin, Akademie-Verlag, 1960.

BALDACCI, R. F. — [1] *Sulla integrazione diretta del problema di Saint-Venant in termini di tensioni.* Atti Torino, **90**, 1955—56. — [2] *Soluzione generale diretta del problema di Saint-Venant.* Genio Civile, **95**, *10* (1957).

BARENBLATT, G. I. — [1] *Ob osnovnyh predstavlenijah teorii ravnovesnyh treščin, obrazuiuščihsja pri hrupkom razrušenii.* Sb. „Problemy mehaniki splošnoi sredy”, Akademkniga, Moscova, 1961. — [2] *The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture.* Advances in appl. mech., vol. 7, Academic Press, N. York, 1962. — [3] *O nekotoryh obščih predstavlenijah matematičeskoj teorii hrupkogo razrušenija.* Prikl. Mat. Meh., **28**, *4* (1964).

BARI, N. K. — [1] *Rjady Furie (Fourier).* Fizmatgiz, Moscova, 1961.

BARTELS, R. — [1] *Torsion of hollow cylinders.* Trans. Amer. Math. Soc., **53**, *1* (1943).

BARTHA, J. — [1] *On the estimation of torsional rigidity.* Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., (B), **58**, *1* (1955). — [2] *Sur l'estimation de la rigidité de torsion des prismes multicellulaires à parois minces.* Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., **12**, *3—4* (1955). — [3] *Inequality relation between torsional and flexural rigidity.* Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., **14**, *3—4* (1956).

BASSALI, W. A. — [1] *The torsion of elastic cylinders with regular curvilinear cross-sections.* J. Math. Phys., **38**, *4* (1960) — [2] *The classical torsion problem for sections with curvilinear boundaries.* J. Mech. Phys. Solids, **8**, 1960.

BATYREV, A. V. — [1] *Kručenie cilindričeskih steržnej.* Uč. zap. Rostov. Univ., **18**, *3* (1953).

BEATTY, M. F. — [1] *Some static and dynamic implications of the general theory of elastic stability.* Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, *3* (1965).

BEJU, I. — [1] *Asupra ecuațiilor teoriei elasticității în coordonate oarecare.* St. Cerc. Mat., **20**, *4*, (1968).

BELENKIJ, M. I. — [1] *Nekotorye osesimmetričnye zadači teorii uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **24**, *3* (1960).

BELJAEV, N. M. — [1] *Laboratornye raboty po soprotivleniju materialov.* Gostehizdat, Moscova 1951. — [2] *Soprotivlenie materialov.* Gostehizdat, Moscova, 1954. — [3] *Trudy po teorii uprugosti i plastičnosti.* Gostehizdat, Moscova, 1957.

BELJAKOV, V. M., KRAVCOVA, R. I., RAPPAPORT, M. G. — [1] *Tablicy elliptičeskih integralov.* Akademkniga, Moscova, 1962.

BELONOSOV, S. M. — [1] *Primenenie integralnyh uravnenij v zadače o kručenii valov peremennogo diametra.* Prikl. Mat. Meh., **24**, *6* (1960). — [2] *Osnovnye ploskie statičeskie zadači teorii uprugosti dlja odnosvjaznyh i dvusvjaznyh oblastej.* Izd. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1962. — [3] *Matematičeskie problemy v teorii uprugosti dlja oblastej s uglami.* Trudy 2 s'ezda po mehanike, vol. 3, Izd-vo Nauka, Moscova, 1966.

BELOV, K. P. — [1] *Uprugie, teplovye i električeskie javlenija v ferromagnitah.* Gostehizdat, Moscova, 1957.

BELTRAMI, E. — [1] *Osservazioni sulla Nota precedente* (del socio Morera). Rendiconti dei Lincei (5), **1**, *1* (1892).

BERGER, E. R. — [1] *Obere und untere Schranken für den Drillwiderstand.* Z.A.M.M., **34**, *8—9* (1954).

BERGMAN, S. — [1] *Integral operators in the theory of linear differential equations.* Springer, Berlin, 1961.

BERMAN, M. E. — [1] *K voprosu o centre izgiba.* Dokl. AN SSSR, **72**, *1* (1950).

BERNOULLI, J. — [1] *Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps, qui font ressort.* Œuvres, vol. 2, Geneva, 1744.

BERNSTEIN, B. — [1] *Hypo-elasticity and elasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., **6**, *2* (1960).

BETTI, E. — [1] *Teoria della elasticità.* Il nuovo Cimento, (2), **7—10** (1872—3) — [2] *Sopra l'equazioni di equilibrio dei corpi solidi elastici.* Annali Mat. pura ed appl., (2), **6**, 1873—5.

BIEZENO, C. B., GRAMMEL, R. — [1] *Technische Dynamik.* Springer, Berlin, 1953.

BILBY, B. A. — [1] *Continuous distributions of dislocations.* Progress in solid mechanics, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.

BIOT, M. A. — [1] *General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material.* J. Appl. Mech., **23**, *1* (1956). — [2] *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics.* J. Appl. Phys., **27**, *3* (1956). — [3] *Linear thermodynamics and the mechanics of solids,* Proc. IIIrd. U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958 — [4] *Mechanics of incremental deformations.* J. Wiley, New York, 1965.

BIRKHOFF, G., YOUNG, D. M., ZARANTONELLO, E. H. — [1] *Numerical methods in conformal mapping.* Proc. Symp. Appl. Math., **4** (1953).

BIRMAN, S. E. — [1] *O stesnjonnom kručenii tonkostennyh steržnej zamknutogo prjamougolnogo profilja s poperečnymi diafragmami.* Izv. OTN, Meh. Maš., *1* (1961).

BISPLINGHOFF, R. L. — [1] *Aeroelasticity.* Appl. Mech. Rev., **11**, *3* (1958).

BLAGOVEŠČENSKIJ, I. V., FILČAKOV, P. F. — [1] *Rozv'iazannaia ploskih zadač kručenia ta zghinu za dopomogoiu metodu electroghidrodinamičnyh analoghij.* Prikl. Meh., **1**, *2* (1955).

BLOH, V. I. — [1] *O predstavlenii obščego rešenija osnovnyh uravnenij statičeskoj zadači teorii uprugosti izotropnogo tela pri pomošči garmoničeskih funkcij.* Prikl. Mat. Meh. **22**, *4* (1958) — [2] *Teoria uprugosti.* Izd-vo Univ. Harkov, 1964.

BOGGIO, T. — [1] *Nuova risoluzione di un problema fondamentale della teoria dell'elasticità.* Rendiconti dei Lincei, (5), **16** (1907).

BOŽENKO, A. S. — [1] *Opredelenie mestopoloženija centra izgiba profilej, sostavlennyh iz prjamougolnyh oblastei.* Sb. naučn. trudov Taškent. In-ta inž. jel-dor. transp., *4* (1954). — [2] *Kručenie steržnei poligonalnogo sečenija.* Sb. Leningr. In-ta inž. žel.-dor. transp., **164** (1959).

BOLEY, B. A. — [1] *A method for the construction of fundamental solutions in elasticity theory.* J. Math. Phys., **36**, *3* (1957). — [2] *Some observations on Saint-Venant's principle.* Proc. IIIrd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958. — [3] *On a dynamical Saint-Venant's principle.* J. Appl. Mech., **27**, *1* (1960).

BOLEY, B. A., WEINER, J. H. — [1] *Theory of thermal stresses.* J. Wiley, New York, 1960.

BOLLE, L. — [1] *Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique*. Bull. Techn. Suisse Romande, **73** (1947).

BOLOTIN, V. V. — [1] *Dinamičeskaia ustoičivost uprugih sistem*. Gostehizdat, Moscova, 1956. — [2] *Mehanika tverdogo tela i teoria nadežnosti*. Trudy 2 s'ezda po mehanike, vol. 3, Izd-vo Nauka, Moscova, 1966.

BONDAR, V. D. — [1] *O tenzornyh harakteristikah konečnyh deformacij splošnoi sredy*. Prikl. Mat. Meh., **25**, *3* (1961).

BONDARENKO, B. A. — [1] *Približennye rešenija pervoj i vtoroj osnovnyh zadač teorii uprugosti dlja parallelepipeda*. Trudy In-ta matematiki AN Uzb. SSR, **23** (1961). — [2] *O približennom rešenii trehmernyh zadač statiki teorii uprugosti*. Trudy In-ta matematiki AN Uzb. SSR, **26** (1962).

BONDARENKO, P. S. — [1] *Vyčislitelnye algorifmy približennogo rešenija operatornyh uravnenij*. Dokl. AN SSSR, **154**, *4* (1964).

BORN, M., HUANG, K. — [1] *Dynamical theory of crystal lattices*. Oxford, 1954.

BORODAČEV, N. M. — [1] *O rešenii dinamičeskoj kontaktnoj zadači dlja poluprostranstva v slučae osevoj simmetrii*. Izv. OTN, Meh. Maš., *4* (1960). — [2] *Dinamičeskaja kontaktnaja zadača dlja štampa s ploskim krugovym osnovaniem, lejaščego na uprugom poluprostranstve*. Izv. OTN, Meh. Maš., *2* (1964). — [3] *Ob opredelenii osadok žestkih plit i massivov*. Osnovanija, fundamenty i mehanika gruntov, *4* (1964). — [4] *Opredelenie dinamičeskih naprjaženij voznikajuščih v uprugom poluprostranstve pod štampom s ploskim kruvogim osnovaniem*. Izv. OTN, Meh. Maš., *4* (1965).

BOULIGAND, G. — [1] *La mécanique théorique des corps flexibles (1638—1788) et les premières tentatives de «spéculations fonctionnelles» au XVIII-ième siècle*. Rev. histoire sci., **17**, *1* (1964).

BOUSSINESQ, J. V. — [1] *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres*. J. Math. Pures et appl., (2), **16** (1871). — [2] *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, avec des notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse*. Gauthier-Villars, Paris, 1885.

BRAMBLE, J. H. — [1] *A sphere theorem for the equations of elasticity*. Z.A.M.P., **12** (1961).

BRAMBLE, J. H., PAYNE, L. E. — [1] *On some new continuation formulas and uniqueness theorems in the theory of elasticity*. J. Math. Anal. and Applic., **3** (1961). — [2] *On the uniqueness problem in the second boundary-value problem in elasticity*. Proc. IV U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1962. — [3] *Some uniqueness theorems in the theory of elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **9**, *4* (1962). — [4] *Some inequalities for vector functions with application in elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, *1* (1962). — [5] *Effect of error in measurement of elastic constants on the solutions of problems in classical elasticity*. Journ. Research, Nat. Bur. Stand., 67 B, *3* (1963). — [6] *Some mean value theorems in elastostatics*. J. Soc. Industr. and Appl. Math., **12**, *1* (1964).

BREDT, R. — [1] *Kritische Bemerkungen über Drehungselastizität*. Zeitschrift des VDI, **40** (1896).

BREWSTER, D. — [1] *On the communication of the structure of doubly refracting crystals of glass, muriate of soda, flour spat and other substances by mechanical compression and dilatation*. Phil. Trans. Roy. Soc., London, **106**, 1816.

BRILLA, J. — [1] *Anizotropicke steny*. SAV, Bratislava, 1958. — [2] *Contact problems of an elastic anisotropic half-plane*. Rev. Roum. Méc. Appl., **7**. *3* (1962).

BRILLOUIN, L. — [1] *La structure des corps solides dans la physique moderne*. Hermann, Paris, 1937. — [2] *Influence de la température sur l'élasticité*. Mém. Sci. Math., fasc. 99, Gauthier-Villars, Paris, 1940. — [3] *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*. Masson, Paris, 1960.

BUCHWALD, V. T. — [1] *A note on a method of Milne-Thomson*. J. Austral. Math. Soc., **3**, *1* (1963). — [2] *Plane elastostatic boundary-value problems* (I—III). Mathematica, **10** (1963).

BUCHWALD, V. T., DAVIES, G. O. — [1] *Plane elastostatic boundary value problems of doubly connected regions*. The Quart. J. Mech. Appl. Math., **17**, *1* (1964).

BULLEN, K. E. — [1] *Seismic wave transmission*. Handbuch d. Physik, (2), **47**, Springer, Berlin, 1956.

BURMISTROV, E. F. — [1] *O koncentracii naprjaženij okolo ovalnyh otverstij nekotorogo vida*. Inž. sb., **17** (1953).

BUZDUGAN, GH. — [1] *Rezistența materialelor*. Ed. Didactică și Pedagogică, 1964.

CADY, W. G. — [1] *Piezoelectricity*. McGraw-Hill, New York, 1946.

CAPILDEO, R. — [1] *Flexure with shear centre. A general treatment with complex variables*. Proc. Cambridge Phil. Soc., **49**, *2* (1953).

CARATHEODORY, C. — [1] *Funktionentheorie*. Birkhäuser, Basel, 1960.

CARLSON, D. E., SHIELD, R. T. — [1] *Second and higher-order effects in a class of problems in plane finite elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, *3* (1965).

CARLSAW, H. S., JAEGER, J. C. — [1] *Operational methods in applied mathematics*. Oxford, 1948.

CATTANEO, C. — [1] *Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto*. Ann. di Pisa (3), **6**, *1—2* (1952). — [2] *Compressione e torsione nel contatto tra corpi elastici di forma qualunque*. Ann. di Pisa, (3), **9**, *1—2* (1955).

CAUCHY, A. L. — [1] *De la pression ou tension dans un corps solide*. Œuvres, (2), **7**, (1823).— [2] *Sur la condensation et la dilatation des corps solides*. Œuvres, (2), **7**, 1823. — [3] *Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices*. Œuvres, (2), **7**, 1823.—[4] *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique*. Œuvres, (2), **8**, 1828. — [5] *Sur la relation qui existe entre les pressions ou tensions supportées par deux plans quelconques en un point donné d'un corps solide*. Œuvres, (2), **9**, 1829. — [6] *Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps, considérés comme des masses continues*. Œuvres, (2) **9**, 1829.—[7] *Mémoire sur la torsion et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire*. Œuvres, (1), **2**, 1830.

ČEMERIS, V. S. —[1] *Primenenie obobščennogo integrala tipa Cauchy dlja p-analitičeskih funkcij v osesimmetričnoj teorii uprugosti*. 2 Vses. sjezd po mehanike, Annot. dokladov, Moscova, 1964.

ČEREPANOV, G.P. — [1] *Ob odnom klasse zadač ploskoj teorii uprugosti*. Izv. OTN, Meh. Maš., 4 (1962). —[2] *Rešenie odnoj linejnoj kraevoj zadači Riemann'a dlja dvuh funkcij i ee priloženie k nekotorym smešannym zadačam ploskoj teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., **26**, *5* (1962).—[3] *K rešeniju nekotoryh zadač teorii uprugosti i plastičnosti s neizvestnoj granicej*. Prikl. Mat. Meh., **28**, *1* (1964).

CERRUTI, V. — [1] *Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi*. Rendiconti dei Lincei (3), **13**, (1882). — [2] *Sulla diformazione di un corpo elastico isotropo per alcune speciali condizioni ai limiti*. Rendiconti dei Lincei, (4), **4**, *1* (1888).

CESARO, E. — [1] *Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche*. Il nuovo Cimento, (5), **12** (1906).

CHADWICK, P. — [1] *Thermoelasticity. The dynamical theory*. Progress in solid mechanics, Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.

CHI TEH WANG — [1] *Applied elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1953.

CHIEN WEI ZANG, HU HAI CHIAN, LIN HUN SUN, YEN CHAI YUAN — [1] *Teoria torsiunii corpurilor elastice cilindrice* (în lb. chineză). Pekin, 1956.

CHIN BING LING — [1] *On torsion of prisms with longitudinal holes*. Quart. Appl. Math., **9**, *3* (1951).

CHREE, CH. — [1] *Longitudinal vibrations of a circular bar*. The Quart. Journ. pure appl. Math., **21** (1886). — [2] *A new solution of the equations of an isotropic elastic solid and its applications to the theory of beams*. The Quart. Journ. pure appl. Math., **22** (1887) — [3] *On longitudinal vibrations*. The Quart. Journ. pure appl. Math., **23** (1889).

ČAPLYGIN, S. A.—[1] *Sočinenija*, vol. 3, Akademkniga, Moscova, 1950.

ČARNIK, K. E. — [1] *Konformnoe preobrazovanie oblastej, sostavlennyh iz prjamougolnikov, na ediničnyj krug*. Trudy Mat. Inst. im. V. A. Steklova, **53**, Akademkniga, 1959.

ČUDAEV, I. F. — [1] *Približennyj metod issledovanija kručenija prizmatičeskih steržnej*. Issled. po teorii sooruženij, **6** (1954), — [2] *Vlijanie lysok na pročnost i žestkost kruglogo steržnja pri kručenii*. Trudy Sib. Metallurg. In-ta, *4*/A (1957).

ČURIKOV, F. S. — [1] *Ob odnoj forme obščego rešenija uravnenij ravnovesija teorii uprugosti v peremeščenijah*. Prikl. Mat. Meh., **17**, *6* (1953).

CLEBSCH, A. — [1] *Über die Reflexion an einer Kugelfläche*. Journ. reine u. angew. Math., **61**, (1863).

CLEBSCH, A., SAINT-VENANT, B. de — [1] *Théorie de l'élasticité des corps solides, avec des notes étendues de B. de Saint-Venant et Flamant*. Dunod, Paris, 1883.

COKER, E. G., FILON, L. N. G. — [1] *A treatise on photo-elasticity*. Cambridge, 1931.

COLEMAN, B. D. — [1] *Mechanical and thermodynamical admissibility of stress-strain functions.* Arch. Rat. Mech. Anal. **9**, *2* (1962). — [2] *On thermodynamics, strain impulses, and viscoelasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, *3* (1964).

COLEMAN, B. D., NOLL, W. — [1] *On the thermostatics of continuous media.* Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, *2* (1959). — [2] *Material symmetry and thermostatic inequalities in finite elastic deformations.* Arch. Rat. Mech. Anal., **15**, *2* (1964).

COLOMBO, G. — [1] *Magiorazzioni delle componenti di stress nel problema di de Saint-Venant.* Rend. Padova, **24** (1955).

COSSERAT, E., COSSERAT, F. — [1] *Sur la théorie de l'élasticité.* Ann. de Toulouse, **10** (1896). — [2] *Sur les fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité.* C. R. Ac. Sci., **126** (1898). — [3] *Sur une application des fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité.* C. R. Ac. Sci., **133** (1901). — [4] *Théorie des corps déformables.* Gauthier-Villars, Paris, 1909.

COULOMB, C. A. — [1] *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal.* Mémoires de l'Académie des Sciences, 1784.

COURANT, R. — [1] *Partial differential equations.* J. Wiley, New York, 1962.

COURANT, R., HILBERT, D. — [1] *Methoden der Mathematischen Physik.* Springer, Berlin, 1937.

COURANT, R., SCHIFFER, M. (Appendix) — [1] *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces.* Appendix : Recent developments in conformal mapping. Interscience Publishers, New York, 1950.

CRAGGS, J. W. — [1] *Plastic waves.* Progress in solid mechanics. Vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.

CRISTESCU, N. — [1] *Dynamic plasticity.* North Holland, Amsterdam, 1967.

CRISTESCU, R., MARINESCU, GH. — [1] *Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1966.

CSONKA, P. — [1] *Méthode de calcul numérique des contraintes causées par la torsion.* Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., **18**, *3—4* (1957).

DEAN, W. R., PARSONS, H. W., SNEDDON, I. N. — [1] *A type of stress distribution on the surface of a semi-infinite elastic solid.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **40**, *1* (1944).

DEEV, V. M. — [1] *O formah obščego rešenija prostranstvennoj zadači teorii uprugosti, vyražennyh pri pomošči garmoničeskih funkcij.* Prikl. Mat. Meh., **23**, *6* (1959).

DERESIEWICZ, H. — [1] *Contact of elastic spheres under an oscillating torsional couple.* J. Appl. Mech., **21**, *1* (1954). — [2] *Oblique contact of non-spherical elastic bodies.* J. Appl. Mech., **24**, *4* (1957). — [3] *Mechanics of granular matter.* Advances in applied mechanics. Vol. 5, Academic Press, New York, 1958. — [4] *A review of some recent studies of the mechanical behaviour of granular media.* Appl. Mech. Rev., **11**, *6* (1958). — [5] *The half-space under pressure distributed over an elliptical portion of its plane boundary.* J. Appl. Mech., **27** *1* (1960). — [6] *A note on second-order Hertz contact.* J. Appl. Mech., **28**, *1* (1961).

DEUTSCH, E. — [1] *Asupra torsiunii barelor prismatice cu secţiune dublu conexă.* St. Cerc. Mat., **12**, *1* (1961). — [2] *On the centre of flexure.* Z.A.M.P., **12**, *3* (1961). — [3] *Torsiunea barelor prismatice cu secţiune transversală în formă de cruce cu braţele opuse egale.* St. Cerc. Mec. Apl., **13**, *2* (1962). — [4] *On the flexure problem* (I—II). The Quart. J .Mech. Appl. Math., **15**, *3* (1962) — [5] *Torsion of beams of L-cross-sections.* Proc. Glasgow Math. Assoc., **5**, *4* (1962). — [6] *Flexure of hollow cylinders.* Arch. Mech. Stos., **14**, 6 (1962). — [7] *Asupra problemei lui Boussinesq.* Comunicările Acad. RPR, **12**, *10* (1962). — [8] *Asupra torsiunii semispaţiului elastic.* St. Cerc. Mec. Apl., **14**, *1* (1963).

DEVERALL, L. I. — [1] *Solution of some problems in bending of thin clamped plates by means of the method of Muskhelishvili.* J. Appl. Mech., **24**, *2* (1957).

DIAZ, J. B. — [1] *Estimation of torsional rigidity and other physical quantities.* J. Appl. Mech., **18**, *3* (1951).

DIAZ, J. B., GREENBERG, H. J. — [1] *Upper and lower bounds for the solution of the first boundary value problem of elasticity.* Quart. Appl. Math., **6**, *4* (1949).

DIAZ, J. B., PAYNE, L. E., — [1] *Mean value theorems in the theory of elasticity.* Proc. IIIrd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958.

DINCĂ, F. — [1] *Consideraţii asupra torsiunii unor bare cilindrice.* St. Cerc. Mec. Apl., **6**, *3—4* (1955).

DINCĂ, F., BOICU, N. — [1] *Asupra torsiunii barelor cilindrice de secţiune dublu conexă.* St. Cerc. Mec. Apl., **9**, *3* (1958).

DINCĂ, G. — [1] *Sur la déformation plane du corps plastique. (Utilisation des variables complexes.)* Rev. Roum. Math. pures appl., **10**, *5* (1965).

DINNIK, A. N. — [1] *Izbrannye trudy*. Izd. AN USSR, Kiev, 1952. — [2] *Prodolnyj izgib. Kručenie*. Akademkniga, Moscova, 1955.

DŽANELIDZE, G. I. — [1] *Obzor rabot po teorii izghiba tolstyh i tonkih plit, opublikovannyh v SSSR*. Prikl. Mat. Meh., **12**, *1* (1948). — [2] *K teorii tonkih i tonkostennyh steržnej*. Prikl. Mat. Meh., **13**, *6* (1949). — [3] *Princip Saint-Venant'a (k stoletiju principa)*. Trudy Leningr. Politehn. In-ta, *192* (1958) — [4] *Zadača Almansi*. Trudy Leningr. Politehn. In-ta, *210* (1960). — [5] *Zadači teorii uprugosti anizotropnoj sredy, privodiaščiesja k ploskim*. Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy", Akademkniga, Moscova, 1961.

DLUGAČ, M. I. — [1] *Metod setok v smešannoj ploskoj zadače teorii uprugosti*. Izd. Naukova Dumka, Kiev, 1964.

DOBROVOLSKIJ, I. P., KOPYTOV, V. D. — [1] *Opredelenie kontaktnyh davlenij metodom fotouprugosti*. Izv. OTN, Meh. Maš., *4* (1960). — [2] *Opredelenie kontaktnyh davlenij na objemnyh modeljah*. Inž. Žurnal, *4* (1961).

DOBROVOLSKIJ, V. L. — [1] *Zadača o ploskoj deformacii idealno plastičeskogo tela v kompleksnyh peremennyh*. Prikl. Mat. Meh., **24**, *2* (1960).

DOLAN, T. J., MURRAY, W. M., DRUCKER, D. C. — [1] *Photoelasticity*. Handbook exper. stress analysis. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950.

DONNEL, L. H. — [1] *About Saint-Venant's principle*. J. Appl. Mech., **29**, *4* (1962).

DOVNOROVIČ, V. I. — [1] *Prostranstvennye kontaktnye zadači teorii uprugosti*. Izd. Univ. Minsk, 1959.

DOYLE, J. M. — [1] *On completeness of stress functions in elasticity*. J. Appl. Mech., **31**, *4* (1964),

DOYLE, T. C., ERICKSEN, J. L. — [1] *Nonlinear elasticity*. Advances in applied mechanics, vol. 4., Academic Press, New York, 1956.

DRĂGANU, M. — [1] *Introducere matematică în fizica teoretică*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.

DRUCKER, D. C. — [1] *On the role of experiment in the development of theory*. Proc. IVth U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, New York, 1962.

DUFFIN, R. J., NOLL, W. — [1] *On exterior boundary value problems in linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **2**, *2* (1958).

DURELLI, A. J., DANIEL, I. M. — [1] *A non-destructive three-dimensional strain-analysis method*. J. Appl. Mech., **28**, *1* (1961).

DURELLI, A. J., PHILIPPS, E. A., TASO, C. H. — [1] *Introduction to the theoretical and experimental analysis of stress and strain*. McGraw-Hill, New York, 1958.

DUVAL, F. — [1] *Shock waves in the study of solids*. Appl. Mech. Rev., **15**, *11* (1962).

DWIGHT, H. B. — [1] *Tables of integrals*. New York, 1941.

DYSON, A. — [1] *Approximate calculation of Hertzian compressive stresses and contact dimensions*. Journ. Mech. Engng. Sci., **7**, *2* (1965).

EDAMOTO, I. — [1] *An electrical method for solving the torsion problem of a cylindrical body*. Proc. Ist Japan. Nat. Congr. Appl. Mech., 1951.

EDELSTEIN, W., GURTIN, M. — [1] *Uniqueness theorems in the linear dynamic theory of anisotropic viscoelastic solids*. Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, *2* (1964). — [2] *A generalization of the Lamé and Somigliana stress functions for the dynamic linear theory of viscoelastic solids*. Internat. Journ. Engng. Sci., **3**, *1* (1965).

EGOROV, K. E. — [1] *Vdavlivanie v poluprostranstvo štampa s ploskoj podošvoj kolcevoj formy*. Izv. OTN, Meh. Maš., *5* (1963).

EIDUS, D. M. — [1] *O smešannoj zadače teorii uprugosti*. Dokl. AN SSSR, **76**, *2* (1951). — [2] *Kontaktnaja zadača teorii uprugosti*. Matem. Sbornik, **34**, *3* (1954).

EIRICH, F. R. (red.) — [1] *Rheology*. Academic Press, New York, 1956—1960.

EISLEY, J. T. — [1] *Nonlinear deformations of elastic beams, rings and strings*. Appl. Mech. Rev., **16**, *9* (1963).

ENGLAND, A. H., GREEN, A. E. — [1] *Some two-dimensional punch and crack problems in classical elasticity*. Proc. Cambridge Phil. Soc., **59**, *2* (1963).

ENTOV, V. M., SALGANIK, R. L. — [1] *O baločnom približenii v teorii treščin*. Mehanika, *5* (1965).

ERDELYI, A. — [1] *From delta functions to distributions*. În : „Modern Mathematics for the Engineers", red. de E. BECKENBACH, seria 2, McGraw-Hill, New York, 1961.

ERICKSEN, J. L. — [1] *Tensor fields*, Handbuch d. Physik, (2), **3**, partea 1, Springer, Berlin, 1960. — [2] *Non-existence theorems in linear elasticity theory*. Arch. Rat. Mech. Anal., **14**, *3* (1963). — [3] *Non-uniqueness and non-existence in linearized elasticity theory*. Contributions to diff. equations, **3** (1964).

ERICKSEN, J. L., TRUESDELL, C. A. — [1] *Exact theory of stress and strain in rods and shells*. Arch. Rat. Mech. Anal., **1**, *4* (1958).

ERINGEN, A. C. — [1] *Non-linear theory of continuous media*, McGraw-Hill, New York, 1962.

ERŞOV, L. V., IVLEV, D. D. — [1] *Ob ustoičivosti polosy pri sžatii*. Dokl. AN SSSR, **138**, *5* (1961).

ESHELBY, J. D. — [1] *Elastic inclusions and inhomogeneities*. Progress in solid mechanics. Vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.

EUBANKS, R. A., STERNBERG, E. — [1] *On the completeness of the Boussinesq-Papkovitch stress functions*. J. Rat. Mech. Anal., **5**, *5* (1956).

EWING, M., PRESS, F. — [1] *Surface waves and guided waves*. Handbuch d. Physik, (2), **47**, Springer, Berlin, 1956.

FALK, G. — [1] *Axiomatik der Thermodynamik*. Handbuch d. Physik, (2), **3**, partea 2, Springer, Berlin, 1959.

FATOU, P. — [1] *Séries trigonométriques et séries de Taylor*. Acta Mathematica, **30**, 1906.

FICHERA, G. — [1] *Sull'essistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*. Ann. di Pisa (3), **4**, 1950. — [2] *Condizioni perche sia compatibile il problema principale della statica elastica*. Rend. Lincei, **14**, *3* (1953). — [3] *Sulla torsione elastica dei prismi cavi*. Rend. di matematica e delle sue applicazioni, (5), **12**, *1—2* (1953). — [4] *Il teorema del massimo modulo per l'equazione dell'elastostatica tridimensionale*. Arch. Rat. Mech. Anal., **7**, *5* (1961).

FIELD, F. A. — [1] *A comment on the uniqueness of the solution to Boussinesq's problem*. J. Appl. Mech., **31**, *3* (1964).

FILON, L. N. G. — [1] *On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any sistem of load with special reference to points of concentrated or discontinuous loading*. Phil. Trans. London, (A), **201** (1903).

FILONENKO, G. G. — [1] *Pro ruh kolesa, ščo kotitsia po prujnij reiti*. Prikladna Mehanika, **4**, *2* (1958).

FILONENKO-BORODIČ, M. M. — [1] *Teoria uprugosti*. Gostehizdat, Moscova, 1947 — [2] *Nekotorye obobščenija zadači Lamé dlja uprugogo parallelepipeda*. Prikl. Mat. Meh., **17**, *4*, (1953). — [3] *Mehaničeskie teorii pročnosti*. Izd. MGU, Moscova, 1961.

FILONENKO-BORODIČ, M. M., IZJUMOV, S. M., OLISOV, B. A., KUDRJAVCEV, I. N., MALGINOV, L. I. — [1] *Kurs soprotivlenija materialov*. Gostehizdat, Moscova, 1955.

FILČAKOV, P. F. — [1] *Približennye metody konformnyh otobraženij*. Izd. AN USSR, Kiev, 1964.

FINZI, B. — [1] *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui* (I, II). Rend. Lincei, (6), **19** (1934).

FÖPPL, A., FÖPPL, L. — [1] *Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure*. Oldenburg, Berlin-München, 1924—1928.

FREDHOLM, I. — [1] *Sur les équations d'équilibre d'un corps solide élastique*. Acta Mathematica, **23**, *1* (1900). — [2] *Sur une classe d'équations fonctionnelles*. Acta Mathematica, **27**, 1903. — [3] *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité*. Archiv för Mathematik, Astronomi och Fysik, **2**, *28* (1906).

FREUDENTAHL, A. — [1] *Fatigue*. Handbuch d. Physik, (2), **6**, Springer, Berlin, 1958.

FREUDENTHAL, A., GEIRINGER, H. — [1] *The mathematical theories of the inelastic continuum*. Handbuch d. Physik, (2), **6**, Springer, Berlin, 1958.

FREUDENTHAL, A., GUMBEL, J. — [1] *Physical and statistical aspects of fatigue*. Advances in applied mechanics, vol. 4, Academic Press, New York, 1956.

FRIDMANN, M. M. — [1] *Obzor matematičeskoj teorii uprugosti anizotropnyh sred*. Prikl. Mat. Meh., **14**, *3* (1950).

FRIEDEL, J. — [1] *Les dislocations*. Gauthier-Villars, Paris, 1956. (trad. engleză revizuită : Pergamon Press, 1964).

FRIEDRICHS, K. O. — [1] *On the boundary-value problem of the theory of elasticity and Korn's inequality*. Annals of Math., **48**, *2* (1947). — [2] *Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates*. Proc. Symp. Appl. Math., **3**, 1950.

FRIEDRICHS, K. O., DRESSLER, D. F. — [1] *A boundary layer theory for elastic bending of plates.* Communications on pure and appl. Math., **14**, *1* (1961).
FROCHT, M. M. — [1] *Photoelasticity.* J. Wiley, New York, 1941—1948.
FROCHT, M. M., FLYNN, P. D. — [1] *Studies in dynamic photoelasticity.* J. Appl. Mech., **23**, *1* (1956).
FROCHT, M. M., GUERNSEY, R. — [1] *Further work on the general three-dimensional photoelastic problem.* J. Appl. Mech., **22**, *2* (1955).
FROCHT, M. M., SRINATH, L.S. — [1] *A non-destructive method for three-dimensional photoelasticity.* Proc. IIIrd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958.
FROSTMAN, O. — [1] *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles.* Thèse. Lund, 1935.
FUKA, J. — [1] *Das zweite Problem der ebenen Elastizitätstheorie für inkompressible Körper.* Aplikace Matematiky, **7** (1962).
GAHOV, F. D. — [1] *Kraevye zadači.* Gostehizdat, Moscova, 1958.
GAIER D. — [1] *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung.* Springer, Berlin, 1964.
GALERKIN, B. G. — [1] *Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions.* C.R. Ac. Sci., **190**, 1930. — [2] *Sobranie Socinenii.* Akademkniga, Moscova, 1952.
GALILEI, G. — [1] *Discorsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica et i movimenti locali.* Leyda, 1638.
GALIN, L. A. — [1] *O gipoteze Cimmermana-Vinklera dlja balok.* Prikl. Mat. Meh., **7**, *4* (1943). — [2] *O davlenii štampa elliptičeskoj formy v plane na uprugoe poluprostranstvo.* Prikl. Mat. Meh., **11**, *2* (1947). — [3] *Ocenka peremeščenij v prostranstvennyh kontaktnyh zadačah teorii uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **12**, *3* (1948).—[4] *Kontaktnye zadači teorii uprugosti.* Gostehizdat, Moscova, 1953.
GATTEGNO, C., OSTROWSKI, A. — [1] *Représentation conforme à la frontière.* Mémorial Sci. Math., fasc. 109, 110, Gauthier-Villars, Paris, 1949.
GAZIS, D. C. — [1] *Graphical investigation of geometric aspects of the Hertz problem.* J. Appl. Mech., **27**, *4* (1960).
GECKELER, J. W. — [1] *Elastostatik.* Handbuch d. Physik, (1), **6**, Springer, Berlin.
GELFAND, I. M., ŠILOV, G. E. — [1] *Obobščennye funkcii.* Fizmatgiz, Moscova, 1958.
GEONDŽIAN, G. P. — [1] *K teorii stesnennogo kručenija splošnyh prizmatičeskih steržnej.* Izv. AN Arm. SSR, **12**, *5* (1959).
GERMAIN, P. — [1] *Mécanique des milieux continus.* Masson, Paris, 1962.
GIBBS, J. V. — [1] *On the equilibrium of heterogeneous substances.* Trans. Connecticut Acad., **3**, 1875—1878. — [2] *Termodinamiceskie raboty.* Gostehizdat, Moscova, 1950.
GLOUMAKOFF, N. A., YI-YUAN YU — [1] *Torsion of bars with isosceles triangular and diamond sections.* J. Appl. Mech., **31**, *2* (1964).
GOGOLADZE, V. G. — [1] *Uprugie volny. Mehanika v SSSR za 30 let,* Gostehizdat, Moscova, 1950.
GOLDENBLATT, I. I. — [1] *Nekotorye voprosy mehaniki deformiruemyh sred.* Gostehizdat, Moscova, 1955.
GOLDENBLATT, I. I., KOPNOV, V. A. — [1] *Kriterii pročnosti anizotropnyh materialov.* Mehanika, *6* (1965).
GOLDENVEIZER, A. L. — [1] *Teoria uprugih tonkih oboloček.* Gostehizdat, Moscova, 1953. — [2] *O teorii izgiba plastinok Reissnera.* Izv. OTN, *4* (1958). — [3] *Postroenie približennoj teorii izgiba plastinki metodom asimptotičeskogo integrirovanija uravnenij teorii uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **26**, *4* (1962). — [4] *Razvitie teorii uprugih tonkih oboloček.* Trudy Vsesojuznogo s'ezda po teor. i prikl. meh., Akademkniga, Moscova, 1962.
GOLDENVEIZER, A. L., KOLOS, A. V. — [1] *K postroeniju dvumernyh uravnenij teorii uprugosti tonkih plastinok.* Prikl. Mat. Meh., **29**, *1* (1965).
GOLDSMITH, W. — [1] *Impact: the collision of solids.* Appl. Mech. Rev., **16**, *11* (1963).
GOLDSMITH, W., LYMAN, P. — [1] *The penetration of hard-steel spheres into plane metal surfaces.* J. Appl. Mech., **27**, *4* (1960).
GOLECKI, J. — [1] *Statics of an isotropic incompressible elastic solid.* Arch. Mech. Stos., **14**, *1* (1962).
GOLUZIN, G. M. — [1] *Geometričeskaja teoria funkcij kompleksnogo peremennogo.* Gostehizdat, Moscova, 1952.

GOODIER, J. N. — [1] *A general proof of Saint-Venant's principle.* Philos. Mag., **23** (1937). — [2] *Dimensional Analysis.* Handbook of exper. stress anal. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950. — [3] *A survey on some recent researches in the theory of elasticity.* Appl. Mech. Rev., **4**, *6* (1951). — [4] *The mathematical theory of elasticity.* J. Wiley, New York, 1958.

GOODMAN, L. E. — [1] *Contact stress analysis of normally loaded rough spheres.* J. Appl. Mech., **29**, *3* (1962).

GORBUNOV-POSADOV, M. I. — [1] *Rasčet balok i plit na uprugom poluprostranstve.* Prikl. Mat. Meh., **4**, *3* (1940). — [2] *Balki i plity na uprugom osnovanii.* Strojizdat, Moscova, 1949.

GOURSAT, E. — [1] *Sur l'équation* $\Delta\Delta u = 0$. Bull. Soc. Math. de France, **26**, 1898. — [2] *Cours d'analyse mathématique*, Vol. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1942.

GRAFFI, D. — [1] *Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni non stazionari.* Atti Accad. Sci. Bologna, (11), **10**, *2* (1963).

GRAHAM, G. A. C. — [1] *The contact problem in the linear theory of visco-elasticity.* Internat. Journ. Engng. Sci., **3**, *1* (1965).

GREEN, A. E. — [1] *The equilibrium of rods.* Arch. Rat. Mech. Anal., **3**, *5* (1959).

GREEN, A. E., ADKINS, J. E. — [1] *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics.* Oxford, 1960.

GREEN, A. E., RIVLIN, R. S. — [1] *Simple force and stress multipoles.* Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, *1* (1964). — [2] *Multipolar continuum mechanics.* Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, *2* (1964).

GREEN, A. E., ZERNA, W. — [1] *Theoretical elasticity.* Oxford, 1954.

GREEN, G. — [1] *Mathematical papers.* London, 1871.

GREEN, W. A. — [1] *Dispersion relations for elastic waves in bars.* Progress in solid mechanics, Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.

GRIGORJAN, S. S. — [1] *O nekotoryh specialnyh voprosah termodinamiki splošnyh sred.* Prikl. Mat. Meh., **24**, *4* (1960).

GRIOLI, G. — [1] *Proprietà di media ed equilibrio elastico.* Atti IV Congr. Unione Mat. Ital., **1**, 1953. — [2] *Limitazioni per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo.* Ann. Mat. pura ed appl., (4), **39**, 1955. — [3] *Mathematical theory of elastic equilibrium (recent results).* Springer, Berlin, 1962.

GRODSKIJ, G. D. — [1] *Integrirovanie obščih uravnenij ravnovesija izotropnogo uprugogo tela pri pomošči n'jutonovskih potencialov i garmoničeskih funkcij.* Izv. AN SSSR, *4* (1935).

GROOT, S. R. de — [1] *Thermodynamics of irreversible processes.* North Holland, Amsterdam, 1952.

GUBENKO, V. S. — [1] *Nekotorye kontaktnye zadači teorii uprugosti i drobnoe differencirovanie.* Prikl. Mat. Meh., **21**, *2* (1957). — [2] *Davlenie osesimmetričnogo kolcevogo štampa na uprughie sloi i uprugoe poluprostranstvo.* Izv. OTN, Meh. Maš., *3* (1960). — [3] *Davlenie serii krugovyh kolcevyh štampov na uprugoe poluprostranstvo.* Izv. OTN, Meh. Maš., *4* (1960). — [4] *Zadači o krugovom štampe, sceplennom s poluprostranstvom, i o sloe, oslablennom kolcevoj ščel'ju.* Izv. OTN, Meh. Maš., *5* (1961).

GUBENKO, V. S., MOSSAKOVSKI, V. I. — [1] *Davlenie osesimmetričnogo kolčevogo štampa na uprugoe poluprostranstvo.* Prikl. Mat. Meh., **24**, *2* (1960).

GUGGENHEIM, E. A. — [1] *Thermodynamics, classical and statistical.* Handbuch. d. Physik, (2), **3**, partea 2, Springer, Berlin, 1959.

GÜNTHER, N. M. — [1] *La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique.* Gauthier-Villars, Paris, 1934; ed. rusă Gostehizdat, Moscova, 1953.

GURTIN, M. E. — [1] *A note on the principle of minimum potential energy for linear anisotropic elastic solids.* Quart. Appl. Math., **20**, *4* (1963). — [2] *A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics.* Arch. Rat. Mech. Anal., **13**, *5* (1953). — [3] *On Helmholtz's theorem and the completeness of the Papkovitch-Neuber stress functions for infinite domains.* Arch. Rat. Mech. Anal., **9**, *3* (1962). — [4] *Variational principles for linear elastodynamics.* Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, *1* (1964). — [5] *Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials.* Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, *5* (1965).

GURTIN, M. E., STERNBERG, E. — [1] *On the first boundary-value problem of linear elastostatics.* Arch. Rat. Mech. Anal., **6**, *3* (1960). — [2] *Theorems in linear elastostatics for exterior domains.* Arch. Rat. Mech. Anal., **8**, *2* (1961). — [3] *A note on uniqueness in classical elastodynamics.* Quart. Appl. Math., **19**, *2* (1961). — [4] *On the linear theory of visco-elasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, *4* (1962).

GURTIN, M. E., TOUPIN, R. A. — [1] *A uniqueness theorem for the displacement boundary-value problem of linear elastodynamics.* Quart. Appl. Math., **23**, *1* (1965).

GUTENMAHER, L. I. — [1] *Električeskie modeli.* Akademkniga, Moscova, 1949.

HAČATURJAN, T. T. — [1] *Ob učiote vlijanija kasatelnyh naprjaženij v teorii izgiba plit.* Izv. AN Arm. SSR, **14**, *1* (1961).

HADAMARD, J. — [1] *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique.* Hermann, Paris, 1903. — [2] *La théorie des équations aux dérivées partielles.* Ed. Scientifiques, Pekin, 1964.

HAIMOVICI, M. — [1] *Curs de teoria elasticităţii.* Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti,

HAMBURGER, L., DINCĂ, F., MANEA, V. — [1] *Asupra torsiunii unor bare cilindrice.* St. Cerc. Mec. Apl., **8**, *4* (1957).

HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E. — [1] *Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series.* Duke Math. Journ., **2**, *2* (1936).

HARDY, G. H., ROGOSINSKI, W. W. — [1] *Fourier series.* Cambridge, 1956.

HASHIN, Z. — [1] *Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media.* Appl. Mech. Rev., **17**, *1* (1964).

HATA, K. — [1] *Some remarks on the three-dimensional problems concerned with the isotropic and anisotropic elastic solids.* Mech. Fac. Engng., Hokkaido Univ., **10**, *2* (1956).

HAYES, M., RIVLIN, R. S. — [1] *Surface waves in deformed elastic materials.* Arch. Rat. Mech. Anal., **8**, *5* (1961).

HELLER, S. R., BROCK, J. S., BART, R. — [1] *The stresses around a rectangular opening with rounded corners in a uniformly loaded plate.* Proc. IIIrd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958.

HERTZ, H. — [1] *Über die Berührung fester elastischer Körper.* Journal f. reine u. angew. Math., **92** (1882).

HERZIG, A. — [1] *Zur Torsion von Stäben.* Z.A.M.M., **33**, *12* (1953).

HETÉNYI, M. — [1] *Handbook of experimental stress analysis.* J. Wiley, N. Y., 1950. — [2] *Brittle models and brittle coatings.* Handb. exper. stress anal., J. Wiley, New York, 1950. — [3] *The precision of measurements.* Handb. exper. stress anal., J. Wiley, New York, 1950. — [4] *Photoelasticity and photoplasticity.* Proc. Ist Symp. Naval structural mechanics, Pergamon Press, 1960.

HETÉNYI, M., MAC-DONALD, P. H. — [1] *Contact stresses under combined pressure and twist.* J. Appl. Mech., **25**, *3* (1958).

HIGGINS, TH. J. — [1] *Remarks on a method for solving the torsion problem.* Nat. Math. Magazine, **17** (1942). — [2] *A comprehensive review of Saint-Venant's torsion problem.* Amer. Journ. Phys., **10** (1942). — [3] *The approximate mathematical methods of applied physics as exemplified by application to Saint-Venant's torsion problem.* Journ. Appl. Phys., **14** (1943). — [4] *Analogic experimental methods in stress analysis as exemplified by Saint-Venant's torsion problem.* Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, **2**, *2* (1945). — [5] *Stress analysis of shafting exemplified by Saint-Venant's torsion problem.* Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, **3**, *1* (1945). — [6] *Electroanalogic methods.* Appl. Mech. Rev., **9**, *1* şi *2* (1956); **10**, *2*, *8* şi *10* (1957); **11**, *5* (1958).

HILBERT, D. — [1] *Über das Dirichletsche Prinzip.* Math. Ann., **59** (1904).

HILL, R. — [1] *New horizons in the mechanics of solids.* Journ. Mech. Phys. Solids, **5**, *1* (1956). — [2] *On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain.* Journ. Mech. Phys. Solids, **5**, *4* (1957). — [3] *Bifurkacija i edinstvennost v nelineinoj mehanike splošnoj sredy.* Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy", Akademkniga, Moscova, 1961. — [4] *Uniqueness in general boundary-value problems for elastic or inelastic solids.* Journ. Mech. Phys. Solids, **9**, *2* (1961). — [5] *Uniqueness criteria and extremum principles in self-adjoint problems of continuum mechanics.* Journ. Mech. Phys. Solids, **10**, *3* (1962). — [6] *Discontinuity relations in mechanics of solids.* Progress in solid mechanics. Vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.

HILLIER, K. W. — [1] *The measurement of elastic dynamic properties.* Progress in solid mechanics. Vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.

HINČIN, I. IA. — [1] *Kratkij kurs matematičeskogo analiza.* Gostehizdat, Moscova, 1953.

HOBSON, E. W. — [1] *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series.* Cambridge, 1907. — [2] *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics.* Cambridge, 1931.

HODGE, P. G. Jr. — [1] *The mathematical theory of plasticity*. J. Wiley, New York, 1958.
HOLDEN, J. T. — [1] *Estimation of critical loads in elastic stability theory*. Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, *3* (1964).
HOOKE, R. — [1] *Lectures de potentia restitutiva of springs, explaining the power of springing bodies*. London, 1678.
HORWAY, G.—[1] *Some aspects of Saint-Venant's principle*. Journ. Mech. Phys. Solids, **5**, *2* (1957). — [2] *Saint Venant's principle: a biharmonic eigenvalue problem*. J. Appl. Mech., **24**, *3* (1957).
HRISTOFOROV, V. V. — [1] *Primenenie funkcij Grina k ploskim zadačam statiki teorii uprugosti*. Trudy In-ta mat. i meh. AN Uzb. SSR, **15** (1955).
HUNTER, S. C. — [1] *Viscoelastic waves*. Progress in solid mechanics. Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.
HUTH, J. H. — [1] *Torsional stress concentration in angle and square tube fillets*. J. Appl. Mech., **17**, *4* (1950).
IACOB, C. — [1] *Sur le problème plan de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe et ses applications à l'Hydrodynamique*. Journ. Math. pures et appl., (9), **18** (1939). — [2] *Asupra torsiunii barelor cilindrice*. Bul. şt. Acad. RPR, **4**, *4* (1952). — [3] *Asupra potenţialului complex al unor mişcări fluide cu singularităţi date*. Bul. şt. Acad. RPR, **9**, *2* (1957). — [4] *Observări asupra problemei lui Dirichlet modificate*. Comunicările Acad. RPR, **8**, *11* (1958). — [5] *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Gauthier-Villars şi Ed. Acad. RPR, Paris-Bucureşti, 1959. — [6] *Asupra problemei plane a lui Dirichlet pentru o clasă particulară de domenii. Aplicaţie la problema lui Saint-Venant*. Comunicările Acad. RPR, **12**, *10* (1962). — [7] *Sur la résolution du problème biharmonique fondamental pour le cercle dans quelques cas particuliers*. Rev. roum. math. pures appl., **9**, *10* (1964).
IACOVACHE, M. — [1] *Asupra relaţiilor dintre tensiuni într-un corp elastic în mişcare*. Bul. şt. Acad. RPR, **2**, *9* (1950).
ILJUŠIN, A. A. — [1] *Plastičnost'*. Izd-vo Nauka, Moscova, sub tipar.
ILJUŠIN, A. A., LENSKIJ, V. S. — [1] *Soprotivlenie materialov*. Fizmatghiz, Moscova, 1959.
IONESCU, D. GH. — [1] *La méthode des fonctions analytiques dans l'hydrodynamique des liquides visqueux*. Rev. Roum. Méc. Appl., **8**, *4* (1963).
IONESCU-CAZIMIR, V. — [1] *Problem of linear coupled thermoelasticity*. Bull. Ac. Pol. Sci., Sect. technique, **12**, *9* (1964).
IOSIPESCU, N. — [1] *Introducere în fotoelasticitate*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958—1960.
IRWIN, R. — [1] *Fracture*. Handbuch d. Physik, (2), **6**, Springer, Berlin, 1958.
IŠLINSKIJ, A. JU. — [1] *Rassmotrenie voprosov ob ustojčivosti ravnovesija uprugih tel s točki zrenija matematičeskoj teorii uprugosti*. Ukrainskij Mat. Žurnal, **6**, *2* (1954).
JAHNKE, E., EMDE, F. — [1] *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*. Dover Publications, New York, 1945.
JESSOP, H. T. — [1] *Photoelasticity*. Handbuch d. Physik, (2), **6**, Springer, Berlin, 1958.
JOUGUET, E. — [1] *Note sur la théorie de l'élasticité*. Ann. Fac. Sci. Toulouse, **12** (1920).
JULIA, G. — [1] *Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes*. Gauthier-Villars, Paris, 1931. — [2] *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes*. Gauthier-Villars, Paris, 1934.
KAČANOV, L. M. — [1] *Mehanika plastičeskih sred*. Gostehizdat, Moscova, 1948. — [2] *K kinetike rosta treščin*. Prikl. Mat. Meh., **25**, *3* (1961). — [3] *Variacionnye metody v teorii plastičnosti*. Trudy 2 s'ezda po mehanike. Vol. 3, Izd-vo Nauka, Moscova, 1966.
KALANDJA, A. I. — [1] *Izgib uprugoi plastinki v vide elliptičeskogo kolca*. Prikl. Mat. Meh., **17**, *6* (1953). — [2] *K kontaktnoj zadače teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., **21**, *3* (1957). — [3] *O zadače Gherca o sžatii uprugih tel*. Trudy vyčisl. centra AN Gruz. SSR, 1960.
KALISKI, S. — [1] *Reduction of Fredholm's integral equations of the first kind to those of the second kind in boundary-value problems of the dynamical theory of elasticity*. Archiwum Mech. Stos., **13**, *6* (1961).
KANTOROVIČ, L. V., KRYLOV, V. I. — [1] *Približennye metody vysšego analiza*. Fizmatgiz, Moscova, 1962.
KAPANJAN, L. K. — [1] *Ob izgibe nekotoryh polyh konsolnyh steržnej*. Izv. AN Arm. SSR, **9**, *3* (1956). — [2] *Vybor otobražajuščih funkcij pri rešenii zadač o kručenii polyh prizmatičeskih steržnej*. Sb. naučn. trudov Erevan. Polit. In-ta, **14** (1957).

Kármán, Th. von — [1] *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*. Encykl. Math. Wiss., **4**, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907—1914. — [2] *Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre*. Encykl. Math. Wiss., **4**, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907—1914. — [3] *Über die Grundlagen der Balken-Theorie*. Abhandl. aus dem Aerodyn. Inst. an d. Techn. Hochschule Aachen, **7**, *3* (1927).

Kaufman, R. N. — [1] *Szatie uprugogo šara s nekoncentričeskoj šarovoj polost'ju*. Prikl. Mat. Meh., **28**, *4* (1964).

Kecs, W. — [1] *Sur les problèmes concernant le demi-espace élastique*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR, **6** , *3—4* (1962).

Keer, L. M. — [1] *The contact stress problem for an elastic sphere indenting an elastic layer*. Journ. Appl. Mech., **31**, *1* (1964). — [2] *The torsion of a rigid punch in contact with an elastic layer when the friction law is arbitrary*. Journ. Appl. Mech., **31**, *3* (1964).

Keldyš, M. V. — [1] *Konformnye otobraženija mnogosvjaznyh oblastej na kanoničeskie oblasti*. Uspehi Mat. Nauk, **6** (1939). — [2] *O razrešimosti i ustoičivosti zadač Dirichlet*. Uspehi Mat. Nauk, **8** (1941).

Keldyš, M. V., Lavrentjev, M. A. — [1] *Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **54** (1937).

Keller, H. B. — [1] *Saint-Venant's procedure and Saint-Venant's principle*. Quart. Appl. Math., **22**, *4* (1965).

Kellog, O. D. — [1] *Foundations of potential theory*. Springer, Berlin, 1929.

Kelvin, Lord (W. Thomson) — [1] *Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid*. Cambridge Dublin Math. Journ., 1848. — [2] *On the thermoelastic and thermomagnetic properties of matter*. Quart. Journ. pure a. appl. Math., 1855. — [3] *Dynamical properties regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquids*. Trans. Royal Soc., London, 1863. — [4] *Mathematical and Physical Papers*. Cambridge, 1882—1890.

Kelvin, Lord, Tait, P. G. — [1] *Treatise on natural philosophy*. Cambridge, 1903.

Kikukawa, M. — [1] *On a method of calculating stress concentrations in an infinite plate with a hole of an arbitrary profile*. Proc. Ist Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1951. — [2] *On plane-stress problems in domains of arbitrary profiles*. Proc. IIIrd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1953. — [3] *On plane-stress problems in domains of arbitrary profiles*. Proc. IVth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1954. — [4] *On the applications of the conformal mapping in plane stress concentration problems*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics. Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.

Kilčevskij, N. A. — [1] *Teoria soudarenij tverdyh tel*. Gostehizdat, Moscova, 1949. — [2] *Elementy tenzornogo isčislenija i ego priloženija k mehanike*. Gostehizdat, Moscova, 1954. — [3] *Doslidžennia G. Gherca z kontaktnoi zadači i deiaki etapi ih dalšogo rozvitku*. Prikladna Mehanika, **4**, *2* (1958). — [4] *Postanovka i metod rešenija zadači o kontaktnom sžatii uprugih tel, ograničennyh lineičatymi poverhnostjami*. Izv. OTN, Meh. Maš., *4* (1960). — [5] *„Priami" metodi rozviazuvannia kontaktnoi zadači G. Gherca*. Dopovidi AN USSR, **8** (1960).

Kilčevskij, N. A., Bojko, V. I. — [1] *Pro rozviazok kontaktnoi zadaci G. Gherca pri naiavnosti vnutrišnoi oblasti plastičnosti*. Prikladna Mehanika, **6**, *1* (1960).

Kinoshita, N., Mura, T. — [1] *On boundary value problems of elasticity*. Res. Reports Fac. Engng. Meiji Univ., *8* (1956).

Kirchhoff, G. — [1] *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. Journ. d. reine u. angew. Math., **40**, (1850). — [2] *Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes*. Journ. d. reine u. angew. Math., **56**, (1859). — [3] *Vorlesungen über Mechanik*. Teubner, Leipzig, 1897.

Kirpičev, M. V. — [1] *Teorija podobija*. Akademkniga, Moscova, 1953.

Kizina, Ja. M., Grilițkii, D. V. — [1] *Do osesimetričnoi zadaci pro tisk ploskogo kruglogo štampa na prujnii pivprostir pri naiavnosti sceplennia*. Prikladna Mehanika, **10**, *3* (1964).

Klapetek, F. — [1] *Experimentálni zpusob vyšetřováni napjatosti kroncených hřídelu s vicenásobně souvislými průřezy*. Strjnécky časop., **12**, *1* (1961).

KLEBOWSKI, Z.—[1] *Studium nad zasada de Saint-Venanta.* Właściwe jej sformulowanie. Zeszyty Naukowe Politechn. Warsz., **27**, 1957.

KLIAČKO, S. D. — [1] *O modelirovanii pervoj osnovnoj zadači ploskoj teorii uprugosti dlja mnogosvjaznyh oblastej.* Prikl. Mat. Meh., **23**, *2* (1959).

KNOPS, R. J. — [1] *Uniqueness for the whole space in classical elasticity.* Journ. London Math. Soc., **39**, *4* (1964). — [2] *Uniqueness of axisymmetric elasto-static problems for finite regions.* Arch. Rat. Mech. Anal., **18**, *2* (1965). — [3] *Uniqueness of the displacement boundary-value problem for the classical elastic half-space.* Arch. Rat. Mech. Anal., **20**, *5* (1965).

KNOWLES, J. K. — [1] *On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., **21**, *2* (1965).

KOBER, H. — [1] *Dictionary of conformal representations.* Dover Publications, New York, 1952.

KOČIN, N. E. — [1] *Vektornoe isčislenie i načala tenzornogo isčislenija.* Gostehizdat, Moscova, 1937.

KOGAN, S. Ja., — [1] *O rešenii prostranstvennoj zadači teorii uprugosti alterniruiuščim metodom Švarca.* Izd. AN SSSR, ser. geofiz., *3* (1956).

KOITER, W. T. — [1] *General theorems for elastic-plastic solids.* Progress in solid mechanics. Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.

KOLOS, A. V. — [1] *Ob utočnenii klassičeskoj teorii izgiba kruglyh plastinok.* Prikl. Mat. Meh., **28**, *3* (1964). — [2] *Metody utočnenija klassičeskoj teorii izgiba i rastjaženija plastinok.* Prikl. Mat. Meh., **29**, *4* (1965).

KOLOSOV, G. V. — [1] *Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions.* C.R. Ac. Sci., **146** (1908). — [2] *Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions.* C.R. Ac. Sci., **148** (1909). — [3] *Ob odnom priloženii teorii funkcij kompleksnogo peremennogo k ploskoj zadače matematičeskoj teorii uprugosti.* (Teză). Juriev, 1909. — [4] *Sur le problème plan de la théorie de l'élasticité.* Atti IV Congr. Internat. Mat., **3**, Roma, 1909. — [5] *Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie.* Zeitschrift f. Math. u. Physik, **62** (1914).—[6] *Sur une transformation des équations de l'élasticité.* C.R. Ac. Sci., **184** (1927). — [7] *Sur une application des formules de Schwarz, de Villat et de Dini au problème plan de l'élasticité.* C.R. Ac. Sci., **193** (1931). — [8] *Primenenie kompleksnyh diagramm i teorii funkcij kompleksnoj peremennoj k teorii uprugosti.* Gostehizdat, Moscova, 1935.

KOLSKY, H. — [1] *Stress waves in solids.* Oxford, 1953.

KOMAROV, V. A. — [1] *O racionalnom raspredelenii materiala v konstrukcijah.* Mehanika, *5* (1965).

KOPPENFELLS, W., STALLMAN, F. — [1]*Praxis der konformen Abbildung.* Springer, Berlin, 1959.

KORENEV, B. G. — [1] *Konstrukcii, lejaščie na uprugom osnovanii.* Sb. „Stroitelnaja Mehanika v SSSR, 1917—1957", Strojizdat, Moscova, 1957 — [2] *Teorija plastinok.* Sb. „Stroitelnaja Mehanika v SSSR, 1917—1957", Strojizdat, Moscova, 1957. — [3] *Nekotorye zadači teorii uprugosti i teploprovodnosti, rešaemye v besselevyh funkcijah.* Fizmatgiz, Moscova, 1960.

KORN, A. — [1] *Sur les équations de l'élasticité.* Ann. Ecole Norm. Sup., (3), **24** (1907). — [2] *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas ou les efforts sont donnés à la surface.* Ann. Fac. Sci. Toulouse, (2), **10** (1908). — [3] *Über die Lösung des Grundproblems der Elastizitätstheorie.* Math. Ann., **75** (1914).

KORNECKI, A. — [1] *On the limitations of Saint-Venant's theory of pure bending.* Archiwum Mech. Stos., **14**, *2* (1962).

KOROTKIN, V. G. — [1] *Objemnaja zadača dlja uprugo-izotropnogo poluprostranstva.* Sb. Gidroenergoproekta, **4** (1938).

KOSTIUK, E. N. — [1] *Čislennye rešenija prostranstvennyh kontaktnyh zadač teorii uprugosti.* Prikladna Mehanika, **10**, *4* (1964).

KOVALEV, K. F., IAGN, JU. I. — [1] *Osobennosti stesnennogo kručenija tonkostennyh steržnej zamknutogo profilja.* Inž. sb., **24** (1956).

KRICKEBERG, K. — [1] *Über den Gaussschen und Stokesschen Integralsatz.* Math. Nachrichten. **10**, *5—6* (1953); **11**, *1—2* (1954); **12**, *5—6* (1954).

KRYLOV, A. JA., KUZNECOV, A. M., SEREBRENNIKOVA, I. I., UGODČIKOV, A. G. — [1] *K rešeniju prikladnyh zadač teorii uprugosti pri pomošči elektromodelirovannogo konformnogo otobraženija.* 2 Vses. sjezd po mehanike, Annot. dokladov, Moscova, 1964.

KRÖNER, E. — [1] *Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen.* Zeitschrift f. Physik, **136**, *4* (1953). — [2] *Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen isotropen Elastizitätstheorie.* Zeitschrift f. Physik, **139**, *2* (1954). — [3] *Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen anisotropen Elastizitätstheorie.* Zeitschrift f. Physik, **141**, *3* (1955). (Errata, **143**, p. 374). — [4] *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen.* Springer, Berlin, 1958. — [5] *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen.* Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, *4* (1960). — [6] *Die neuen Konzeptionen der Kontinuummechanik der festen Körper.* Mehanika, Sb. sokr. perevodov, **12**, *6* (1961). — [7] *Dislocations and continuum mechanics*, Appl. Mech. Rev., **15**, *8* (1962).

KRÖNER, E., SEEGER, A. — [1] *Nicht-lineare Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen.* Arch. Rat. Mech. Anal., **3**, *2* (1959).

KRUTKOV, JU. A. — [1] *Tenzor funkcii naprjaženij i obščie rešenija v statike teorii uprugosti.* Akademkniga, Moscova, 1949.

KUFAREV, P. P. — [1] *K voprosu o kručenii i izgibe steržnej poligonalnogo sečenija.* Prikl. Mat. Meh., **1**, *1* (1937).

KUNIN, I. A. — [1] *Model uprugoi sredi s prostoi strukturoi s prostranstvennoi dispersiei.* Prikl. Mat. Meh., **30**, *3* (1966).

KUPRADZE, V. D. — [1] *Graničnye zadači teorii kolebanij i integralnye uravnenija.* Gostehizdat, Moscova, 1950. — [2] *Metody teorii potenciala v teorii uprugosti.* Fizmatgiz, Moscova, 1963. — [3] *Dynamical problems in elasticity.* Progress in solid mechanics. Vol. 3, North Holland, Amsterdam, 1963.

KURDIN, N. S. — [1] *O koncentracii naprjaženij v uprugo-deformiruemyh sredah.* Mehanika, **5** (1965).

KUTILIN, D. I. — [1] *Teoria konečnyh deformacij.* Gostehizdat, Moscova, 1947.

LAMÉ, G. — [1] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.* Mallet-Bachelier, Paris, 1852. — [2] *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications.* Mallet-Bachelier, Paris, 1859.

LANDAU, L. D., LIFŠIC, E. M. — [1] *Teorija uprugosti.* Izd-vo Nauka, Moscova, 1965.

LANGHAAR, H. L. — [1] *General theory of buckling.* Appl. Mech. Rev., **11**, *11* (1958). — [2] *Energy methods in applied mechanics.* J. Wiley, New York, 1962.

LAURICELLA, G. — [1] *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Rend. Lincei, (5), **2**, *1* (1893). — [2] *Equilibrio di un corpo elastico indefinito limitato da un piano.* Il nuovo Cimento, (3), **36** (1894). — [3] *Equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Ann. di Pisa, **7** (1895). — [4] *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica matematica.* Il nuovo Cimento (5), **13** (1907). — [5] *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* Acta Mathematica, **32** (1909).

LAVRENTJEV, M. A. — [1] *Variacionnyj metod v kraevyh zadačah dlja sistem uravnenij elliptičeskogo tipa.* Akademkniga, Moscova, 1962.

LAVRENTJEV, M. A., ŞABAT, B. V. — [1] *Metody teorii funkcii kompleksnogo peremennogo.* Fizmatgiz, Moscova, 1958.

LAZAN, B. — [1] *Damping properties of materials and material composites.* Appl. Mech. Rev., **15**, *2* (1962).

LEHNICKIJ, S. G. — [1] *Anizotropnye plastinki.* Gostehizdat, Moscova, 1947. — [2] *Teorija uprugosti anizotropnogo tela.* Gostehizdat, Moscova, 1950.

LEJBENZON, L. S. — [1] *Kurs teorii uprugosti.* Gostehizdat, Moscova, 1947. — [2] *Sobranie trudov.* Akademkniga, Moscova, 1951.

LEIBFRIED, G. — [1] *Gittertheorie der mechanischen und thermischen Eigenschaften der Kristalle.* Handbuch d. Physik, (2), **7**, partea 1, Springer, Berlin, 1955.

LEONOV, M. JA. — [1] *Nekotorye zadači i priloženija teorii potenciala.* Prikl. Mat. Meh., **4**, *5–6* (1940). — [2] *Obščaja zadača o davlenii krugovogo štampa na uprugoe poluprostranstvo.* Prikl. Mat. Meh., **17**, *1* (1953).

LEONOV, M. JA., ČUMAK, K. I. — [1] *Davlenie pod štampom blizkim k krugovomu v plane.* Prikladna Mehanika, **5**, *2* (1959).

LEONOV, M. IA., POSACKIJ, S. L., IVAŠČENKO, A. N. — [1] *Rasčet fundamenta, kvadratnogo v plane.* Naučn. zap. In-ta mašinovedenija i avtomatiki AN USSR, **4**, (1956).

LEONTOVIČ, M. A. — [1] *Vvedenie v termodinamiku.* Gostehizdat, Moscova, 1952.

LERAY, J. — [1] *Fonction de Green m-harmonique; flexion de la bande élastique, homogène, isotrope à bords libres.* Appl. Theory of functions in continuum mechanics. Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.

LERAY, J. C. — [1] *Le calcul des ponts-plaques.* Applic. Theory of functions in continuum mechanics. Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.

LÉVY, M. — [1] *Mémoires sur la théorie des plaques élastiques planes.* Journ. Math. pures appl., (3), **3**, 1877. — [2] *Sur la légitimité de la règle dite du trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie.* C. R. Ac. Sci., **126** (1898).

LEWIS, J. A., POLLAK, H. O. — [1] *Photoelastic calculations by a complex variable method.* Z.A.M.P., **12**, *1* (1961).

L'HERMITE, R. — [1] *Résistance des matériaux.* Dunod, Paris, 1954.

LICHTENSTEIN, L. — [1] *Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.* Encykl. d. Math. Wiss., **2**, partea 3, fasc. 1, Teubner, Leipzig, 1918. — [2] *Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie.* Math. Zeitschrift, **20** (1924); **24** (1926), p. 640.

LIHAČEV, V. A. — [1] *Zamečanija k statje A. I. Kalandija „Izgib uprugoj plastinki v vide elliptičeskogo kolca''.* Prikl. Math. Meh., **19**, *2* (1955).

LING HUNG SUN — [1] *On variational methods in the problem of torsion for multiply-connected cross-sections.* Acta Phys. Sinica, **9**, *4* (1953).

LOŽKIN, B. G. — [1] *Analiz racionalnogo primenenija profilej prokatnoj stali.* Izv. OTN, *1* (1956).

LOMAKIN, V. A. — [1] *O deformirovanii microneodnorodnyh uprugih tel.* Prikl. Mat. Meh., **29**, *5* (1965).

LOVE, A. E. H. — [1] *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* Cambridge, 1927. — [2] *The stress produced in a semi-infinite solid by pressure of part of the boundary.* Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, **228**, 1929. — [3] *Boussinesq problem for a rigid cone.* The Quart. Journ. of Math., Oxford series, **10**, *39* (1939).

LUBINSKII, A. — [1] *Generalization of the theory of elasticity to porous bodies.* Proc. IInd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1954.

LUBKIN, J. L. — [1] *The torsion of elastic spheres in contact.* Journ. Appl. Mech., **18**, *2* (1951).

LURJE, A. I. — [1] *Opredelenie peremeščenija po zadannomu tenzoru deformacij.* Prikl. Mat. Meh., **4**, *1* (1940). — [2] *Nekotorye kontaktnye zadači teorii uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **5**, *3* (1941). — [3] *Ravnovesie uprugoj poloj sfery.* Prikl. Mat. Meh., **17**, *3* (1953). — [4] *Prostranstvennye zadači teorii uprugosti.* Gostehizdat, Moscova, 1955. — [5] *O knige „Kručenie uprugih tel''.* Mehanika, *2* (1965).

LUZIN, N. N. — [1] *Teoria funkcij dejstvitelnogo peremennogo.* Učpedgiz, Moscova, 1948.

LUZIN, N. N., PRIVALOV, I. I. — [1] *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques.* Ann. Ec. Norm. Sup., **42** (1925).

MAHOVIKOV, V. I. — [1] *Pro nablijeni konformni vidobrajennia i ih zastosuvania v teorii prujnosti.* Prikladna Mehanika, **3**, *1* (1957). — [2] *Nablijeni sposobi konformnogo vidobrajennia dvozviaznih oblastei.* Prikladna Mehanika, **5**, *3* (1959). — [3] *Približennyj sposob konformnogo otobraženija mnogougolnyh oblastej i kručenie steržnej formy prokatnyh profilei.* Izv. vysš. učeb. zaved., Stroit. i Arhit., **2** (1961).

MAKAI, E. — [1] *Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam.* Acta Sci. Math. Szeged., **20** (1959).

MANDJAVIDZE, G. F. — [1] *Ob odnom singuljarnom integralnom uravnenii s razryvnymi koefficientami i ego primenenii v teorii uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **15**, *3* (1951). — [2] *Singuljarnye integralnye uravnenija kak apparat rešenija smešannyh zadač ploskoj teorii uprugosti.* Applic. Theory of functions in continuum mechanics, vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.

MANEA, V. — [1] *Torsiunea arborelui cu caneluri radiale exterioare.* St. Cerc. Mec. Apl., **9**, *4* (1958). — [2] *Considerații asupra teoriei plăcilor plane elastice subțiri.* St. Cerc. Mec. Apl., **14**, *4* (1963). — [3] *Construirea soluțiilor ecuațiilor plăcilor plane elastice subțiri, din teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff, prin metoda funcțiilor analitice.* St. Cerc. Mec. Apl., **14**, *5* (1963). — [4] *Calculul plăcilor elastice circulare subțiri în teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff.* St. Cerc. Mec. Apl., **14**, *6* (1963). — [5] *K nelineinym uravnenijam dviženija splošnoj deformiruemoj sredy.* Rev. Roum. Méc. Appl., **9**, *1* (1964). — [6] *On the theory of elastic plane plates of mean thickness.* Rev. Roum. Méc. Appl., **9**, *6* (1964). — [7] *Cîteva probleme ale teoriei plăcilor plane elastice.* Editura Academiei, București, 1966.

MANEA, V., PROCOPOVICI, E. — [1] *O extindere a rezolvării problemei torsiunii unei palete de turbină.* St. Cerc. Mec. Apl., **10**, *1* (1959).

MAPLE, C. G. — [1] *The Dirichlet problem: bounds at a point for the solution and its derivatives*. Quart. Appl. Math., **8**, *3* (1950).

MARGUERRE, K. — [1] *Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie*. ZAMM, **35**, *6—7* (1955).

MARIN, J. — [1] *Testing machines*. Handbook exper. stress anal. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950.

MARIOTTE, E. — [1] *Traité du mouvement des eaux*. Paris, 1686.

MARKUŠEVIČ, A. I. — [1] *Teorija analitičeskih funkcii*. Gostehizdat, Moscova, 1950.

MARTIN, A. I. — [1] *On a formula for the torsional rigidity of thin-symmetrical sections*. Journ. Math. Phys., **36**, *1* (1957).

MATHURIN, C. — [1] *Application de l'algèbre et de l'analyse linéaires à la statique des plaques élastiques*. Journ. de Mécanique, **1**, *3* (1962). — [2] *Résolution des deux problèmes fondamentaux de l'élastostatique plane quand le contour est analytique simple*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics, Nauka, Moscova, 1965.

MATSCHINSKII, M. — [1] *Beweis des Saint-Venantschen Prinzips*. ZAMM, **39**, *9—11* (1959).

MAXWELL, J. C. — [1] *On reciprocical figures, frames, and diagrams of forces*. Trans. Roy. Soc. Edinburgh, **26**, 1869—70.

McGREGOR, C. W. — [1] *Mechanical properties of materials*. Handbook exper. stress anal. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950.

McNEAL, R. H. — [1] *The solution of elastic plate problems by electrical analogies*. Journ. Appl. Mech., **18**, *1* (1951).

MEDOVIKOV, A. I. — [1] *Rešenie ploskoj smešannoj zadači teorii uprugosti metodom elektromodelirovanija funkcij naprjaženij*. Trudy I mežvuzovskoj naučn.-tehn. konferencii po električ. modelirovaniju zadač stroit. meh., sopr. mat. i teorii upr., B.M., Novočerkasskij Polit. Inst., 1960.

MESNAGER, A. — [1] *Sur le calcul des pièces rectangulaires fléchies au moyen de la théorie de l'élasticité*. Ann. Ponts et Chaussées, (8), *2* (1901). — [2] *Détermination complète, sur un modèle réduit, des tensions qui se produisent dans un ouvrage. Utilisation de la double réfraction accidentelle du verre à l'étude des efforts intérieurs dans les solides*. Ann. Ponts et Chaussées, (9), **18**, *4* (1913).

METELICYN, I. I. — [1] *K voprosu ob uprugom udare*. Ukr. Mat. Žurnal, **6**, *2* (1954).

MICHELL, J. H. — [1] *On the direct determination of stress in an elastic solid, with applications to the theory of plates*. Proc. London Math. Soc., **31**, 1900.

MIHLIN, S. G. — [1] *Integralnye uravnenija*. Gostehizdat, Moscova, 1949. — [2] *Prjamye metody v matematičeskoj fizike*. Gostehizdat, Moscova, 1950. — [3] *Problema minimuma kvadratičnogo funkcionala*. Gostehizdat, Moscova, 1952. — [4] *Variacionnye metody v matematičeskoj fizike*. Gostehizdat, Moscova, 1957. — [5] *Mnogomernye singuljarnye integraly i integralnye uravnenija*. Fizmatgiz, Moscova, 1962.

MIKLOWITZ, J. — [1] *Recent developments in elastic wave propagation*. Appl. Mech. Rev., **13**, *12* (1960). — [2] *Transient wave propagation in elastic rods and plates*. Journ. Geophys. Res., **68**, *4* (1963).

MILNE-THOMSON, L. M. — [1] *Flexure*. Trans. Amer. Math. Soc. **90**, *1*, (1959). — [2] *Plane elastic systems*. Springer, Berlin, 1960. — [3] *Antiplane elastic systems*. Springer, Berlin, 1962.

MINDLIN, R. D. — [1] *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid*. Physics, **7**, *5* (1936). — [2] *Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions*. Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936). — [3] *Compliance of elastic bodies in contact*. Journ. Appl. Mech., **16** (1949). — [4] *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid*. Proc. 1st Midwestern Conference Solid Mech., Illinois, Urbana, 1953. — [5] *Mechanics of granular media*. Proc. II U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1954. — [6] *Micro-structure in linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, *1* (1964). — [7] *Complex representation of displacements and stresses in plane strain with couple-stresses*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics, Nauka, Moscova, 1965.

MINDLIN, R. D., DERESIEWICZ, H. — [1] *Elastic spheres in contact under varying oblique forces*. Journ. Appl. Mech., **20**, *3* (1953).

MINDLIN, R. D., SALVADORI, M. G. — [1] *Analogies*. Handbook exper. stress anal. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950.

MINDLIN, R. D., TIERSTEN, H. F. — [1] *Effects of couple-stresses in linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, *5* (1962).

MIRANDA, C. — [1] *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Springer, Berlin, 1955.

MISES, R. von — [1] *On Saint-Venant's principle.* Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945).

MIŞICU, M. — [1] *Echilibrul mediilor continue cu deformaţii mari.* St. Cerc. Mec. Metalurg., 4 (1953). — [2] *Über die Anwendung analytischer Funktionen auf dreidimensionale Probleme der Mechanik verformbarer Körper.* Rev. Roum. Méc. Appl., **1**, *2* (1956). — [3] *On the solving of the spatial problem of the theory of elasticity. Applications to the theory of plates.* Rev. Roum. Méc. Appl., **2**, *1* (1957). — [4] *Despre problemele dinamice ale lui Boussinesq şi Hertz.* St. Cerc. Mec. Apl., **10**, *2* (1959). — [5] *Torsiunea dinamică a barelor elastice cu secţiune constantă.* St. Cerc. Mec. Apl., **10**, *4* (1959). — [6] *Problema dinamică a torsiunii.* St. Cerc. Mec. Apl., **11**, *1* (1960). — [7] *Theory of visco-elasticity with couple-stresses and some reduction to two-dimensional problems* (I, II). Rev. Roum. Méc. Appl., **8**, *6* (1963); **9**, *1* (1964). — [8] *On the mechanics of structural media. Noncorrelated fields.* Rev. Roum. Sci. Techn., Méc. Appl., **10**, *2* (1965). — [9] *Mecanica mediilor deformabile.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1967.

MITCHELL, T. P., WARREN, W. E. — [1] *On the method of Milne-Thomson in plane elasticity.* Journ. Appl. Mech., **29**, *4* (1962).

MIYATAKE, O., HIRAI, H., MIKAENI, T., FUJII, T. — [1] *Calculations of torsional stress by Monte-Carlo method.* Proc. IX Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1959.

MOLYNEUX, J., BERAN, M. — [1] *Statistical properties of the stress and strain fields in a medium with small random variations in elastic coefficients.* Journ. Math. Mech., **14**, *3* (1965).

MORERA, G. — [1] *Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo.* Rend. Lincei, (5), **1**, *1* (1892). — [2] *Appendice alla nota „Sulla soluzione più generale...",* Rend. Lincei, (5), **1**, *1* (1892).

MORGENSTERN, D. — [1] *Mathematische Begründung der Scheibentheorie (Zweidimensionale Elastizitätstheorie).* Arch. Rat. Mech. Anal., **3**, *1* (1959). — [2] *Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie.* Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, *2* (1959).

MOSSAKOVSKIJ, V. I. — [1] *K voprosu ob ocenke peremeščenij v prostranstvennyh kontaktnyh zadačah.* Prikl. Mat. Meh., **15**, *5* (1951). — [2] *Primenenie teoremy vzaimnosti k opredeleniju summarnyh sil i momentov v prostrantsvennyh kontaktnyh zadačah.* Prikl. Mat. Meh., **17**, *4* (1953). — [3] *Osnovnaja smešannaja zadača teorii uprugosti dlja poluprostranstva s krugovoj liniej razdela graničnyh uslovij.* Prikl. Mat. Meh., **18**, *2* (1954). — [4] *Dvalenie štampa, blizkogo v plane k krugovomu, na uprugoe poluprostranstvo.* Prikl. Mat. Meh., **18**, *6* (1954). — [5] *O modelirovanii pervoj osnovnoj zadači teorii uprugosti dlja mnogosvjaznyh oblastej.* Prikl. Mat. Meh., **19**, *3* (1955). — [6] *Davlenie krugovogo štampa na uprugoe poluprostranstvo, modul uprugosti kotorogo javljaetsja stepennoj funkciej glubiny.* Prikl. Mat. Meh., **22**, *1* (1958). — [7] *Sžatie uprugih tel v uslovijah sceplenija* (osesimmetričnyj slučaj). Prikl. Mat. Meh., **27**, *3* (1963). — [8] *Rešenie nekotoryh smešannyh zadač teorii uprugosti i teorii potenciala dlja poluprostranstva svedeniem k vspomogatelnym ploskim zadačam.* 2 Vsesoiuznyj sjezd po mehanike, Annotacii dokladov, Moscova, 1964.

MOSSAKOVSKIJ, V. I., FOTIEVA, N. N. — [1] *Vdavlivanie simmetričnogo štampa v upruguju poluploskost pri naličii sceplenija na linii kontakta.* Mehanika, *6* (1965).

MOSSAKOVSKIJ, V. I., GUBENKO, V. S. — [1] *Novi metodi rozviazannia zadaci pro tisk krugovogo štampa na prupjnii pivprostir.* Prikladna Mehanica, **7**, *1* (1961).

MOSSAKOWSKA, Z. — [1] *Funkcii naprjaženij dlja uprugih tel s trjohosnoj ortotropiej.* Archiwum Mech. Stos., **7**, *1* (1955).

MOSSAKOVSKII, V. I., ONIŠČENKO, V. I., RVACEV, V. L. — [1] *Pro zastosuvannija funkcii Grina do rozviazannija mišanoi zadači teorii pružnosti dlja pivprostoru.* Prikladna Mehanika, **10**, *3* (1964).

MUKI, R. — [1] *On the Sneddon's method by Hankel transforms for the three-dimensional problem of elasticity theory.* Proc. Vth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1955. — [2] *Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate.* Progress in solid mechanics, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.

MÜLLER, C. H., TIMPE, A. — [1] *Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie.* Encykl. Math. Wiss., **4**, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907—1914.

MURA, T., RIMAWI, W., LEE, S. L. — [1] *Extended theorems of limit analysis.* Quart. Appl. Math., **23**, *2* (1965).

MURNAGHAN, F. D. — [1] *Finite deformations of an elastic solid.* Amer. Journ. Math., **59** (1937). — [2] *Finite deformations of an elastic solid.* J. Wiley, New York, 1951.

MUSGRAVE, M. — [1] *Elastic waves in anisotropic media.* Progress in solid mechanics, vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.

MUSHELIŞVILI, N. I. — [1] *Application des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique.* Ed. Univ. Tiflis, 1922. — [2] *Recherches sur des problèmes aux limites relatifs à l'équation biharmonique et aux équations de l'élasticité à deux dimensions.* Math. Ann., **107** (1932). — [3] *Singuliarnye integralnye uravnenija.* Fizmatgiz, Moscova, 1962. — [4] *Applications of the theory of functions of a complex variable to the theory of elasticity.* Applic. theory of functions in continuum mechanics, vol. 1, Nauka, Moscova, 1965. — [5] *Nekotorye osnovnye zadači matematičeskoj teorii uprugosti.* Akademkniga, Moscova, 1966.

MUŠTARI, H. M. — [1] *Ob odnom sposobe polučenija nekotoryh rezultatov rešenij zadač Sen-Venana o kručenii i o poperečnom izgibe prizmatičeskih tel.* Prikl. Mat. Meh., **1**, *4* (1938). — [2] *Teoria izgiba plit srednei tolščiny.* Izv. OTN, Meh. Maš., *2* (1959).

NADAI, A. — [1] *Theory of flow and fracture of solids.* McGraw-Hill, New York, 1950.

NAGHDI, P. M. — [1] *On Saint-Venant's principle: elastic shells and plates.* Journ. Appl. Mech., **27**, *3* (1960). — [2] *Foundations of elastic shell theory.* Progress in solid mechanics, vol. 4, North Holland, Amsterdam, 1963.

NAGHDI, P. M., HSU, C. S. — [1] *On a representation of displacements in linear elasticity in terms of three stress functions.* Journ. Math. Mech., **10**, *2* (1961).

NAJMAN, M. I. — [1] *Poperečnij izgib cilindra s soosnoj mnogogrannoj polostju.* Rasčety na pročnost', *4*, Mašgiz, 1959.

NAJMARK, B. M. — [1] *O nekotoryh funkcionalnyh metodah v linejnoj idealnoj teorii uprugosti.* Trudy In-ta fiziki Zemli AN SSSR, *11* (1960).

NAKAZAWA, H. — [1] *Electrical analogies with resistive paper for the torsion problem of bars.* Proc. VIth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956.

NAKAZAWA, H., YATSUKA, T. — [1] *On the torsion of the bar with drill section.* Proc. Xth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1960.

NARASIMHAMURTHY, P. — [1] *Torsion of multiply connected sections.* Journ. Indian Inst. Sci., B **36**, *4* (1954).

NARODECKIJ, M. Z. — [1] *Opredelenie naprjaženij v krugovom kolce pod dejstviem sosredotočennyh sil.* Izv. OTN, *1* (1948).

NAUMOV, L. G., STEPANOV, G. JU. — [1] *Primenenie metoda elektriceskogo modelirovanija k rešeniju zadači krucenija cilindričeskih steržnej.* Dokl. 4-oi mejvuzovsk. konf. po primeneniju fizičeskogo i matematičeskogo modelirovanija v različnyh otrasljah tehniki. Sb. I, Moscova, 1962.

NAVIER, L. — [1] *Mémoire sur les lois d'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques.* Bull. Soc. Philomathique, Paris, 1823.

NEDELCU, M. — [1] *Une application de la dérivée spatiale aux équations de l'élasticité dans l'espace.* Rev. Roum. Math. pures appl., **5**, *3—4* (1960).

NEHARI, Z. — [1] *Conformal mapping.* McGraw-Hill, New York, 1952.

NEIDHARDT, G. L., STERNBERG, E. — [1] *On the transmission of a concentrated load into the interior of an elastic body.* Journ. Appl. Mech., **23**, *4* (1956).

NEMÉNYI, P. — [1] *Lösung des Torsionproblems für Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt.* ZAMM, **1** (1921). — [2] *Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua.* Advances in applied mechanics, vol. 2, Mc Graw Hill, New York, 1951.

NEUBER, H. — [1] *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel.* ZAMM, **14**, *4* (1934). — [2] *Kerbspannungslehre.* Springer, Berlin, 1958.

NEUMANN, F. — [1] *Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in comprimierten oder ungleichförmig erwärmten unkristallinischen Körpern.* Abhandl. königl. Akad. d. Wiss., Berlin, **2**, 1841.

NICOLAU, E. — [1] *Contribuţii la utilizarea analogiei cu membrana în cercetarea tensiunilor la torsiune.* St. Cerc. Mec. Apl., **7**, *2* (1956). — [2] *Torsiunea barelor cilindrice cu fisură diametrală de adîncime variabilă, studiată cu ajutorul analogiei cu membrana.* St. Cerc. Mec. Apl., **13**, *5* (1962).

NICOLESCU, M. — [1] *Recherches sur les fonctions polyharmoniques.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (3), **52** (1935).

NICOLESCU, M., DINCULEANU, N., MARCUS, S. — [1] *Manual de analiză matematică.* Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962—1964.

NIGUL, U. K. — [1] *O primenenii simvoličeskogo metoda A.I. Lurje k analizu naprjažennyh sostoianij i dvumernyh teorij uprugih sistem.* Prikl. Mat. Meh., **27**, *3* (1963).

NIKOLSKII, E. N. — [1] *Algoritm Švarca v zadače teorii uprugosti o naprjaženijah.* Dokl. AN SSSR, **135**, *3* (1960).

NISIDA, M., HONDO, M. — [1] *New photoelastic procedures for solving torsion problems.* Proc. VIIth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1957.

NICECKIJ, L. V. — [1] *Elektromodelirovanie trjohmernyh kontaktnyh zadač teorii uprugosti.* Trudy I meževuzovskoj naučno-tehn. konf. po električ. modelirovaniju zadač stroit. meh., soprot. mat. i teorii uprugosti. B.M., Novočerkasskij Polit. Inst., 1960.

NOLL, W. — [1] *On the continuity of the solid and fluid states.* Journ. Rat. Mech. Anal., **4**, *1* (1955). — [2] *Die Herleitung der Grundgleichungen der Theorie der Kontinua aus der statistischen Mechanik.* Journ. Rat. Mech. Anal., **4**, *5* (1955). — [3] *A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media.* Arch. Rat. Mech. Anal., **2**, *3* (1958). — [4] *La mécanique classique, basée sur un axiome d'objectivité.* În *La méthode axiomatique dans les mécaniques classiques et nouvelles.* Gauthier-Villars, Paris, 1963.

NOVOŽILOV, V. V. — [1] *Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti.* Gostehizdat, Moscova, 1948. — [2] *O centre izgiba.* Prikl. Mat. Meh., **21**, *2* (1957). — [3] *Teorija uprugosti.* Sudpromgiz, Moscova, 1958. — [4] *Teorija tonkih oboloček.* Sudpromgiz, Moscova, 1962.

NOVOŽILOV, V. V., SLEPIAN, L. I. — [1] *O principe Sen-Venana v dinamike steržnej.* Prikl. Mat. Meh., **29**, *2*, (1965).

NOWACKIJ, W. — [1] *Dinamika sooruženij.* Strojizdat, Moscova, 1963.

NOWINSKIJ, J. — [1] *Skrecanie preta prostopadlosciennego, ktorego jeden przekroj pozostaje ploski.* Archiwum Mech. Stos., **5**, *1* (1953). — [2] *Theory of thin-walled bars.* Appl. Mech. Rev., **12**, *4* (1959).

NOWINSKI, J., TURSKII, S. — [1] *Z teorii sprężystości cial izotropowych niejednorodnych.* Archiwum Mech. Stos., **5**, *1* (1953).

NYE, J. F. — [1] *Physical properties of crystals.* Oxford, 1957.

OBOLAŠVILI, E. I. — [1] *Effektivnoe rešenie nekotoryh prostranstvennyh zadač teorii uprugosti.* Rev. Roum. Math. pures appl., **11**, *8* (1966).

ODEH, F., TADJBAKHSH, I. — [1] *Uniqueness in the linear theory of viscoelasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., **18**, *4* (1965).

ODQVIST, F. K. G. — [1] *Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten.* Math. Zeitschrift, **32** (1930).

OGIBALOV, P. M. — [1] *Izgib, ustojčivost i kolebanija plastinok.* Edit. Univ. Moscova, 1958.

OLSZAK, W. — [1] *Uogólnienie analogii membranowej do zagadnień układów anizotropowych.* Archiwum Mech. Stos., **5**, *1* (1953). — [2] *Non-homogenity in elasticity and plasticity.* (Red.) Pergamon Press, 1959.

OLSZAK, W., PERZYNA, Z., MROZ, P. — [1] *Sovremennoe sostojanie teorii plastičnosti.* Mir, Moscova, 1964.

OLSZAK, W., RYCHLEWSKI, J. — [1] *On plane states of equilibrium in non-homogeneous elastic and plastic media.* Applic. Theory of functions in continuum mechanics, Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.

ONICESCU, O. — [1] *Variationsprinzipien, welche die inneren Verbindungen eines kontinuierlichen Mediums definieren.* Revue Roum. Mécanique Appliquée, **1**, *2* (1956).

ORLOV, A. V., PINEGHIN, S. V. — [1] *Experimentalnoe issledovanie mikroperemeščenij v rajone kontakta uprugih tel i pročnost' poverhnostnogo sloja.* Izv. OTN, Meh. Maš., *6* (1960).

OSGOOD, W. F. — [1] *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen.* Encykl. Math. Wiss., **2**, partea 2, Teubner, Leipzig, 1901—1921. — [2] *Lehrbuch der Funktionentheorie.* Teubner, Leipzig, 1912.

OSGOOD, W. F., TAYLOR, E. H. — [1] *Conformal transformations on the boundary of their regions of definition.* Trans. Amer. Math. Soc., **14** (1913).

PACELLI, M. — [1] *Contatto con attrito tra due corpi elastici di forma qualunque; compressione e torsione.* Ann. di Pisa, (3), **10**, *3—4* (1956). — [2] *Compressione e torsione di due corpi elastici a contatto.* Rend. Lincei, (8), **21**, *5* (1956).

PALMOV, V. A. — [1] *Koncentracija naprjaženij okolo šerohovatoj granicy uprugogo tela.* Izv. OTN, Meh. Maš., *3* (1963). — [2] *Naprjažennoe sostojanie vblizi šerohovatoj poverhnosti uprugogo tela.* Prikl. Mat. Meh., **27**, *5* (1963). — [3] *Zavisimost koncentracii naprjaženij ot kacestva obrabotki poverhnosti detalej.* Izv. OTN, Meh. Maš., *5* (1963). — [4] *Osnovnye uravnenija teorii nesimmetričnoj uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **28**, *3* (1964). — [5] *Naprjažennoe sostojanie v slučajno neodnorodnom tele.* 2 Vsesojuznyi sjezd po mehanike, Annot. dokladov, Moscova, 1964. — [6] *Ploskaja zadača nesimmetričnoj teorii uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **28**, *6* (1964).

PANASIUK, V. V. — [1] *Rozvitok triščini, iaka v plani mae formu elipsa.* Prikladna Mehanika, **6**, *1* (1960). — [2] *Pro odnu prostorovu zadaču teorii prujnosti dlja izotropnogo tila z elliptičnoiu triščinoiu.* Prikladna Mehanika, **8**, *3* (1962). — [3] *O razrušenii hrupkih tel pri ploskom naprjažennom sostojanii.* Prikladnaja Mehanika, **1**, *9* (1965).

PANOVKO, JA. G., GUBANOVA, I. I. — [1] *Ustojčivost i kolebanija uprugih sistem.* Izd-vo Nauka, Moscova, 1964.

PAPKOVIČ, P. F. — [1] *Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques.* C.R. Ac. Sci., **195** (1932). — [2] *Expressions générales des composantes des tensions, ne renfermant comme fonctions arbitraires que des fonctions harmoniques.* C.R. Ac. Sci., **195** (1932). — [3] *Obzor nekotoryh obščih rešenij osnovnyh differencialnyh uravnenij pokoja izotropnogo uprugogo tela.* Prikl. Mat. Meh., **1**, *1* (1937). — [4] *Teorija uprugosti.* Oborongiz, Moscova, 1939.

PATER, A. D. de — [1] *On the reciprocal pressure between two elastic bodies.* Rolling contact phenomena, North Holland, Amsterdam, 1963.

PAYNE, L. E. — [1] *On axially symmetric punch, crack and torsion problems.* Journ. Soc. industr. and appl. math., **1**, *1* (1953). — [2] *Upper and lower bounds for the center of flexure.* Journ. Res. Nat. Bur. Standards, B. **64**, *2* (1960).

PAYNE, L. E., WEINBERGER, H. F. — [1] *New bounds in harmonic and biharmonic problems.* Journ. Math. Phys., **33**, *4* (1955). — [2] *Bounds for solutions of second order elliptic equations in terms of arbitrary vector fields.* Arch. Rat. Mech. Anal., **20**, *2* (1965).

PEARSON, C. E. — [1] *Remarks on the centre of shear.* ZAMM, **36**, *3—4* (1956). — [2] *Theoretical elasticity.* Cambridge (Mass.), 1959.

PELEH, B. L. — [1] *K opredeleniju koefficientov koncentracii pri izgibe plit s otverstijami.* Prikladnaja mehanika, *7* (1965).

PEREHVATOV, V. K. — [1] *K rasčetu naprjaženij v balkah-stenkah metodom N.I. Mushelišvili pri pomošči elektromodelirovanija konformnogo preobrazovanija.* Trudy 1 mezvuzovsk. konf. po električ. modelirovaniju zadač stroit. meh., sopr. mat. i teorii uprugosti. B.M., Novočerkasskij Polit. Inst., 1960.

PERLIN, P. I. — [1] *Ob odnom metode rešenija osnovnyh prostranstvennyh zadač teorii potenciala i teorii uprugosti dlja oblastej, ogranicennyh dvumja zamknutymi poverhnostjami.* Inž. Žurn., **4**, *1* (1964).

PETROVSKIJ, I. G. — [1] *Lekcii ob uravnenijah s častnymi proizvodnymi.* Gostehizdat, Moscova, 1953.

PFEIFFER, F. — [1] *Elastokinetik.* Handbuch d. Physik, (1), **6**, Springer, Berlin, 1928.

PIPKIN, A. C., RIVLIN, R. S. — [1] *The formulation of constitutive equations in continuum physics* (I). Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, *2* (1959).

PÎRVU, A. — [1] *Problema plană a elasticității pentru o coroană circulară în cazul celei de a doua probleme fundamentale la limită.* St. Cerc. Mec. Ap., **7**, *2* (1956).

PISACANE, V. L., MALVERN, L. E. — [1] *Application of numerical mapping to the Muskhelishvili method in plane elasticity.* Journ. Appl. Mech., **30**, *3* (1963).

PIVOVAROV, A. M. — [1] *Koncentracija kasatelnyh naprjaženij pri kručenii prizmatičeskih steržnej.* Prikl. Mat. Meh., **17**, *2* (1953).

PLANK, M. — [1] *Thermodynamik.* De Gruyter, Berlin, 1930.

PLATRIER, C. — [1] *Mécanique rationnelle.* Dunod, Paris, 1954—1955.

PLEMELJ, J. — [1] *Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie.* Monatshefte f. Math. u. Physik., **15** (1904). — [2] *Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend.* Monatshefte f. Math. u. Physik, **19** (1908).

POCHHAMMER, L. — [1] *Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders.* Journ. f. reine u. angew. Math., **81** (1876). — [2] *Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrentzten isotropen Kreiscylinder.* Journ. f. reine u. angew. Math., **81** (1876).

POINCARÉ, H. — [1] *Leçons sur la théorie de l'élasticité.* G. Carré, Paris, 1892.

POL, B. van der, BREMMER, H. — [1] *Operational calculus based on the two-sided Laplace integral.* Cambridge, 1950.

POLOŽIJ, G. N. — [1] *Variacionno-topologičeskie teoremy kraevyh zadač teorii kručenija valov peremennogo sečenija. Metod sohranenija oblasti i mažorantnyh oblastej.* Izv. AN SSSR, serija mat., **19**, *3* (1955). — [2] *Pro deiaki teoremi porivniannia kraiovih zadač krucennia prizmatičnih sterjniv.* Prikladna Mehanika, **1**, *4* (1955). — [3] *Pro odin metod rozviazannia zadač zginu prizmatičnih sterjniv.* Prikladna Mehanika, **2**, *3* (1956). — [4] *Obobščenie teorii analitičeskih funkcii kompleksnogo peremennogo.* Izd.-vo Univ. Kiev, 1965.

POLSKIJ, N. I.—[1] *Proekcionnye metody v prikladnoj matematike.* Dokl. AN SSSR, **143**, *4* (1962). — [2] *Proekcionnye metody rešenija lineinyh zadač* (rezumat). Uspehi Mat. Nauk., **18**, *2* (1963), p. 179.

POLYA, G. — [1] *Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity, and symmetrization.* Quart. Appl. Math., **6**, *3* (1948).

POLYA, G., SZEGÖ, G. — [1] *Isoperimetric inequalities in mathematical physics.* Princeton, 1951.

POLYA, G., WEINSTEIN, A. — [1] *On the torsional rigidity of multiply connected cross-sections.* Ann. of Math., **52**, *2* (1950).

POMPEIU, D. — [1] *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe.* Rend. Palermo, **33** (1912). — [2] *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales.* Rend. Palermo, **35** (1913).

POPOV, E. P. — [1] *Nelineinye zadači statiki tonkih steržnej.* Gostehizdat, Moscova, 1948.

POPOV, G. IA. — [1] *Ob odnom sposobe rešenija osesimmetričnyh kontaktnyh zadač teorii uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **25**, *1* (1961). — [2] *Kontaktnaja zadača teorii uprugosti pri naličii krugovoj oblasti kontakta.* Prikl. Mat. Meh., **26**, *1* (1962).

POPOV, G. IA., ROSTOVCEV, N. A. — [1] *Kontaktnye (smešannye) zadači teorii uprugosti.* Trudy 2 sjezda po mehanike, vol. 3, Izd-vo Nauka, Moscova, 1966.

PORITSKY, H. — [1] *Stresses and deflections of cylindrical bodies in contact with application to contact of gears and of locomotive wheels.* Journ. Appl. Mech., **17**, *2* (1950). — [2] *Stress fields of axially symmetric shafts in torsion and related fields.* Proc. Symp. Appl. Math., **3** (1950).

PORISTKY, H., DANFORTH, C. E. — [1] *On the torsion problem.* Proc. III U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958.

PORITSKY, H., JERRARD, R. P. — [1] *Calculus of elastic displacements from photoelastic curves.* Journ. Appl. Mech., **20**, *3* (1953).

PRAGER, W. — [1] *The theory of plasticity: a survey of recent achievements.* Proc. Inst. Mech. Eng., **169**, *21* (1955). — [2] *Einführung in die Kontinuumsmechanik.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1961.

PRAGER, W., HODGE, PH. G. — [1] *Theory of perfectly plastic solids.* J. Wiley, New York, 1951.

PRAGER, W., SYNGE, J. L. — [1] *Approximations in elasticity based on the concept of function space.* Quart. Appl. Math., **5**, *3* (1948).

PRANDTL, L. — [1] *Zur Torsion von prismatischen Stäben.* Phys. Zeitschrift, **4** (1903). — [2] *Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt.* Jahresberichte d. deutschen Math. Verein., **13** (1904).

PREDELEANU, M. — [1] *On spatial contact problem in the linear creep theory.* Bull. Math.Soc. Sci. Mat. Phys. RPR, **6**, *3—4* (1962).

PRIGOGINE, J. — [1] *Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles.* Dunod, Paris, 1947.

PRIVALOV, I. I. — [1] *Graničnye svojstva odnoznačnyh analitičeskih funkcij.* Gostehizdat, Moscova, 1950. — [2] *Vvedenie v teoriju funkcij kompleksnogo peremennogo.* Gostehizdat, Moscova, 1954.

PROKOPOV, V. K. — [1] *K zadače o stesnennom kručenii prizmatičeskih steržnej.* Naučno-inform. bjull. Leningr. Polit. In-ta, **8** (1959). — [2] *Primenenie simvoličeskogo metoda k vyvodu uravnenij teorii plit.* Prikl. Mat. Meh., **29**, *5* (1965).

PUHOV, G. E. — [1] *Električeskoe modelirovanie steržnevyh i tonkostennyh konstrukcij.* Izd-vo AN USSR, Kiev, 1956.

QUINLAN, P. M. — [1] *The torsion of an irregular polygon.* Proc. Roy. Soc., (A), **282** (1964).

RABINOVIČ, I. M. — [1] *Steržnevye sistemy minimalnogo vesa.* Trudy 2 sjezda po mehanike, vol. 3, Nauka, Moscova, 1966.

RABINOVIČ, I. Ş. — [1] *K rešeniju zadač o kontakte cilindrov s parallelnymi osjami.* Izv. OTN, *10* (1958). — [2] *Kontaktnoe sžatie dvuh uprugih konusov.* Mehanika, *1* (1965).

RABOTNOV, JU. N. — [1] *Plastinki i oboločki.* Mehanika v SSSR za 30 let, Gostehizdat, Moscova, 1950. — [2] *Soprotivlenie materialov.* Fizmatgiz, Moscova, 1962.

RADOK, J.R.M. — [1] *On the solution of problems of dynamic plane elasticity.* Quart. Appl. Math., **14**, *3* (1956). — [2] *Ploskie zadači linejnoj teorii vjazkouprugosti.* Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy", Akademkniga, Moscova, 1961. — [3] *Complex variable and direct variational methods.* Applic. Theory of functions in continuum mechanics, vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.

RAYLEIGH, Lord (J. W. Strutt) — [1] *Theory of sound.* Mac-Millan, London, 1894—1896.

REINER, M. — [1] *Rheology.* Handbuch d. Physik, (2), **6**, Springer, 1958.

REISS, E. L., LOCKE, S. — [1] *On the theory of plane stress.* Quart. Appl. Math., **19**, *3* (1961).

REISSNER, E. — [1] *On the theory of bending of elastic plates.* Journ. Math. Phys., **23** (1944). — [2] *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.* Journ. Appl. Mech., **12** (1945). — [3] *On bending of elastic plates.* Quart. Appl. Math., **5**, *1* (1947). — [4] *On a variational theorem in elasticity.* Journ. Math. Phys., **29**, *2* (1950). — [5] *On non-uniform torsion of cylindrical rods.* Journ. Math. Phys., **31**, *3* (1952). — [6] *On torsion with variable twist.* Österr. Ingenieur-Archiv, **9**, *2—3* (1955). — [7] *Note on torsion with variable twist.* Journ. Appl. Mech., **23**, *2* (1956). — [8] *On variational principles in elasticity.* Proc. Symp. Appl. Math., **8** (1958). — [9] *O nekotoryh variacionnyh teoremah teorii uprugosti.* Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy", Akademkniga, Moscova, 1961.

REISSNER, E., SAGOCCI, H. F. — [1] *Forced torsional oscillations of an elastic half-space.* Journ. Appl. Phys., **15** (1944).

REITMAN, M.I., ŠAPIRO, G.S. — [1] *Teorija optimalnogo proektirovanija v stroitelnoj mehanike, teorij uprugosti i plastičnosti.* Itogi Nauki, V.I.N.I.T.I., Moscova, 1966.

REYNOLDS, R.R. — [1] *The Dirichlet problem for multiply-connected domains.*, Journ. Math. Phys., **30**, *1* (1951).

RIBIÈRE, M. — [1] *Sur la flexion des pièces épaisses.* C.R. Ac. Sci., **126** (1898). — [2] *Sur la résistance des massifs épais.* C.R. Ac. Sci., **126** (1898).

RIEKERT, P. — [1] *Tafeln der Elastizitätskonstanten und Festigkeitszahlen.* Handbuch d. Physik, (1), **6**, Springer, Berlin, 1928.

RIESZ, M. — [1] *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels.* Acta Sci. Math. Szeged., **9** (1938).

RIVLIN, R. S. — [1] *Some topics in finite elasticity.* Structural mechanics, Pergamon Press, 1960. — [2] *The formulation of constitutive equations in continuum physics.* Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, *3* (1960).

ROKVA, J. P. — [1] *Ob approksimacii rešenij integralnyh uravnenij ploskoj teorij uprugosti.* Soobščenija AN Gruz. SSR, **35**, *1* (1964).

ROMALIS, B. L. — [1] *Kontaktnaja zadača o sžatii uprugih cilindrov, napravljajuščie kotoryh imejut prjamolinejnye učastki.* Izv. OTN, Meh. Maš., *2* (1962). — [2] *Nekotorye slučai ploskoj kontaktnoj zadači.* Sb. „Rasčety na pročnost", **10**, Moscova, 1964.

RONGVED, L. — [1] *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid with fixed boundary.* Journ. Appl. Mech., **22**, *4* (1955).

ROSENFELD, R. L., MIKLOWITZ, J. — [1] *Wave fronts in elastic rods and plates.* Proc. IVth U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, New York, 1962. — [2] *Elastic wave propagation in rods of arbitrary cross-section.* Journ. Appl. Mech. **32**, *2* (1965).

ROSTOVCEV, N. A. — [1] *K rešeniju ploskoj kontaktnoj zadači.* Prikl. Mat. Meh., **17**, *1* (1953). — [2] *Kompleksnye funkcii naprjaženija v osesimmetričnoj kontaktnoj zadače teorii uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **17**, *5* (1953). — [3] *K zadače o kručenii uprugogo poluprostranstva.* Prikl. Mat. Meh., **19**, *1* (1955). — [4] *Kompleksnye potencialy v zadače o štampe, kruglom v plane.* Prikl. Mat. Meh., **21**, *1* (1957). — [5] *Zamečanija k rabote „Nekotorye kontaktnye zadači teorii uprugosti i drobnoe differencirovanie".* Prikl. Mat. Meh., **23**, *4* (1959). — [6] *O nekotoryh rešenijah integralnogo uravnenija teorii lineino deformiruemogo osnovanija,* Prikl. Mat. Meh., **28**, *1* (1964). — [7] *K teorii uprugosti neodnorodnoj sredy.* Prikl. Mat. Meh., **28**, *4* (1964).

ROY, M. — [1] *Mécanique des milieux continus et déformables.* Gauthier-Villars, Paris, 1950. — [2] *Thermodynamique macroscopique.* Dunod, Paris, 1964.

RUDAKOV, Z. Z. — [1] *O perekatyvanii uprugih tel pri postojannom i peremennom koefficiente trenija v uslovijah prostranstvennoj zadači teorii uprugosti.* Izv. OTN, Meh. Maš., *3* (1960).

RÜDIGER, D. — [1] *Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie elastischer Körper.* Ingenieur Archiv, **27** (1960). — [2] *Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie zweidimensionaler elastischer Kontinua.* Ingenieur Archiv, **29**, *2* (1960).

RUSHTON, K. R. — [1] *Electrical analogue solutions of elastic-plastic torsion for shafts containing structural discontinuities.* Journ. Mech. Phys. Solids, **11**, *4* (1963).

RVAČEV, V. L. [1] *Davlenie na uprugoe poluprostranstvo štampa imejuščego v plane formu polosy.* Prikl. Mat. Meh., **20**, *2* (1956). — [2] *K rasčetu beskonečnoj balki, ležaščei na uprugoe poluprostranstvo.* Prikl. Mat. Meh., **20**, *5* (1956). — [3] *K zadače o davlenii na uprugoe poluprostranstvo štampa s ploskim osnovaniem.* Prikl. Mat. Meh., **21**, *3* (1957). — [4] *O davlenii na uprugoe poluprostranstvo štampa, imejuščego v plane formu klina.* Prikl. Mat. Meh., **23**, *1* (1959). — [5] *O davlenii pod beskonečnoj balkoj, ležaščej na uprugoe poluprostranstvo.* Prikl. Mat. Meh., **23**, *2* (1959).

RYŽIK, I. M., GRADŠTEIN, L. S. — [1] *Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij.* Gostehizdat, Moscova, 1951.

SAINT-VENANT, B. de — [1] *Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion.* Mém. prés. par div. savants étrangers à l'Acad. des Sci., **14** (1855). — [2] *Mémoire sur la flexion des prismes.* Journ. Math. pures appl., (2), **1** (1856). — [3] *Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion.* C. R. Ac. Sci., **88** (1879). — [4] *Memuar o kručenii prizm. Memuar ob izgibe prizm.* Fizmatizdat, Moscova, 1961.

SALGANIK, R. L. — [1] *Ob ocenke ošibki, soveršennoj pri perehode ot točnyh uravnenij teorii uprugosti k uravnenijam ploskogo naprjažennogo sostojanija.* Prikl. Mat. Meh., **28**, *4* (1964).

ŞANDRU, N. — [1] *O sosredotočennyh vnutrennih nagruzkah v uprugom poluprostranstve s zakreplennymi krajami*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR, **5**, *3—4* (1961). — [2] *Asupra unei forțe concentrate în spațiul elastic nemărginit.* Comunicările Acad. RPR **13**, *12* (1963). — [3] *Despre reprezentarea complexă a soluției elastodinamicii plane.* Analele Univ. București, **14**, *1* (1965).

ŠAPIRO, G. S. — [1] *Naprjaženija u otverstija v beskonečnom kline.* Trudy Leningr. Polit. In-ta, *3* (1941). — [2] *Prostranstvennye zadači teorii uprugosti.* Sb. „Mehanika v SSSR za 30 let", Gostehizdat, Moscova, 1950.

SARKISJAN, M. S. — [1] *Izgib prizmatičeskogo sterznja dvutavrovogo poperečnogo sečenija.* Izv. AN Arm. SSR, **9**, *7* (1956).

SAVIN, G. N. — [1] *Koncentracija naprjaženij okolo otverstij.* Gostehizdat, Moscova, 1951. — [2] *Osnovy ploskoj teorii nesimmetričnoj uprugosti.* (curs lito). Izd-vo Univ. Kiev, 1965.

SAVIN, G. N., RVAČEV, V. L. — [1] *Pro peremiščennia pid zoseredjenoiu siloiu.* Prikladna Mehanika, **10**, *2* (1964).

SCHAEFFER, H. — [1] *Die Spannungsfunktion des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers.* ZAMM, **33**, *10—11* (1953).

SCHIFFER, M. — [1] *Applications of variational methods in the theory of conformal mapping.* Proc. Symp. Appl. Math., **8** (1958).

SCHILE, R. D., SIERAKOWSKI, R. L. — [1] *On the Saint-Venant problem for a non-homogeneous elastic material.* Quart Appl. Math., **23**, *1* (1965).

SCHUMANN, W. — [1] *Sur les différentes formes du principe de B. de Saint-Venant.* C.R. Ac. Sci., **238** (1954). — [2] *Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das de Saint-Venantsche Prinzip, speziell mit Anwendung auf die Plattentheorie.* Dissertation, Techn. Hochschule Zürich, ETH Prom., Nr. **2420** (1955).

SCHWARTZ, L. — [1] *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 1957 — [2] *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann, Paris, 1961.

SCHWARZ, M. J. de — [1] *Über das Verhalten der Torsionsfunktion in der Nähe von einspringenden Ecken massiver und hohler Stäbe.* Österreich. Ingenieur-Archiv, **7**, *2* (1953).

SEDOV, L. I. — [1] *Ob osnovnyh principah mehaniki splošnoj sredy.* Izd-vo Univ. Moscova, 1961. — [1] *Vvedenie v mehaniku splošnoj sredy.* Fizmatgiz, Moscova, 1962.

SEEGER, A. — [1] *Theorie der Gitterfehlstellen.* Handbuch d. Physik, (2), **7**, partea 1, Springer, Berlin, 1955.

SEEWALD, F. — [1] *Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt.* Abhandl. aus dem Aerodyn. Inst. an der techn. Hochschule, Aachen, **7** (1929).

SEIDEL, W. — [1] *Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen.* Math. Ann., **104** (1931).

SEREBRENNIKOVA, I. I. — [1] *Pro zgin porožnistih steržniv.* Prikladna Mehanika, **6**, *3* (1960).

ŠEREMETJEV, M. P. — [1] *Uprugoe ravnovesie elliptičeskogo kolca.* Prikl. Mat. Meh., **17**, *1* (1953).

ŠEREMETJEV, M. P., PELEH, B. L. — [1] *K postroeniju utočnennoi teorii plastin.* Inž. Žurn., **4**, *3* (1964).

ŠERMAN, D. I. — [1] *Ob odnoj zadače teorii uprugosti.* Dokl. AN SSSR, **27**, *9* (1940). — [2] *K rešeniju ploskoj statičeskoj zadači teorii uprugosti pri zadannyh na granice smeščenijah.* Dokl. AN SSSR, **27**, *9* (1940). — [3] *K rešeniju ploskoj statičeskoj zadači teorii uprugosti pri zadannyh vnešnih silah.* Dokl. AN SSSR, **28**, *1* (1940). — [4] *Smešannaja zadača statičeskoj teorii uprugosti dlja ploskih mnogosvjaznyh oblastej.* Dokl. AN SSSR, **28**, *1* (1940). — [5] *Prostranstvennaja statičeskaja zadača teorii uprugosti s zadannymi smeščenijami na granice.* Prikl. Mat. Meh., **7**, *5* (1943). — [6] *Osnovnye ploskie i kontaktnye (smešannye) zadači statičeskoj teorii uprugosti.* „Mehanika v SSSR za 30 let", Gostehizdat, Moscova, 1950. — [7] *Pro odin metod rozviazannia deiakih zadač krucennia, zginu i ploskoj teorii pružnosti dlja neodnozviaznyh oblastej.* Prikladna Mehanika, **3**, *4* (1957). — [8] *Metod integralnyh uravnenij v ploskih i prostranstvennyh zadačah teorii uprugosti.* Trudy Vsesoiuznogo sjezda po mehanike, Akademkniga, Moscova, 1962. — [9] *Kručenie i izgib polyh prizmatičeskih tel.* Izd-vo Nauka, Moscova, sub tipar.

SERRIN, J. — [1] *The derivation of stress-deformation relations for a Stokesian fluid.* Journ. Math. Mech., **8**, *4* (1959).

SETH, B. R. — [1] *Some recent applications of the theory of finite elastic deformations.* Proc. Symp. Appl. Math., **3** (1950).

SHIELD, R. T., DRUCKER, D. C. — [1] *The application of limit analysis to punch-indentation problems.* Journ. Appl. Mech., **20**, *3* (1953).

SIGNORINI, A. — [1] *Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata.* Rend. Mat. e applic., **18**, *1—2* (1959). — [2] *Questioni di elasticità non linearizzata.* Rend. Mat. e applic., **19**, *1—2* (1960). — [3] *Questioni di elasticità non linearizzata.* Cremonese, Roma, 1960.

ŠIRJAEV, E. A. — [1] *O kručenii kruglogo brusa s treščinoj po duge okružnosti ili po radiusu.* Prikl. Mat. Meh., **20**, *4*, (1956). — [2] *Kručenie kruglogo brusa s dvumja vyrezami.* Prikl. Mat. Meh., **22**, *4* (1958).

SLOBODJANSKIJ, M. G. — [1] *Obščie formy rešenij uravnenij uprugosti dlja odnosvjaznyh i mnogosvjaznyh oblastej, vyražennye čerez garmoničeskie funkcii.* Prikl. Mat. Meh., **18**, *1* (1954). — [2] *Ob obščih i polnyh formah rešenij uravnenij uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **23**, *3* (1959). — [3] *Nekotorye ocenki v statičeskoj zadače teorii uprugosti.* Trudy Mosk. Energ. In-ta, **32** (1959). — [4] *Ulučšenie nekotoryh ocenok dlja naprjaženij v zadačah teorii uprugosti.* Mehanika, *1* (1965).

SMIRNOV, V. I. — [1] *Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.* Math. Ann., **107** (1933). — [2] *Kurs vysšej matematiki.* Gostehizdat, Moscova, 1951.

SMITH, J. O., CHANG KENG LIN — [1] *Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problem.* Journ. Appl. Mech., **20**, *2* (1953).

SNEDDON, I. N. — [1] *Fourier transforms.* McGraw-Hill, New York, 1951. — [2] *Functional analysis.* Handbuch d. Physik, (2), **2**, Springer, Berlin, 1955. — [3] *Dual equations in elasticity.* Applic. theory of functions in continuum mechanics, vol. 1, Nauka, Moscova, 1965. — [4] *The relation between load and penetration in the axysymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile.* Internat. Journ. Engng. Sci., **3**, *1* (1965).

SNEDDON, I. N., BERRY, D. S. — [1] *The classical theory of elasticity.* Handbuch d. Physik, (2), **6**, Springer, Berlin, 1958.

SOBOLEV, S. L. — [1] *Algorifm Švarca v teorii uprugosti.* Dokl. AN SSSR, **13**, *6* (1936). — [2] *Nekotorye primenenija funkcionalnogo analiza v matematičeskoj fizike.* Izd-vo Univ. Leningrad, 1950. — [3] *Uravnenija matematičeskoj fiziki.* Gostehizdat, Moscova, 1954.

SOKOLNIKOFF, I. S. — [1] *On a solution of Laplace's equation with an application to the torsion problem for a polygon with reentrant angles.* Trans. Amer. Math. Soc., **33** (1931). — [2] *The mathematical theory of elasticity.* McGraw-Hill, New York, 1956.

SOKOLNIKOFF, I. S., SOKOLNIKOFF, E. S. — [1] *Torsion of regions bounded by circular arcs.* Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938).

SOLJANIK-KRASSA, K. V. — [1] *Kručenie valov peremennogo sečenija.* Gostehizdat, Moscova, 1949. — [2] *Funkcii naprjaženija osesimmetričnoj zadači teorii uprugosti.* Prikl. Mat. Meh., **21**, *2* (1957). — [3] *Uprugoe ravnovesie tel vraščenija.* Inž. Sbornik, **26** (1958).

SOLOMON, L. — [1] *Funcţii-potenţial de deplasare pentru ecuaţiile echilibrului elastic.* Bul. şt. Acad. R.P.R., **9**, *2* (1957). — [2] *Funcţii-potenţial de deplasare pentru ecuaţiile dinamice ale lui Lamé.* Comunicările Acad. R.P.R., **8**, *10* (1958). — [3] *Sur les rapports entre les constantes de Prandtl, la rigidité géométrique à la torsion et la fonction de Green.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR, **2**, *3* (1958); *4* (1958). — [4] *Tensorul lui Green pentru ecuaţiile lui Lamé.* Analele Univ. Bucureşti, **25** (1960). — [5] *Quelques remarques sur le problème du contact élastique.* C. R. Ac. Sci., **250** (1960). — [6] *Nekotorye zamečanija po povodu zadači Gerca.* Izv. OTN, Meh. Maš., *3* (1960). — [7] *Despre gradul de arbitrar în determinarea funcţiilor lui Papkovici.* Comunicările Acad. R. P. R., **11**, *9* (1961). — [8] *În legătură cu problema lui Saint-Venant* (I—IV). Comunicările Acad. RPR, **11**, *7* şi *11* (1961); **12**, *1* (1962). — [9] *Some remarks on Saint-Venant's problem.* Archiwum Mech. Stos., **14**, *5* (1962). — [10] *Despre stabilirea formulelor lui Kolosov-Mushelişvili.* Analele Univ. Bucureşti, **40** (1963). — [11] *Une solution approchée du problème du poinçon à base plane bornée convexe non-elliptique.* C.R. Ac. Sci., **258** (1964). — [12] *Upon the geometrical punch-penetration rigidity.* Rend. Lincei, **36**, *6* (1964). — [13] *Upon the paradoxal character of the solutions of Kelvin-Somigliana and Kolossoff-Mushelishvili in the plane elasticity.* Rend. Lincei, **37**, *1—2* (1964). — [14] *Elasticité linéaire.* Masson, Paris, 1968.

SOLOMON, L., DRĂGHICESCU, D. — [1] *Asupra utilizării transformărilor conforme în problema plană a elasticităţii pentru domenii dublu conexe.* St. Cerc. Mec. Apl., **8**, *4* (1957).

SOLOMON, L., ZAMFIRESCU, I. — [1] *Some approximate formulae and solutions in the contact problem for punches with a plane bounded non-elliptical basis.* Applications Theory of functions in continuum mechanics. Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.

SOMIGLIANA, C. — [1] *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo.* Il nuovo Cimento, (3), **17—19** (1885). — [2] *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superficie sferiche.* Annali di Pisa, **4** (1887). — [3] *Sulle equazioni della elasticità.* Annali di mat. pura appl., (2), **17** (1889—90). — [4] *Formole generali per la rappresentazione di un campo di forza per mezzo di forze elastiche.* Rend. R. Ist. Lombardo di Sci. et Lett., (2), **23**, *20* (1890). — [5] *Sul principio delle imagini di Lord Kelvin e le equazioni dell'elasticità.* Rend. Lincei, (5), **11**, *1* (1902).

SOMMERFELD, A. — [1] *Mechanik der deformierbaren Medien.* Geest u. Portig, Leipzig, 1949. — [2] *Thermodynamik und Statistik,* Wiesbaden, 1952.

SOOS, E. — [1] *Despre problema lui Saint-Venant în cazul unui material anizotrop şi neomogen.* Analele Univ. Bucureşti, **40** (1963).

SOROKA, W. W. — [1] *Simulation in science and technology.* Appl. Mech. Rev., **13**, *9* (1960).

SOUTHWELL, R. V. — [1] *On Castigliano's theorem of least work and the principle of Saint-Venant.* Phil. Mag., **45** (1923). — [2] *Castigliano's principle of minimum strain-energy.* Proc. Roy. Soc. London, (A), **154** (1936). — [3] *An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists,* Oxford, 1941.

SRETENSKIJ, L. N. — [1] *Teoria njutonovskogo potenciala.* Gostehizdat, Moscova, 1946.

ŠTAERMAN, I. JA. — [1] *Kontaktnye zadači teorii uprugosti.* Gostehizdat, Moscova, 1949. — [2] *Sžatie uprugih tel, soprikasaiuščihsja po prjamolineinomu otrezku.* Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy", Akademkniga, Moscova, 1961.

STAKGOLD, I. — [1] *The Cauchy relations in a molecular theory of elasticity.* Quart. Appl. Math., **8**, *2* (1950).

STĂNESCU, C. — [1] *Metoda Mushelişvili în mişcările plane ale fluidelor viscoase incompresibile.* Bul. şt. Acad. RPR, **9**, *2* (1957). — [2] *O problemă de tip mixt din încovoierea plăcilor elastice.* St. Cerc. Mec. Apl., 9, *2* (1958).

STĂNESCU, C., DUMITRESCU, L. — [1] *Torsiunea barelor cilindrice prevăzute cu canal de pană.* Comunicările Acad. RPR, **8**, *6* (1958).

STERNBERG, E. — [1] *On Saint-Venant's principle.* Quart. Appl. Math., **11**, *4* (1954). — [2] *Three-dimensional stress concentrations in the theory of elasticity.* Appl. Mech. Rev., **11**, *1* (1958). — [3] *On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., **6**, *1* (1960). — [4] *On some recent developments in the linear theory of elasticity.* Structural mechanics, Pergamon Press, 1960.

STERNBERG, E., AL-KHOZAIE, S. — [1] *On Green's functions and Saint-Venant's principle in the linear theory of elasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., **15**, *2* (1964).

STERNBERG, E., EUBANKS, R. A. — [1] *On the singularity at a concentrated load applied to a curved surface*. Proc. IInd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1954. — [2] *On the concept of concentrated loads and an extension of the uniqueness theorem in the linear theory of elasticity*. Journ. Rat. Mech. Anal., **4**, *1* (1955).

STERNBERG, E., GURTIN, M. E. — [1] *On the completeness of certain stress functions in the linear theory of elasticity*. Proc. IV U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1962.

STERNBERG, E., ROSENTHAL, F. — [1] *The elastic sphere under concentrated loads*. Journ. Appl. Mech., **19**, *4* (1952).

STEVENSON, A. C. — [1] *Flexure with shear and associated torsion in prisms of uni-axial and asymmetric cross-sections* (I, II). Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A), **237** (1938). — [2] *Some boundary problems in two-dimensional elasticity*. Phil. Mag. (7), **34** (1943). — [3] *Complex potentials in two-dimensional elasticity* (I, II). Proc. Roy. Soc. London, (A), **184** (1945).

STOILOV, S. (vol. 2 — în colab. cu ANDREIAN-CAZACU, C.) — [1] *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*. Edit. tehnică şi Edit. Academiei, Bucureşti, 1954—1958.

SUHIH, L. I. — [1] *K opredeleniju optimalnoj formy prodolnoj vytočki pri kručenii valov*. Izv. OTN, Meh. Maš., *2* (1963).

SUPPER, H. — [1] *Photoélasticité et apsidométrie*. Publ. Sci. Techn. Min. de l'Air, **106**, Paris, 1937.

SWAINGER, K. — [1] *Analysis of deformation*. Vol. 4 : *Waves and vibration*. Chapman and Hall, London, 1959.

SYNGE, J. L. — [1] *The hypercircle in mathematical physics*. Cambridge, New York, 1957.

SYNGE, J. L., CAHILL, W. F. — [1] *The torsion of a hollow square*. Quart. Appl. Math., **15**, *3* (1957).

TAKANO, R. — [1] *Analiza, prin intermediul unui concentrator de rezistenţe, a cazului contactului triunghiular* (lb. japoneză). Lucrările congresului IV al Uniunii electrotehnice din Japonia.

TANG LI-MIN, SUN HWAN-CHUN — [1] *Three-dimensional elasticity problems solved by complex variable method*. Scientia Sinica, **12**, *11* (1963).

TANII, T., TAKANO, R., MIKI, Y. — [1] *Constriction resistance of electrical contacts*. Review electric. comm. lab., Tokyo, **16**, *7—8* (1968).

TANIMOTO, O. — [1] *The solution of the generalized Boussinesq-problem for elastic foundations*. Proc. V Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1955.

TEDONE, O. — [1] *Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo*. Ann. di Mat. pura appl., (3), **8** (1903). — [2] *Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre* (*Integrationstheorie*). Encykl. Math. Wiss., **4**, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907—1914.

TEDONE, O., TIMPE, A. —[1] *Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper*. Encykl. Math. Wiss., **4**, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907—1914.

TELEMAN, S. — [1] *Metoda proiecţiei ortogonale şi primele două probleme la limită din teoria elasticităţii*. Bul. şt. Acad. RPR, **7**, *1* (1955).

TEODORESCU, N. — [1] *La dérivée aréolaire*. Bucureşti, 1936.

TEODORESCU, N., OLARU, V. — [1] *Ecuaţiile fizicii matematice*. (Curs lito). Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963—1965.

TEODORESCU, P. P.— [1] *Sur le problème du parallélépipède élastique*. Archiwum Mech. Stos., **12**, *5—6* (1960). — [2] *Probleme plane în teoria elasticităţii*. Vol. 1. Edit. Academiei, Bucureşti, 1961. — [3] *One hundred years of investigations in the plane problem of the theory of elasticity*. Appl. Mech. Rev., **17**, *3* (1964). — [4] *Probleme plane în teoria elasticităţii*. Vol. 2. Edit. Academiei, Bucureşti, 1966. — [5] *Probleme spaţiale în teoria elasticităţii*. Edit. Academiei, Bucureşti, sub tipar.

TEODOSIU, C. — [1] *Rezolvarea problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare*. St. Cerc. Mec. Apl., **13**, *6* (1962).

THEOCARIS, P. S. — [1] *Moiré fringes : a powerful measuring device*. Appl. Mech. Rev., **15**, *5* (1962).

TIFFEN, R. — [1] *An investigation of the transverse displacement equation of elastic plates theory*. The Quart. Journ. Mech. Appl. Math., **14**, *1* (1961).

TIHONOV, A. N., SAMARSKIJ, A. A. — [1] *Uravnenija matematičeskoj fiziki*. Gostehizdat, Moscova, 1953.

TIMOSHENKO, S. P. — [1] *Collected papers*. McGraw-Hill, New York, 1953. — [2] *History of strength of materials*. McGraw-Hill, New York, 1953.

TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M. — [1] *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, New York, 1961.

TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. — [1] *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1951.

TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKI-KRIEGER, S. — [1] *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.

TIRSKIJ, G. A. — [1] *Kručenie pologo steržnja, ograničennogo krylovymi profiljami Žukovskogo*. Izv. OTN, Meh. Maš., *2* (1959).

TODHUNTER, I., PEARSON, K. — [1] *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time*. Cambridge, 1886—1893.

TOLOKONNIKOV, L. A. — [1] *Konečnye ploskie deformacii neszimaemogo materiala*. Prikl. Mat. Meh., **23**, *1* (1959).

TOLSTOV, G. P. — [1] *Rjady Fourier*. Gostehizdat, Moscova, 1951.

TONOJAN, V. S. — [1] *Kručenie pologo prizmatičeskogo steržnja s poperečnym sečeniem v vide ellipsa s vytočkoj*. Izv. OTN, Meh. Maš., *1* (1961).

TOPOLJANSKIJ, D. B. — [1] *O primenenii effektivnyh metodov konformnogo otobraženija k rešeniju odnoj zadači ob izgibe steržnej*. Prikl. Mat. Meh., *4*, *2* (1940).

TOUPIN, R. A. — [1] *Elastic materials with couple-stresses*. Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, *5* (1962). — [2] *Theories of elasticity with couple-stresses*. Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, *2* (1964). — [3] *Saint-Venant's principle*. Arch. Rat. Mech. Anal., **18**, *2* (1965).

TREFFTZ, E. — [1] *Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt*. Math. Ann., **82** (1921). — [2] *Über die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkeleisens*. ZAMM, **2** (1922). — [3] *Mathematische Elastizitätstheorie*. Handbuch d. Physik, (1), **6**, Springer, Berlin, 1928. — [4] *Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken*. ZAMM, **15** (1935).

TRUESDELL, C. A. — [1] *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*. Journ. Rat. Mech. Anal., **1** (1952); **2** (1953). — [2] *Hypoelasticity*. Journ. Rat. Mech. Anal., **4**, *1* (1955) (Correction, **4**, 6 (1955)). — [3] *The rational mechanics of materials: past, present, future*. Appl. Mech. Rev., **12**, *2* (1959). — [4] *Invariant and complete stress functions for general continua*. Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, *1* (1959). — [5] *General and exact theory of waves in finite and elastic strain*. Arch. Rat. Mech. Anal., **8**, *4* (1961). — [6] *Etapy razvitija ponjatija naprjaženija*. Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy", Akademkniga, Moscova, 1961. — [7] *Reactions of the history of mechanics upon modern research*. Proc. IVth U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1962. — [8] *The meaning of Betti's reciprocal theorem*. Mathematics a. Math. Physics. (sect. B, Journ. Res. Nat. Bur. Standards), **67** B, *2* (1963).

TRUESDELL, C. A., NOLL, W. — [1] *The non-linear field theories of mechanics*. Handbuch d. Physik, (2), **3**, partea 3, Springer, Berlin, 1965.

TRUESDELL, C. A., TOUPIN, R. A. — [1] *The classical field theories*. Handbuch d. Physik, (2), **3**, partea 1, Springer, Berlin, 1960. — [2] *Static grounds for inequalities in finite strain of elastic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal., **12**, *1* (1963); **19**, *5* (1965), p. 407.

TSU TAO LOO — [1] *Effect of curvature on the Hertz theory for two circular cylinders in contact*. Journ. Appl. Mech., **25**, *1* (1958).

UFLJAND, Ja. S. — [1] *Kontaktnaja zadača teorii uprugosti dlja krugovogo v plane štampa, pri naličii sceplenija*. Prikl. Mat. Meh., **20**, *5* (1956). — [2] *Integralnye preobrazovanija v zadačah teorii uprugosti*. Akademkniga, Moscova, 1963. — [3] *Parnye integralnye uravnenija v teorii uprugosti*. 2 Vsesoiuznyi sjezd po mehanike, Annotacii dokladov, Moscova, 1964.

UGODČIKOV, A. G. — [1] *Rozrahunnok na krucennia prizmatičnih izotropnih sterjniv z odnozviaznim poperečnim pererizom*. Prikladna Mehanika, **2**, *1* (1956). — [2] *Krucennia porojnistih prizmatičnih sterjniv*. Prikladna Mehanika, **2**, *2* (1956).

USTINOV, Ju. A. — [1] *Rasčet napriaženij v krugovom kolce*. Izv. OTN, Meh. Maš., 1 (1964).

UTEŠEVA, V. I. — [1] *Približennye uravnenija dinamiki uprugogo steržnja krugovogo poperečnogo sečenija*. Izv. OTN, Meh. Maš., *4* (1963).

VAHITOV, M. B. — [1] *K vyvodu uravnenij ploskoj zadači teorii uprugosti v kosougolnyh koordinatah*. Izv. vysših učeb. zaved., Aviacionnaia tehnica, *1* (1964).

VAJNBERG, D. V. — [1] *Mestnye naprjaženija v ploskom kolcevom diske ot dvuh sosredotocennyh sil*. Prikl. Mat. Meh., **13**, *2* (1949).

VAJNBERG, D. V., SINJAVSKIJ, A. L. — [1] *Metody čislennogo analiza v teorii uprugosti*. Trudy 2 sjezda po mehanike. Vol. 3, Nauka, Moscova, 1966.

VAKULENKO, A. A. — [1] *O svjazjah meždu naprjaženijami i deformacijami v neuprugih sredah*. Sb. „Issledovanija po uprugosti i plastičnosti", Izd-vo Univ. Leningrad, *1* (1961).

VÂLCOVICI, V., BĂLAN, ȘT., VOINEA, R. — [1] *Mecanica teoretică*. Edit. tehnică, București, 1963.

VALIRON, G. — [1] *Théorie des fonctions*. Masson, Paris, 1955. — [2] *Equations fonctionnelles*. Masson, Paris, 1950.

VALLÉE-POUSSIN, Ch. de la — [1] *Leçons de mécanique analytique*. Gauthier-Villars, Paris, 1932.

VALOV, G. M.—[1] *Ob osesimmetričnoj deformacii krugovogo cilindra konečnoj dliny*. Prikl. Mat. Meh., **26**, *4* (1962). — [2] *Rešenie smešannyh zadač o kručenii beskonečnogo uprugogo cilindra metodom dualnyh integralnyh uravnenij, i differencirovaniem graničnyh uslovij*. Prikl. Mat. Meh., **29**, *3* (1965).

VEKUA, I. N. — [1] *Obobščennye analitičeskie funkcii*. Fizmatgiz, Moscova, 1959. — [2] *Teorija tonkih pologih oboloček peremennoj tolščiny*. Trudy Tbilissk. Mat. In-ta, *30* (1965).

VEKUA, I. N., MUSHELIŠVILI, N. I. — [1] *Metody teorii analitičeskih funkcij v teorii uprugosti*. Trudy Vses. sjezda po mehanike, Akademkniga, Moscova, 1962.

VEKUA, I. N., RUHADZE, A.K. — [1] *Zadača kručenija krugovogo cilindra, armirovannogo prodolnym krugovym steržnem*. Izv. AN SSSR, *3* (1933).

VERMA, G. R. — [1] *Application of Dirac's delta function in isolated force problems of semi-infinite elastic solid of isotropic and non-isotropic materials*. ZAMM, **37**, *1—2* (1957).

VERMEULEN, P. J., JOHNSON, K. L. — [1] *Contact of non-spherical elastic bodies transmitting tangential forces*. Journ. Appl. Mech., **31**, *2* (1964).

VISARION, V. — [1] *Elemente pentru calculul plăcilor curbe subţiri elastice*. Edit. Academiei, Bucureşti, 1961. — [2] *Stări de tensiune în teoria plăcilor curbe*. Edit. Academiei, Bucureşti, 1967.

VLASOV, B. F. — [1] *Ob uravnenijah teorii izgiba plastinok*. Izv. OTN, *12* (1957).

VLASOV, V. V. — [1] *Metod načalnyh funkcij v osesimmetričnoj zadače teorii uprugosti*. Izv. OTN, Meh. Maš., *5* (1960).

VLASOV, V. Z. — [1] *Uravnenija nerazryvnosti deformacii v krivolineinyh koordinatah*. Prikl. Mat. Meh., **8**, *4* (1944). — [2] *Tonkostennye uprugie steržni i oboločki s žestkim otkrytym profilem*. (Anexă la S. P. TIMOŠENKO, „*Ustojčivost uprugih sistem*", Gostehizdat, Moscova, 1946.) — [3] *Obščaja teoria oboloček*. Gostehizdat, Moscova, 1949. — [4] *Metod načalnyh funkcij v zadačah teorii uprugosti*. Izv. OTN, *7* (1955).

VOIGT, W. — [1] *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle*. Abh. d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, **34** (1887). — [2] *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, Berlin, 1910.

VOLYNSKIJ, B. A., BUHMAN, V. E. — [1] *Modeli dlja rešenija kraevyh zadač*. Fizmatgiz, Moscova, 1960.

VOLTERRA, V. — [1] *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (3), **24** (1907).

VOLTERRA, V., VOLTERRA, E. — [1] *Sur les distorsions des corps élastiques*. Mém. Sci. Math., fasc. 147, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

VOROVIČ, I. I. — [1] *Nekotorye zamečanija k statje R. Salganika „Ob ocenke ošibki..."*. Prikl. Mat. Meh., **29**, *1* (1965).

VRĂNCEANU, G. — [1] *Curs de geometrie analitică şi proiectivă*. Bucureşti, 1944—1945.

WALSH, J. L. — [1] *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*. Amer. Math. Soc., Colloquium publications, 1960.

WANER, N. S., SOROKA, W. W. — [1] *Stress concentrations for structural angles in torsion by the conducting sheet analogy*. Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, **11**, *1* (1953).

WARSCHAWSKII, S. E. — [1] *Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung*. Math. Zeitschrift, **35**, *3—4* (1932); **38** (1934). — [2] *Recent results in numerical methods of conformal mapping*. Proc. Symp. Appl. Math., **6** (1956).

WASHIZU, K. — [1] *Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity*. Journ. Math. Phys., **32**, *2—3* (1953). — [2] *A note on the condition of compatibility*. Journ. Math. Phys., **36**, *4* (1958).

WASIUTINSKI, Z., BRANDT, A. — [1] *The present state of knowledge in the field of optimum design of structures*. Appl. Mech. Rev., **16**, *5* (1963).

WEBER, C. — [1] *Die Lehre der Drehungsfestigkeit*. Forschungsarbeiten VDI, **65** (1921). — [2] *Die Drehungsfestigkeit von Stäben*. Forschungsarbeiten VDI, **66** (1922). — [3] *Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums*. ZAMM, **28** (1948).

WEBER, C., GÜNTHER, W. — [1] *Torsionstheorie*. Vieweg, Braunschweig, 1958.

WEINBERGER, H. F. — [1] *Upper and lower bounds for torsional rigidity*. Journ. Math. Phys., **32**, *1* (1953).

WEINER, J. M. — [1] *A resisto-network solution for the torsion of hollow sections.* Journ. Appl. Mech., **20**, *4* (1953).

WEINGARTEN, G. — [1] *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi.* Rend. Lincei, (5), **10**, *1* (1901).

WEINSTEIN, A. — [1] *The center of shear and the center of twist.* Quart. Appl. Math., **5**, *1* (1947). — [2] *On cracks and dislocations in shafts under torsion.* Quart. Appl. Math., **10**, *1* (1952). — [3] *New methods for the estimation of the torsional rigidity.* Proc. Symp. Appl. Math., **3** (1953).

WERNITZ, W. — [1] *Friction at Hertzian contact with combined roll and twist.* Rolling contact phenomena, North Holland, 1963.

WEYL, H. — [1] *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers.* Rend. Palermo, **39** (1915). — [2] *The method of orthogonal projections in potential theory.* Duke Math. Journ., **7** (1940).

WIEGHARDT, K. — [1] *Über ein neues Verfahren, verwickelte Spannungsverteilungen in elastischen Körpern auf experimentellem Wege zu finden.* Mitteil. über Forsch. an den Geb. des Ing., **49** (1908).

WILBUR, J. B., NORRIS, C. H. — [1] *Structural model analysis.* Handbook exper. stress anal. (M. Hetényi), McGraw-Hill, New York, 1950.

WINSLOW, A. M. — [1] *Stress solutions for rectangular plates by conformal transformation.* The Quart. Journ. Mech. Appl. Math., **10** (1957).

WOZNIAK, C. — [1] *On the solution of certain boundary value problems of torsion and bending of straight bars.* Archiwum Mech. Stos., **13**, *1* (1961).

YU CHEN — [1] *Remarks on variational principles in elastodynamics.* Journ. Franklin Inst., **278**, *1* (1964).

ZAHORSKI, S. — [1] *Equations of the theory of large elastic deformations in terms of the geometry of the undeformed body.* Archiwum Mech. Stos., **14**, *6* (1962).

ZAKORKO, V. N., ROSTOVCEV, N. A. — [1] *K dinamičeskoj kontaktnoj zadače stacionarnyh kolebanij uprugogo poluprostranstva.* Prikl. Mat. Meh., **29**, *3* (1965).

ZAMANSKY, M. — [1] *Introduction à l'algèbre et l'analyse modernes.* Dunod, Paris, 1958.

ZAMFIRESCU, I. — [1] *La distribution d'équilibre sur un ellipsoïde à n dimensions.* Revue Roum. Math. pures appl., **9**, *9* (1964).

ZANABONI, O. — [1] *Dimostrazione generale del principio di de Saint-Venant.* Rend. Lincei, (6), **25** (1937).

ZAPALOWICZ, W. — [1] *Torsion of prismatical bars of regular polygonal cross-sections.* Archiwum Mech. Stos., **11**, *5* (1959).

ZENER, C., KE TIN SUI, ARTMAN, R., THOMSON, D., TAKAHASI, S., NOVIK, A. — [1] *Uprugost i neuprugost metallov.* Izd-vo Inostr. Lit., Moscova, 1954.

ZIEGLER, H. — [1] *On the concept of elastic stability.* Advances in appl. mech. Vol. 4, McGraw-Hill, New York, 1956. — [2] *Some extremum principles in irreversible thermodynamic with application to continuum mechanics.* Progress in solid mechanics. Vol. 4, North Holland, Amsterdam, 1963.

ZYGMUND, A. — [1] *Trygonometric series.* Cambridge, 1959.

ZVOLINSKIJ, N. V. — [1] *Volnovye problemy teorii uprugosti splošnoj sredy.* Mehanika, *1* (1965).

*** — [1] *Symbols, units and nomenclature in physics.* International Union of pure and appl. physics, 1961.

*** — [1] *Terminologija teorii uprugosti, ispytanij i mehaničeskih svoistv materialov i stroitelnoj mehaniki.* Akademizdat, Moscova, 1952.

